Capitolo II

TRAVI AD ASSE RETTILINEO CARICATE ASSIALMENTE

Un caso tipico di trave soggetta esclusivamente a forza normale variabile da sezione a sezione è quello della *trave pesante* — della quale cioè non sia trascurabile il peso proprio — ad asse rettilineo e verticale.

8 — **Trave prismatica.**

Supposta dapprima la trave prismatica, consideriamola incastrata superiormente e caricata all'altro estremo da una forza assiale di trazione N_o (fig. 29).

La sezione maggiormente cimentata o *sezione pericolosa* è quella di incastro, perchè in essa oltre al carico N_o, agisce tutto il peso P della trave.

Se A è l'area della sezione resistente del prisma, k' il carico di sicurezza a trazione, al limite della sicurezza voluta, dovrà essere verificata la equazione di stabilità:

$$k' = \frac{N_o + P}{A} . \tag{10}$$

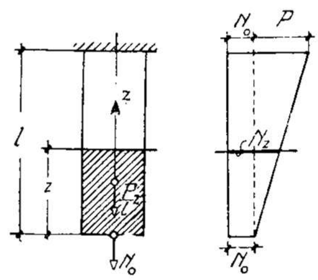

Fig. 29

Analogamente per una trave incastrata inferiormente, cimentata da una forza di compressione costante oltreché dal peso proprio (fig. 30), deve essere posta, sempre per la sezione d'incastro, la condizione:

$$k'' = \frac{N_o + P}{A} , \tag{10'}$$

essendo k'' il carico di sicurezza a compressione [1].

Sia nell'un caso che nell'altro possiamo calcolare la variazione di lunghezza che il prisma subisce sotto carico. Poichè per l'elemento dz, situato all'ascissa z, è:

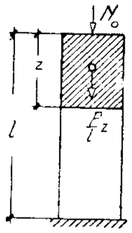

Fig. 30

$$(11)\qquad \delta(dz) = \varepsilon_x\, dz = \frac{N_x\, dz}{EA} = \frac{N_0 + \frac{P}{l} z}{EA}\, dz ,$$

integrando per tutta la lunghezza l, si ottiene:

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon_x\, dz = \frac{1}{EA}\int_0^l \left(N_0 + \frac{P}{l} z\right) dz ,$$

ossia:

$$(12)\qquad \Delta l = \frac{l}{EA}\left(N_0 + \frac{P}{2}\right) :$$

il prisma modifica cioè la propria lunghezza come se fosse privo di peso e cimentato alle basi da una forza uguale al carico N_0 *dato, aumentato di metà del suo peso.*

Il lavoro di deformazione vale:

$$(13)\quad \Phi_l = \int_V \varphi\, dV = \frac{EA}{2}\int_0^l \varepsilon_z^2\, dz = \frac{1}{2EA}\int_0^l \left(N_0 + \frac{P}{l} z\right)^2 dz = \frac{l}{2EA}\left(N_0^2 + N_0 P + \frac{P^2}{3}\right) ;$$

per una trave cimentata esclusivamente dal peso proprio ($N_0 = 0$) vale dunque un terzo di quello relativo alla stessa trave supposta priva di peso, cui il carico P fosse tutto applicato in corrispondenza della sezione estrema.

* * *

In tutto anologo a quello ora trattato è il problema della stabilità di un braccio di peso P, ruotante intorno ad uno dei suoi estremi O con velocità angolare costante ω in un piano orizzontale da cui s'immagini sorretto senza attrito (fig. 31).

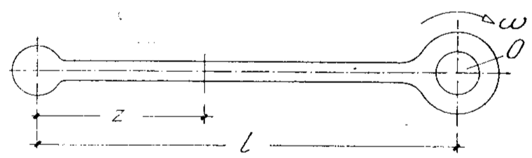

Fig. 31

Indicata con g l'accelerazione di gravità e detto γ il peso specifico del braccio, supposto inoltre

(1) Intendiamo in questo secondo caso che la trave sia tanto corta da escludere possibilità di cedimento per *carico di punta*: un tipo di sollecitazione che sarà studiato in seguito.

questo ultimo munito alla sua estremità libera di un'espansione di peso P_0, nella sezione di ascissa z agisce durante la rotazione la forza centrifuga:

$$(14) \qquad N_x = \frac{\omega^2}{g}\left(P_0 l + \gamma A \int_0^z (l-z)\,dz\right) = \frac{\omega^2}{g}\left[P_0 l + \gamma A z (l - 0{,}5\,z)\right].$$

Per $z = l$ otteniamo da questa il valore massimo della trazione assiale:

$$(15) \qquad N_l = \frac{\omega^2}{g}\left(P_0 l + \frac{\gamma A l^2}{2}\right) = \frac{\omega^2 l}{g}(P_0 + 0{,}5\,P).$$

Dall'equazione di stabilità:

$$(16) \qquad kA = \frac{\omega^2 l}{g}(P_0 + 0{,}5\,P)$$

si può determinare il numero dei giri al minuto massimo ammissibile:

$$(17) \qquad n = \frac{30}{\pi}\,\omega = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{gkA}{l(P_0 + 0{,}5\,P)}}.$$

L'allungamento del braccio per la massima velocità angolare consetita, tenuto conto che e $\varepsilon_x = N_x : EA$, vale:

$$(18) \qquad \Delta l = \int_0^l \varepsilon_x\,dz = \frac{\omega^2}{EAg}\int_0^l \left[P_0 l + \gamma A z (l - 0{,}5\,z)\right] dz = \frac{\omega^2 l^2}{EAg}\left(P_0 + \frac{P}{3}\right).$$

Ove manchi l'espansione terminale ($P_0 = 0$), le (17) e (18) divengono rispettivamente:

$$(17') \qquad n = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{2gkA}{Pl}} = \frac{30}{\pi l}\sqrt{\frac{2gk}{\gamma}},$$

$$(18') \qquad \Delta l = \frac{\omega^2 l^2}{3EAg}\,P = \frac{2kl}{3E}.$$

9 — Trave di ugual resistenza.

La resistenza della trave prismatica precedentemente studiata è utilizzata completamente soltanto nella sezione pericolosa; in ogni altra sezione, essendo $N_x < N_0 + P$, la tensione normale, come si rileva dalla (10), rimane minore del carico di sicurezza; è in altri termini $\sigma_x = N_x : A < k$.

Ci proponiamo ora di far variare l'area della sezione trasversale in modo da soddisfare alla:

$$(19) \qquad k = N_x : A_x$$

in tutte le sezioni della trave. Un solido soddisfacente a tale condizione dicesi di *ugual resistenza a forza normale.*

Imponendo la (19) nelle sezioni di ascisse z e $z+dz$, avremo (fig. 32):

$$k A_x = N_x \quad , \quad k(A_x + dA_x) = N_x + dN_x \ ;$$

sottraendo poi la prima dalla seconda e tenendo presente la prima delle (8) si ottiene:

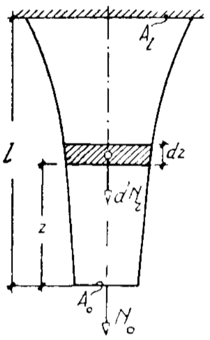

Fig. 32

$$k\, dA_x = dN_x = p_x\, dz \tag{20}$$

avendo indicato con p_x l'intensità del carico assiale in corrispondenza del tronco elementare considerato. Se questo carico proviene unicamente dal peso proprio, detta γ la densità, per cui sia $p_x = \gamma A_x$, sostituendo nella (20), avremo ancora:

$$k\, dA_x = \gamma\, A_x dz \ , \tag{21}$$

e, separando le variabili:

$$\frac{dA_x}{A_x} = \frac{\gamma}{k}\, dz \ . \tag{22}$$

Integrando si ha:

$$\lg A_x = \frac{\gamma}{k}\, z + C \ ,$$

e osservando che per $z=0$ è $\lg A_0 = C$, con A_0 area della sezione caricata, anche:

$$\lg \frac{A_x}{A_0} = \frac{\gamma}{k}\, z \ .$$

Passando ai numeri, si trae:

$$A_x = A_0\, e^{\frac{\gamma}{k} z} \ .$$

e infine, per essere $A_0 = N_0 / k$:

$$A_x = \frac{N_0}{k}\, e^{\frac{\gamma}{k} z} \ . \tag{23}$$

Si conclude che, se le sezioni variano con la legge di omotetia, il profilo del solido è costituito da curve logaritmiche.

Il volume della trave vale:

$$V = \int_0^l A_x\, dz \ ,$$

e per la (21):

$$V = \frac{k}{\gamma} \int_{A_0}^{A_l} dA_x = \frac{k}{\gamma} (A_l - A_0) \ , \tag{24}$$