

Per il coefficiente β possono assumersi i valori seguenti:

	Acciaio	Ghisa	Legno
$\beta =$	0,00014	0,00070	0,00023

Se si pone k'' in luogo di σ'' , si ottiene il carico P che la trave può sopportare di punta con tutta sicurezza:

$$(571) \quad P = \frac{k'' A}{1 + \beta \lambda^2}.$$

Giova avvertire che il coefficiente β varia in realtà anche con la snellezza; l'esperienza nondimeno dimostra che l'applicazione della formula dà in generale sufficiente affidamento di sicurezza.

102 — Il metodo omega.

Molto diffuso, specie tra i progettisti di opere metalliche, è il *metodo omega* introdotto dalle ferrovie prussiane.

Esso consiste nel maggiorare il carico effettivo P , moltiplicandolo per un coefficiente ω maggiore dell'unità, variabile con la snellezza della trave.

Rispetto al nuovo carico:

$$(572) \quad P^* = P \omega,$$

il *proporzionamento si eseguisce come se l'asta fosse cimentata a compressione semplice*, cioè usando l'equazione di stabilità:

$$(573) \quad k'' = \frac{P^*}{A} = \frac{P \omega}{A}.$$

Poichè il proporzionamento diretto al carico di punta richiederebbe:

$$(574) \quad \frac{\sigma_k}{v} = \frac{P}{A},$$

dev'essere:

$$(575) \quad \omega = \frac{k'' v}{\sigma_k}.$$

Stabilito il procedimento cui riferirsi per valutare le pressioni critiche $\sigma_k(\lambda)$, in campo plastico, i coefficienti ω possono calcolarsi per una conveniente gradazione di valori di λ e consegnarsi in apposite tabelle.

Per usuale acciaio da costruzione con carico di snervamento intorno a 24 kg/mm^2 e resistenza di circa 37 kg/mm^2 , il metodo ω originale assume la pressione critica (fig. 204):

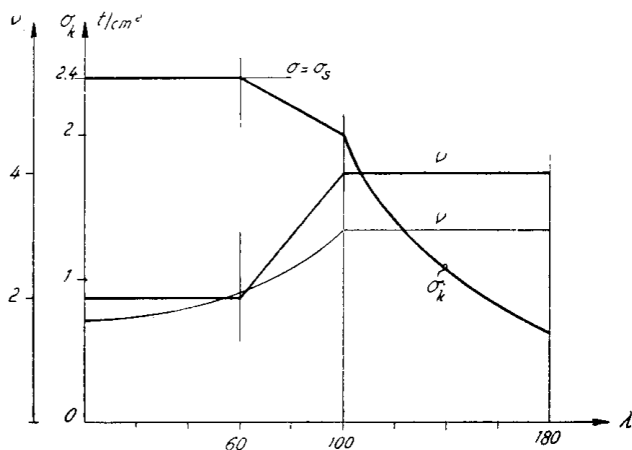


Fig. 204

variabile secondo la formula di Eulero, per snellezze $\lambda \geq 100$,
 costante ed uguale al carico di snervamento, per snellezze $\lambda \leq 60$,
 variabile linearmente, nell'intervallo $60 < \lambda < 100$.
 Il coefficiente di sicurezza si mantiene costante ed uguale a 4 nel campo elastico, oppure costante ed uguale a 2 per snellezze comprese fra 0 e 60, variabile linearmente con λ nel tratto intermedio. Talvolta si fa variare ν secondo la legge più complessa rappresentata in fig. 204 con linea a tratto sottile.

103 — Criterio energetico sull'instabilità.

Se è possibile scrivere ed integrare l'equazione differenziale della trave deformata, come nei casi fin qui esaminati, la determinazione del carico critico può farsi in modo diretto. Ma quando la trave è a sezione variabile o quando il carico assiale sia distribuito lungo l'asse, anzichè applicato agli estremi, le difficoltà analitiche del metodo diretto consigliano di ricorrere a procedimenti indiretti suscettibili di fornire con relativa semplicità almeno un valore approssimato del carico critico.

a) Metodo di Bryan-Timoshenko.

Si supponga impressa al sistema una deformazione virtuale che sposti l'asse geometrico della trave dalla sua configurazione iniziale rettilinea, e si calcoli l'energia potenziale elastica Φ_v ad essa corrispondente (fig. 205). Se con Δl_v indichiamo lo spostamento che nella deformazione virtuale il punto B subisce nella direzione del carico P , questo, che agisce con tutta la sua intensità mentre si compie la deformazione supposta, produce il lavoro $P\Delta l_v$.

Se è $P\Delta l_v < \Phi_v$, l'equilibrio è stabile; se invece è $P\Delta l_v > \Phi_v$, l'equi-

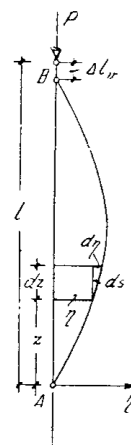


Fig. 205

librio è instabile, sicchè una deformazione infinitamente piccola, che s'inizi per l'intervento di una causa qualsiasi, andrà accrescendosi indefinitamente in virtù del lavoro prodotto dal carico.

I due regimi sono separati da un stato intermedio caratterizzato dall'uguaglianza:

$$P \Delta l_v = \Phi_v ,$$

che permette di calcolare il carico critico:

$$(576) \quad P_k = \frac{\Phi_v}{\Delta l_v} .$$

Evidentemente influisce sul risultato il tipo di deformazione impressa; il metodo conduce anzi a un valore di P_k sempre superiore a quello esatto. Si osservi infatti che l'attribuire alla trave un determinato tipo di deformazione equivale a limitarne la deformabilità o, in altri termini, ad imporle vincoli supplementari, ciò che necessariamente ne accresce la stabilità. Il massimo di deformabilità compete alla deformazione effettiva, corrispondente al valore esatto del carico critico.

Un'idea dell'approssimazione conseguibile con questo metodo si può trarre dal confronto dei carichi critici corrispondenti a diversi tipi di deformazione virtuale, volendo poi migliorare l'approssimazione, si possono imprimere alla trave più deformazioni simultanee e fare dipendere la linea elastica relativa a ciascuna deformazione da un parametro di cui si disporrà per rendere minimo il carico critico cercato; questo valore sarà più piccolo dei carichi critici corrispondenti a ciascuna deformazione, e pertanto più prossimo al valore esatto.

* * *

Nel caso d'una trave incernierata alle estremità, supponiamo che la deformazione virtuale conduca alla linea elastica indicata in fig. 205, di cui siano η l'ordinata ed M il momento flettente all'ascissa z , corrispondenti allo stato di sollecitazione capace di mantenere la deformazione supposta.

Se prescindiamo dal taglio, l'energia potenziale elastica è:

$$\Phi_v = \int_0^l \frac{M^2 dz}{2 EJ} .$$

o, per essere $M = - EJ \frac{d^2 \eta}{dz^2}$, anche:

$$(577) \quad \Phi_v = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 \eta}{dz^2} \right)^2 dz .$$

Lo spostamento Δl_v vale la differenza di lunghezza tra l'asse deformato e la sua corda, ossia, con le notazioni della figura:

$$\Delta l_v = \int_0^l (ds - dz) = \int_0^l \left(\sqrt{dz^2 + d\eta^2} - dz \right) = \int_0^l \left[\sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2} - 1 \right] dz ,$$

o ancora,, sviluppando in serie il radicale ed arrestando lo sviluppo al secondo termine:

$$(578) \quad \Delta l_v = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2 dz .$$

Applicando la (576), avremo pertanto:

$$(579) \quad P_k = E \frac{\int_0^l J \left(\frac{d^2\eta}{dz^2} \right)^2 dz}{\int_0^l \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2 dz} .$$

Se il fenomeno dell'inflessione laterale si produce nel periodo plastico, sostituiamo al modulo d'elasticità normale E il modulo T corrispondente alla tensione critica σ_k .

b) *Metodo di Zanaboni.*

Alla (576), caratterizzante l'instabilità, può darsi la forma:

$$(580) \quad L_i = \Phi_v ,$$

nella quale, in luogo del *lavoro esterno* $P_k \Delta l_v$, figura il *lavoro interno* che il carico critico compie nel cambiamento di configurazione imposto al sistema.

Il metodo basato sull'applicazione della (580) presenta sul precedente il vantaggio di non richiedere la conoscenza degli spostamenti Δl_v , di scomoda determinazione, trattandosi d'infinitesimi del secondo ordine di regola trascurati. Si dimostra inoltre che il metodo del lavoro interno conduce ad un'approssimazione maggiore, che può d'altronde anche qui migliorarsi a piacimento (1).

(1) O. ZANABONI. *La determinazione dei carichi critici per mezzo del principio dei lavori virtuali.* Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Vol. XXI, serie 6^a Roma, 1935. Cfr. anche, dello stesso Autore: *Il metodo del lavoro interno per il calcolo approssimato dei carichi critici.* Ricerche d'ingegneria, Roma, 1936.

* * *

Applichiamo i metodi precedenti ad alcuni casi particolari:

1^o) Si voglia determinare il carico critico di una mensola prismatica caricata di punta.

Assumiamo dapprima come deformata plausibile la parabola:

$$\eta = C z^2 .$$

Il momento flettente corrispondente vale:

$$(581) \quad M_z = - EJ \frac{d^2 \eta}{dz^2} = - 2 C EJ$$

e l'energia:

$$(582) \quad \Phi_v = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 dz}{EJ} = 2 C^2 EJ l .$$

D'altra parte, essendo $d\eta/dz = 2 Cz$, la (578) porge:

$$\Delta l_v = \frac{2}{3} C l^3 .$$

Applicando il primo criterio energetico avremo pertanto:

$$(583) \quad P_k = \frac{3 EJ}{l^2} .$$

Il lavoro interno è quello corrispondente ai momenti flettenti:

$$(584) \quad m_z = P_k (f - \eta) = P_k C (l^2 - z^2) ,$$

cioè:

$$L_i = \frac{C P_k}{2 EJ} \int_0^l (l^2 - z^2)^2 dz = \frac{4}{15} \frac{C^3 P_k^2 l^5}{EJ} .$$

Tenuta presente la (582), l'applicazione della (580), relativa al secondo criterio, importa:

$$\frac{4}{15} \frac{C^3 P_k^2}{EJ} l^5 = 2 C^2 EJ l ,$$

cioè il valore critico:

$$(585) \quad P_k = \frac{EJ}{l^2} \sqrt{\frac{15}{2}} = 2,74 \frac{EJ}{l^2} .$$

Poichè il valore esatto, espresso dalla (548), è $P_k = 2,4674 EJ/l^2$, la (583) implica un errore del 22% circa, mentre quello che si commette applicando la (585) è circa la metà.

Per ottenere un'approssimazione migliore introduciamo un parametro arbitrario nell'espressione della deformata; poniamo ad esempio:

$$\eta = C \left(z^2 + m \frac{z^3}{l} \right).$$

In tal caso la (581) e la (582) divengono ordinatamente:

$$(581') \quad M_z = - 2 C E J \left(1 + \frac{3 m z}{l} \right),$$

$$(582') \quad \Phi_v = 2 C^2 E J l (1 + 3m + 3m^2).$$

L'inclinazione ora vale $d\eta/dz = C \left(2z + \frac{3mz^2}{l} \right)$, quindi:

$$\Delta l_v = \frac{C^2 l^3}{30} (20 + 45m + 27m^2).$$

L'espressione del carico critico è dunque:

$$(586) \quad P_k = \frac{60 E J}{l^2} \frac{1 + 3m + 3m^2}{20 + 45m + 27m^2}.$$

Derivandola rispetto ad m ed uguagliando a zero, otteniamo:

$$m^2 + \frac{11}{9} m + \frac{5}{18} = 0,$$

donde:

$$m = - 0,3019.$$

Sostituendo nella (586), troviamo il valore:

$$(583') \quad P_k = 2,489 \frac{E J}{l^2}.$$

Col metodo del lavoro interno, avremo, in luogo della (584):

$$(584') \quad m_z = P_k C \left[(l^2 - z^2) + \frac{m}{l} (l^3 - z^3) \right]$$

e di conseguenza:

$$L_i = \frac{C^2 P^2 l^3}{2 EJ} \left(\frac{8}{15} + \frac{7}{6} m + \frac{9}{14} m^2 \right).$$

Applicando la (584) e risolvendo, si trova:

$$(586') \quad P_k = \frac{2 EJ}{l^2} \sqrt{\frac{1 + 3m + 3m^2}{\frac{8}{15} + \frac{7}{6} m + \frac{9}{14} m^2}}.$$

La solita condizione di minimo porge ora:

$$m^2 + \frac{67}{55} m + \frac{91}{330} = 0,$$

donde:

$$m = -0,3005.$$

Sostituendo nella (586'), si ottiene infine:

$$(585') \quad P_k = 2,477 \frac{EJ}{l^2}.$$

L'errore si è così ridotto a circa lo 0,9% per il primo, ed a circa lo 0,4% per il secondo metodo.

20) Si voglia determinare il carico critico d'una trave incernierata agli estremi, il cui momento d'inerzia vari, tra un massimo in mezzeria ed il valore zero alla estremità, secondo la legge parabolica (fig. 206):

$$J = J_0 \left[1 - \left(\frac{\zeta}{a} \right)^2 \right].$$

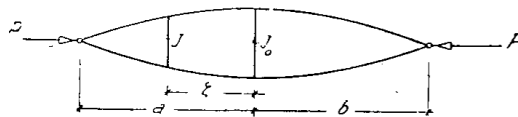


Fig. 206

Imprimiamo alla trave la deformazione che vi produrrebbe un carico flettente uniformemente ripartito. Osservando che il momento nella sezione generica, detta C una costante opportuna, sarebbe per tale carico:

$$M = C \left[1 - \left(\frac{\zeta}{a} \right)^2 \right],$$

si ricava, per il lavoro di deformazione dovuto alla flessione, il valore:

$$\Phi_v = 2 \int_0^a \frac{M^2 d\zeta}{2 EJ} = 2 \frac{C^2}{2 EJ_0} \int_0^a \left[1 - \left(\frac{\zeta}{a} \right)^2 \right] d\zeta = C^2 \frac{2}{3} \frac{a}{EJ_0}.$$

D'altra parte la (578) può scriversi:

$$\Delta l_v = \int_0^a \left(\frac{d\eta}{d\zeta} \right)^2 d\zeta ,$$

o anche, ricordando che $\frac{d\eta}{d\zeta}$ è la rotazione $\varphi\zeta = \int_0^\zeta \frac{M}{EJ} d\zeta = \frac{C}{EJ_0} \zeta$ della sezione di ascissa ζ :

$$\Delta l_v = \frac{C^2}{E^2 J_0^2} \int_0^a \zeta^2 d\zeta = \frac{C^2}{E^2 J_0^2} \frac{a^3}{3} .$$

Applicando la (576), avremo pertanto:

$$(587) \quad P_k = 2 \frac{EJ_0}{a^2} = 8 \frac{EJ_0}{l^2} .$$

È facile constatare che il metodo del lavoro interno conduce parimenti alla (587). Ciò prova che il valore determinato è quello esatto, cioè che la deformata considerata è quella che effettivamente compete alla trave sotto il primo carico critico.

3°) Applicheremo infine il primo criterio energetico allo studio della stabilità elastica d'una trave prismatica, incastrata ad un estremo, soggetta ad un carico assiale distribuito uniformemente d'intensità q per metro lineare (fig. 207).

Consideriamo come deformazione virtuale della trave quella cui corrisponde per la linea elastica il quarto d'onda di senoide:

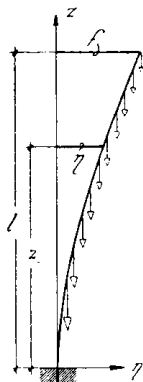


Fig. 207

$$\eta = f \left(1 - \cos \frac{\pi}{2l} z \right) .$$

Sarà allora:

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{f\pi}{2l} \sin \frac{\pi z}{2l} , \quad \frac{d^2\eta}{dz^2} = \frac{f\pi^2}{4l^2} \cos \frac{\pi z}{2l} ,$$

e perciò, dalla (577):

$$\Phi_v = \frac{1}{2} EJ \left(\frac{f\pi^2}{4l^2} \right)^2 \int_0^l \cos^2 \frac{\pi z}{2l} dz = \frac{f^2 \pi^4}{64l^3} EJ .$$

D'altra parte il lavoro esterno, che nel caso precedente era espresso dal prodotto $P \Delta l_v$, vale ora:

$$L_e = \int_0^l q(l-z) \frac{1}{2} \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2 dz = \frac{q}{2} \frac{f^2 \pi^2}{4l^2} \int_0^l (l-z) \sin^2 \frac{\pi z}{2l} dz ,$$

e integrando:

$$L_e = \frac{q}{8} f^2 \pi^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right).$$

Uguagliando il lavoro esterno all'energia potenziale elastica, risulta il carico critico per metro lineare:

$$(588) \quad q_k = \frac{\pi^2 EJ}{1,19 l^3}.$$

Per migliorare l'approssimazione poniamo:

$$\eta = a_1 \left(1 - \cos \frac{\pi z}{2l} \right) + a_2 \left(1 - \cos \frac{3\pi z}{2l} \right),$$

ciò che è in armonia con le condizioni ai limiti $(\eta)_{z=0} = 0$, $(d\eta/dz)_{z=0} = 0$.
Con ciò si ottiene:

$$(589) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1 = \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left(\frac{d^2 \eta}{dz^2} \right)^2 dz = \frac{\pi^4 EJ}{64 l^3} (a_1^2 + 81 a_2^2); \\ L_e = \frac{1}{2} \int_0^l q (l-z) \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2 dz = \frac{q\pi^2}{8} \left[a_1^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right) + a_2^2 \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right) + \frac{6}{\pi^2} a_1 a_2 \right]. \end{array} \right.$$

Scritta la:

$$(590) \quad q_k = EJ \frac{\int_0^l \left(\frac{d^2 \eta}{dz^2} \right)^2 dz}{\int_0^l \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2 (l-z) dz},$$

disponiamo di a_1 e a_2 in modo che q_k risulti minimo; imponiamo cioè:

$$\frac{\partial q_k}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial q_k}{\partial a_2} = 0.$$

La prima di queste equazioni:

$$\int_0^l \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2 (l-z) dz \frac{\partial}{\partial a_1} \int_0^l \left(\frac{d^2 \eta}{dz^2} \right)^2 dz - \int_0^l \left(\frac{d^2 \eta}{dz^2} \right)^2 dz \frac{\partial}{\partial a_1} \int_0^l \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2 (l-z) dz = 0,$$

con riguardo alla (590), può anche scriversi:

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \int_0^l \left(\frac{d^2 \eta}{dz^2} \right)^2 dz - \frac{q_k}{EJ} \frac{\partial}{\partial a_1} \int_0^l \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2 (l-z) dz = 0.$$

Similmente si ottiene l'altra equazione:

$$\frac{\partial}{\partial a_2} \int_0^l \left(\frac{d^2 \gamma_1}{dz^2} \right)^2 dz - \frac{q_k}{EJ} \frac{\partial}{\partial a_2} \int_0^l \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2 (l-z) dz = 0 .$$

Sostituiti i valori dati dalle (589) ed eseguite le derivate, si perviene ad un sistema di equazioni lineari ed omogenee in a_1 e a_2 , la cui soluzione $a_1 = a_2 = 0$ individua la configurazione d'equilibrio ad asse rettilineo. La possibilità di altre soluzioni le quali compórtino l'inflessione della trave è legata all'annullarsi del determinante dei coefficienti; basterà allora sviluppare, uguagliare a zero e risolvere rispetto a q_k l'equazione che ne risulta: la più piccola tra le radici trovate sarà il carico critico cercato. Nell'esempio sopra trattato si otterrebbe il valore:

$$(591) \quad q_k = \frac{\pi^2 EJ}{1,25 l^3} ,$$

il quale differisce per meno del 5% da quello ottenuto più semplicemente con la (588).

* * *

La (579) si applica spesso introducendovi lo sviluppo in serie di seni dell'ordinata η della linea elastica.

Nel caso d'una trave di rigidità costante, incernierata e caricata agli estremi, ponendo:

$$(592) \quad \eta = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} \frac{k \pi z}{l} ,$$

sarebbe:

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{\pi}{l} \sum_{k=1}^{\infty} a_k k \cos \frac{k \pi z}{l} \quad , \quad \frac{d^2 \eta}{dz^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k k^2 \operatorname{sen} \frac{k \pi z}{l} .$$

Siccome poi gli integrali:

$$\int_0^l \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{n \pi z}{l} dz \quad , \quad \int_0^l \cos \frac{m \pi z}{l} \cos \frac{n \pi z}{l} dz ,$$

sono nulli per $m \neq n$ e valgono $l/2$ per $m = n$, sostituendo nella (592) si

ottiene:

$$(593) \quad P_k = \frac{\pi^2 EJ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 k^4}{l^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 k^2}.$$

Limitando entrambe le serie al primo termine si ritrova la (551), esprime il carico euleriano.

104 — Metodo grafico di Vianello.

Quando il metodo analitico non sia praticamente applicabile causa la complessità della legge con cui varia il momento d'inerzia della trave o con cui è distribuito il carico assiale, sempre che l'instabilità dell'equilibrio si verifichi nel periodo elastico, può usarsi con vantaggio il seguente metodo grafico.

Si attribuisca alla trave una linea elastica avente l'andamento che si ritiene probabile per la deformata corrispondente al primo carico critico.

Fissate così le inflessioni, potremo valutare i momenti flettenti dovuti ai carichi applicati. Dal diagramma di questi momenti, passando eventualmente a quello delle curvature, si costruisca, per esempio col metodo di Mohr, la linea elastica che la trave assumerebbe se fosse in equilibrio.

Supposto che la deformata così ottenuta e quella assunta in partenza risultino affini, esse corrispondono ad uno stato di equilibrio possibile della trave, ed il carico critico è quello atto ad assicurare l'identità delle loro ordinate.

Se le due curve non sono troppo diverse, un valore approssimato per eccesso del carico critico può già ottenersi dal confronto delle ordinate massime o medie.

In ogni caso si può migliorare l'approssimazione attraverso l'iterazione del procedimento, assumendo ogni volta come deformata preliminare quella ottenuta con la costruzione precedente.

* * *

Applichiamo il metodo ora spiegato alla determinazione del carico critico d'una mensola d'acciaio, costituita da due tronchi di uguale lunghezza, delle seguenti caratteristiche (fig. 208 a):

per il tronco adiacente all'estremo libero: $J_1 = 3575 \text{ cm}^4$, $A_1 = 105 \text{ cm}^2$;

per il tronco adiacente all'incastro: $J_2 = 7494 \text{ cm}^4$, $A_2 = 152 \text{ cm}^2$.

Il carico assiale P agisca suddiviso in due forze concentrate: una, $P_1 = P/3$, all'estremità dello sbalzo, l'altra $P_2 = 2P/3$, a metà lunghezza dell'asse.

Assumiamo come linea elastica plausibile quella rappresentata in fig. 208 b: ne sia ζ il rapporto d'affinità e supponiamola corrispondere ai carichi:

$$P_1 = 50 \text{ t} \quad , \quad P_2 = 100 \text{ t} .$$

Nel tratto CB_2 la stessa deformata rappresenta i momenti flettenti quando se ne leggano, nella scala del disegno, le ordinate a partire dalla fondamentale A_2B_2 e si assuma la base di riduzione (figura 208 c):

$$H = \frac{P_1}{\xi} = \frac{50'}{\xi} .$$

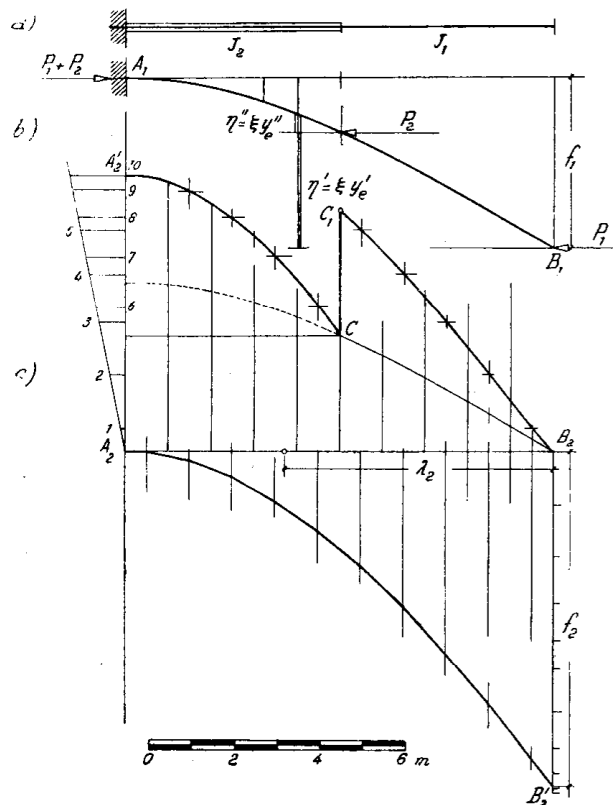


Fig 208

Nel tratto compreso tra il punto C e l'incastro bisognerà sommare alle ordinate della deformata, le quali, nella scala ora detta, misurano i momenti dovuti al carico P_1 , quelle relative al carico P_2 ; per una sezione qualsiasi del tratto, sarà:

$$M = P_1 r_1' + P_2 r_1'' ,$$

quindi:

$$y_m = \frac{\xi}{P_1} (P_1 r_1' + P_2 r_1'') = y_e' + \frac{P_2}{P_1} y_e'' ;$$

e nel caso presente:

$$y_m = y_e' + 2 y_e'' .$$

Completato col tratto $A_2'C$ il diagramma dei momenti, passiamo al diagramma delle curvature, che, con $J_0 = J_2$, resta limitato dalla linea $A_2'CC_1B_2$. Dividiamo questo diagramma in strisce verticali, valutiamone

le misure in base $\lambda_1 = 500$ cm e costruiamo la retta $B_2 B'_2$ delle forze-curvature. Volendo tracciare la linea elastica con lo stesso rapporto d'affinità ζ con cui è disegnata quella di partenza, dobbiamo fare, secondo la (44):

$$\lambda_2 = \frac{EJ_0}{H\lambda_1\zeta} = \frac{2100.7494}{\frac{50}{\xi} 500\zeta} = 630 \text{ cm} .$$

Se indichiamo con P_1^* e P_2^* i valori di prima approssimazione dei carichi corrispondenti allo stato critico, ottenuti dal confronto tra le frecce corrispondenti alle due deformate, avremo:

$$P_1^* = P_1 \frac{f_2}{f_1} = 50 \cdot \frac{4}{7,9} = 25,3 \text{ t} ,$$

$$P_2^* = 2 P_1 = 50,6 \text{ t} .$$

Come si è detto, l'approssimazione può essere migliorata quanto occorre, iterando il procedimento.

105 — Aste reticolari.

Il metodo energetico si presta bene allo studio del carico di punta delle *aste reticolari*, membrature di talune grandi costruzioni metalliche, rispondenti agli schemi della fig. 209.

Supposta dapprima l'asta a parete piena, calcoliamone l'energia potenziale corrispondente ad una deformazione virtuale, tenendo conto non soltanto della flessione, ma anche del taglio.

Notando che nella sezione generica il momento flettente vale $M = P\eta$, il taglio si può porre nella forma:

$$T = \frac{dM}{dz} = P \frac{d\eta}{dz} ,$$

sicchè, supposta la trave prismatica, potremo scrivere in luogo della (577):

$$\Phi_v = \frac{P^2}{2EJ} \int_0^l \eta^2 dz + \frac{\chi P^2}{2GA} \int_0^l \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2 dz ,$$

e, tenute presenti le (576) e (578):

$$\frac{P_k}{2} \int_0^l \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2 dz = \frac{P_k^2}{2EJ} \int_0^l \eta^2 dz + \frac{\chi P_k^2}{2GA} \int_0^l \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2 dz ;$$

risolvendo quest'ultima rispetto a P_k , si ottiene l'espressione del carico critico:

$$(594) \quad P_k = \frac{\int_0^l \left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2 dz}{\frac{1}{EJ} \int_0^l \eta^2 dz + \frac{\chi}{AG} \int_0^l \left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2 dz},$$

ovvero, applicando lo sviluppo in serie di seni (592), l'altra:

$$(595) \quad P_k = \frac{\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2}{\frac{l^2}{EJ} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + \frac{\chi \pi^2}{GA} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2}.$$

Per $k=1$ si ha il valore minimo:

$$(596) \quad P_k = \frac{1}{\frac{l^2}{\pi^2 EJ} + \frac{\chi}{GA}},$$

che, in funzione del carico euleriano P_E , posto $P_T = \frac{GA}{\chi}$, si suole scrivere:

$$(597) \quad P_k = \frac{1}{\frac{1}{P_E} + \frac{1}{P_T}} = P_E \frac{P_T}{P_E + P_T}.$$

Questa espressione prova che, se è trascurabile l'effetto del taglio

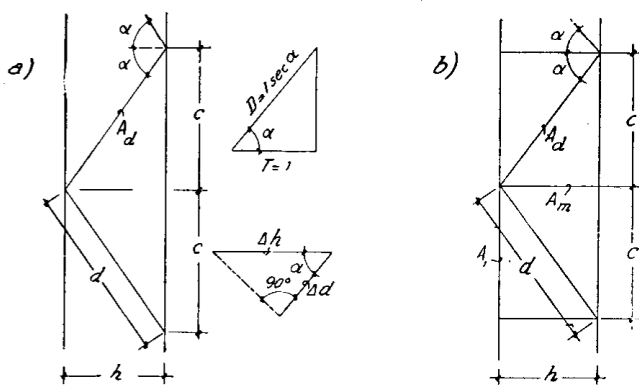


Fig. 209

— P_T molto grande rispetto a P_E — come si verifica di regola per le travi a parete piena, può ritenersi $P_k = P_E$.

La (597) serve bene alla valutazione del carico critico delle aste reticolari, la cui energia potenziale elastica si ottiene come somma di quella relativa alle aste di corrente e dell'altra dovuta alle aste di parete. La prima,

corrispondente alla sollecitazione di flessione, può ritenersi ancora misurata dal rapporto $\frac{1}{P_E} = \frac{l^2}{\pi^2 EJ_1}$ interpretando J_1 come momento d'iner-

zia della sezione dei correnti rispetto all'asse neutro della flessione laterale; la seconda, misurata dal rapporto $\frac{\chi}{GA}$ e corrispondente all'azione tagliante, vale lo scorrimento dovuto ad una forza di taglio unitaria e dipende dalle caratteristiche delle aste di parete.

Se il tipo costruttivo risponde alle caratteristiche dello schema di fig. 209 a, per un taglio uguale all'unità le diagonali, costituenti il *traliccio* dell'asta, sopportano gli sforzi:

$$D = 1/\cos \alpha = d/h$$

e subiscono allungamenti:

$$\Delta d = \frac{Dd}{EA_d} = \frac{d}{EA_d \cos \alpha},$$

o anche, osservando che è $d = c/\sin \alpha$:

$$\Delta d = \frac{c}{EA_d \sin \alpha \cos \alpha}.$$

Lo spostamento relativo dei nodi estremi d'una diagonale, nella direzione del taglio, sarà allora:

$$\Delta h = \frac{\Delta d}{\cos \alpha} = \frac{c}{EA_d \sin \alpha \cos^2 \alpha},$$

e lo scorrimento corrispondente:

$$\mathfrak{S} = \frac{\Delta h}{c} = \frac{d^3}{EA_d h^2 c}.$$

Con ciò l'espressione del carico critico diviene:

$$(598) \quad P_k = \frac{1}{\frac{l^2}{\pi^2 EJ} + \frac{d^3}{EA_d h^2 c}}.$$

Se oltre alle diagonali, la parete presenta traverse d'una certa robustezza (fig. 209 b), si aggiunge al denominatore della (598) il termine relativo a queste altre aste; osservando che lo sforzo sopportato dalle traverse è uguale al taglio $T=1$ e che pertanto lo spostamento relativo dei loro nodi d'estremità nella direzione del taglio, uguale all'allungamento delle tra-

verse, è h/EA_m , il termine aggiuntivo vale:

$$\mathfrak{D}' = h/EA c_m ;$$

il carico critico ha in tal caso l'espressione:

$$(599) \quad P_k = \frac{1}{\frac{l^2}{\pi^2 EJ_1} + \frac{d^3}{EA_d h^2 c} + \frac{h}{EA_m c}} .$$

Le (598) e (599) si trovano spesso nella forma data loro da F. Engesser:

$$(600) \quad P_k = \frac{P_E}{1 + \gamma P_E} ,$$

in cui P_E è il solito carico di Eulero e il coefficiente al denominatore vale:

$$(601) \quad \gamma = \frac{d^3}{A_d} \frac{1}{E c h^2}$$

nel caso di traliccio con sole diagonali,

$$(601') \quad \gamma = \left(\frac{d^3}{A_d} + \frac{h^3}{A_m} \right) \frac{1}{E c h^2}$$

nel caso di traliccio con diagonali e traverse.

Il momento d'inerzia che figura nell'espressione di P_E può valutarsi trascurando il momento d'inerzia di ciascun corrente rispetto al proprio asse baricentrico; per correnti simmetrici avremmo così:

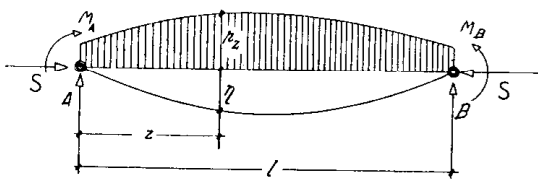


Fig. 210

$$J_1 = 2 A_1 \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} A_1 h^2 .$$

Come lunghezze delle aste di parete è lecito introdurre le distanze tra i punti più interni dei loro collegamenti ai correnti.

106 — Trave inflessa e caricata assialmente.

Consideriamo una trave AB poggiata agli estremi e cimentata dai momenti flettenti M_A ed M_B nelle sezioni d'estremità, da un carico flet-

tente p_z e da una forza assiale di compressione che ora indicheremo con S (fig. 210).

Sulla distribuzione dei momenti flettenti nella trave influisce l'eccentricità con cui il carico S agisce nelle diverse sezioni in conseguenza della deformazione.

Detto m_z il momento flettente nella sezione generica, calcolato prescindendo dalla deformazione, quello complessivo sarà:

$$M_z = m_z + S\eta .$$

Se S ed η sono abbastanza piccoli da poterne trascurare il prodotto rispetto ad m_z , le sezioni possono esser calcolate semplicemente per le caratteristiche S ed m_z , ma se la trave ha snellezza sotto un certo limite, le inflessioni η non sono più trascurabili rispetto alle dimensioni trasversali; se inoltre S è relativamente grande, il momento $S\eta$ può risultare dello stesso ordine di grandezza di m_z . In questo caso la ricerca delle sollecitazioni deve tenere conto della deformazione.

Derivando due volte l'espressione di M_z e tenendo presente la (9) avremo:

$$\frac{d^2 M_z}{dz^2} = - p_z + S \frac{d^2 \eta}{dz^2} ;$$

d'altra parte, derivando pure due volte la (30) si ha;

$$\frac{d^2 M_z}{dz^2} = - EJ \frac{d^4 \eta}{dz^4} ;$$

sicchè, eliminando $\frac{d^2 M_z}{dz^2}$ tra le precedenti:

$$(602) \quad \frac{d^4 \eta}{dz^4} + \frac{P}{EJ} \frac{d^2 \eta}{dz^2} - \frac{p_z}{EJ} = 0 .$$

Posto, come abbiamo fatto al n° 30:

$$EJ\eta = c_m \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{l} ,$$

la (602) si può scrivere:

$$p_z = \frac{\pi^4}{l^4} m^4 c_m \frac{m^2 \pi^2 EJ - Sl^2}{m^2 \pi^2 EJ} \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{l} ;$$

se poi si può sviluppare il carico nella solita serie di seni:

$$p_z = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l},$$

che potremo scrivere nella forma:

$$p_z = \frac{\pi^4}{l^4} \sum_{k=1}^{\infty} k^4 c_k \frac{k^2 \pi^2 EJ - Sl^2}{k^2 \pi^2 EJ} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}$$

purchè si ponga il generico dei coefficienti:

$$a_k = \frac{\pi^4}{l^4} k^4 c_k \frac{k^2 \pi^2 EJ - Sl^2}{k^2 \pi^2 EJ},$$

l'equazione della linea elastica in termini finiti diviene:

$$(603) \quad EJ\eta = \frac{l^4}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^2} \frac{\pi^2 EJ}{k^2 \pi^2 EJ - Sl^2} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}.$$

Da questa, derivando due volte, si ottiene il momento flettente:

$$M_z = \frac{l^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\pi^2 EJ}{k^2 \pi^2 EJ - Sl^2} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l},$$

ovvero, introducendo il carico di Eulero S_E :

$$(604) \quad M_z = \frac{l^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{S_E}{k^2 S_E - S} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}.$$

Per un carico uniformemente ripartito d'intensità p , con riguardo alla (175), avremmo:

$$(605) \quad M_k = \frac{4}{\pi^2} pl^2 \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{S_E}{k^2 S_E - S} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l},$$

e, in mezzeria, il momento massimo:

$$M_c = \frac{4}{\pi^2} pl^2 \left(\frac{S_E}{S_E - S} - \frac{1}{3} \frac{S_E}{9 S_E - S} + \frac{1}{4} \frac{S_E}{25 S_E - S} - \dots \right)$$

Poichè in corrispondenza di questo punto la serie converge molto rapidamente, è sufficiente l'approssimazione data dal primo termine:

$$(606) \quad M_c = \infty \frac{4}{\pi^2} pl^2 \frac{S_E}{S_E - S};$$

esprimendo poi il momento in funzione di quello massimo $m_c = pl^2/8$ relativo al solo carico flettente, si ottiene la *formula di Perry*:

$$(607) \quad M_c = \infty m_c \frac{P_E}{P_E - P} .$$

* * *

Volendo porre in evidenza il contributo di sollecitazione cui la deformazione darebbe luogo all'ascissa generica, scriveremo:

$$(608) \quad M_z = m_z \pm S \eta ,$$

ove il segno negativo sta per sforzi di trazione e quello positivo per sforzi di compressione.

Tenuto conto della (603), avremo pertanto:

$$(609) \quad M_z = m_z \pm S \frac{l^4}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k^2} \frac{\pi^3}{k^2 \pi^2 EJ \pm Sl^2} \operatorname{sen} \frac{k \pi z}{l} =$$

$$= m_z \pm \frac{l^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k^2} \frac{S}{k^2 S_E \pm S} \operatorname{sen} \frac{k \pi z}{l} .$$

In generale la deformazione esalta o attenua il cimento flessionale, a seconda che il carico assiale sia di compressione o di trazione. Se S è indipendente da z , come qui è supposto, resta valida la sovrapposizione degli effetti del carico flettente.

L'errore che si commette applicando la (609) limitata al primo termine della serie è inferiore all'1% se è $S < 0$ (sforzo di compressione), perchè in tal caso il rapporto S_E/S è alquanto maggiore dell'unità; può invece raggiungere parecchie unità percentuali, e quindi condurre a momenti flettenti alquanto maggiori di quelli effettivi, se è $S > 0$ (sforzo assiale di trazione), perchè allora può risultare S_E/S alquanto minore dell'unità.

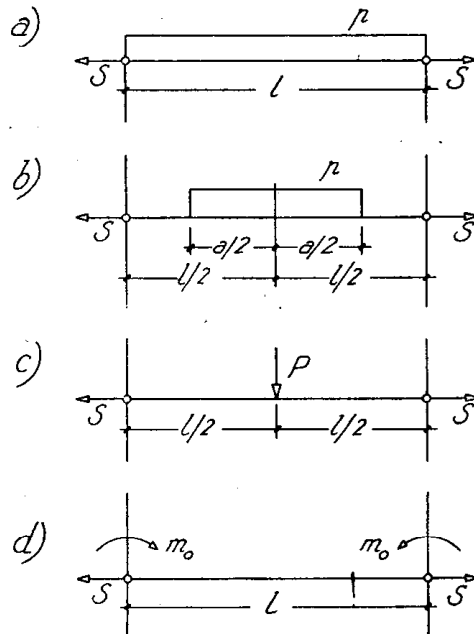


Fig. 241

Dalla (609), tenuto presente la (608), può trarsi l'inflessione:

$$(603') \quad \eta = \frac{l^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k^2} \frac{1}{k^2 S_E \pm S} \operatorname{sen} \frac{k \pi z}{l},$$

espressione che poteva anche ottenersi direttamente introducendo nella (603) il carico di Eulero.

Riportiamo qui appresso le espressioni esatte ed approssimate del momento flettente e dell'inflessione per le condizioni di carico più interessanti.

a) *Carico totale uniforme* (fig. 211 a):

$$(610) \quad M_z = m_z \pm \frac{4 p l^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^3} \frac{S}{k^2 S_E \pm S} \operatorname{sen} \frac{k \pi z}{l},$$

$$(611) \quad \eta = \frac{4 p l^2}{\pi^3} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^3} \frac{1}{k^2 S_E \pm S} \operatorname{sen} \frac{k \pi z}{l};$$

$$(610') \quad M_z = \approx m_z \pm \frac{4 p l^2}{\pi^2} \frac{S}{S_E \pm S} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}.$$

$$(611') \quad \eta = \approx \frac{4 p l^2}{\pi^3} \frac{1}{S_E \pm S} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}.$$

b) *Carico uniforme parziale simmetrico* (fig. 211 b):

Posto nella (179) $\zeta_1 = (l - a)/2$, $\zeta_2 = (l + a)/2$, per cui è $\alpha_k = \frac{4p}{k\pi} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{2l}$ avremo:

$$(612) \quad M_z = m_z \pm \frac{4 p l^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \frac{S}{k^2 S_E \pm S} \operatorname{sen} \frac{k \pi}{2} \operatorname{sen} \frac{k \pi a}{2l} \operatorname{sen} \frac{k \pi z}{l}.$$

$$(613) \quad \eta = \frac{4 p l^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \frac{1}{k^2 S_E \pm S} \operatorname{sen} \frac{k \pi}{2} \operatorname{sen} \frac{k a \pi}{2l} \operatorname{sen} \frac{k \pi z}{l};$$

$$(612') \quad M_z = \approx m_z \pm \frac{4 p l^2}{\pi^3} \frac{S}{S_E \pm S} \operatorname{sen} \frac{\pi a}{2l} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l},$$

$$(613') \quad \eta = \approx \frac{4 p l^2}{\pi^2} \frac{1}{S_E \pm S} \operatorname{sen} \frac{\pi a}{2l} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}.$$

c) *Carico concentrato in mezzeria* (fig. 211 c):

Ricordando la (180), che per $\zeta_l = l/2$ dà $a_k = \frac{2}{l} P \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2}$, otterremo:

$$(614) \quad M_z = m_z \pm \frac{2Pl}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \frac{S}{k^2 S_E \pm S} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l},$$

$$(615) \quad \eta = \frac{2Pl}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \frac{1}{k^2 S_E \pm S} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l};$$

$$(614') \quad M_z = \sim m_z \pm \frac{2Pl}{\pi^2} \frac{S}{S_E \pm S} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l},$$

$$(615') \quad \eta = \sim \frac{2Pl}{\pi^2} \frac{1}{S_E \pm S} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}.$$

d) Coppie uguali ed opposte alle estremità (fig. 211 d):

Detto m_o il momento delle coppie applicate, la (600) diviene:

$$M_z = - EJ \frac{d^2 \eta}{dz^2} = m_o \quad S \eta,$$

donde:

$$- EJ \frac{d^2 \eta}{dz^2} \pm S \eta = m_o.$$

Posto, al solito, $EJ \eta = c_k \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}$, avremo ancora:

$$\frac{\pi^2}{l^2} c_k k^2 \frac{k^2 S_E \pm S}{k^2 S_E} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} = m_o,$$

sicchè, introdotta la serie:

$$m_o = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l},$$

in cui è:

$$a_k = \frac{2m_o}{l} \int_0^l \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} dz = \frac{2m_o}{k\pi} (1 - \cos k\pi),$$

potremo scrivere:

$$EJ \eta = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l},$$

purchè si ponga :

$$c_k = \frac{l^2}{\pi^2} a_k \frac{S_E}{k^2 S_E \pm S}.$$

Per la linea elastica in termini finiti avremo pertanto :

$$(616) \quad \eta = \frac{4 m_o}{\pi} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{k^2 S_E \pm S} \operatorname{sen} \frac{k \pi z}{l},$$

e per il momento flettente :

$$(617) \quad M_z = m_o \left(1 \pm \frac{4}{\pi} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{S}{k^2 S_E \pm S} \operatorname{sen} \frac{k \pi z}{l} \right).$$

La solita approssimazione fornisce invece :

$$\eta = \sim \frac{4 m_o}{\pi} \frac{1}{S_E \pm S} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}, \quad M_z = \sim m_o \left(1 \mp \frac{4}{\pi} \frac{S}{S_E \pm S} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} \right).$$