

## CAPITOLO I

### FONDAMENTI DELLA TEORIA DELLE TRAVI

#### 1 — Defnizioni.

Dicesi *trave* un solido generato da un'area piana di forma e dimensioni variabili con continuità, la quale si muova nello spazio mantenendosi sempre normale alla traiettoria descritta dal suo baricentro. Diremo *asse geometrico* della trave tale traiettoria, *sezioni trasversali* le singole posizioni assunte dall'area generatrice nel suo movimento.

Escluderemo che due sezioni qualsiasi possano intersecarsi nell'interno del solido, ciò che esclude pure l'asse presenti punti doppi o cuspidi, o curvatura inferiore ad un certo limite. Ammetteremo inoltre che la lunghezza dell'asse sia prevalente sulle altre dimensioni.

L'asse può essere un segmento di retta, una linea a semplice od a doppia curvatura. Si dicono *travi ad arco* o semplicemente *archi* le travi ad asse curvo; in senso stretto la denominazione di trave viene riservata alle travi ad asse rettilineo.

Le caratteristiche geometriche della sezione trasversale: l'area  $A$ , i momenti d'inerzia principali  $J_x$ ,  $J_y$ , e polare  $J_o$ , variano in generale da sezione a sezione; quando esse rimangono invariate, la trave si dice a *sezione costante*.

Se l'asse della trave è contenuto in un piano al quale appartengano pure tutte le forze agenti sul sistema, la trave dicesi *piana*; in caso contrario essa dicesi *spaziale*.

## 2 — Modalità di carico e di vincolo.

Nonostante le forze esterne — carichi veri e propri e reazioni — agiscano notoriamente sugli elementi di massa o su quelli superficiali, riguarderemo di regola tali forze *ridotte all'asse*.

È facile rendersi conto in quale modo debba intendersi effettuata tale riduzione. Basta all'uopo considerare un tronco di trave limitato da due sezioni trasversali comprendenti sull'asse l'elemento generico di lunghezza  $\overline{AB}=ds$  e valutare la risultante  $dP$  ed il momento risultante  $dM$  rispetto ad  $A$  delle forze esterne applicate a detto tronco (fig. 1). Il sistema delle forze attive può quindi considerarsi sostituito dalle distribuzioni lungo l'asse dei vettori  $\frac{dP}{ds}$  e  $\frac{dM}{ds}$ .

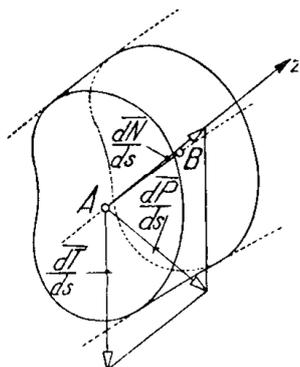


Fig. 1

Se poi di tali vettori si considerino ordinatamente e rispettivamente le componenti secondo la tangente  $z$  all'asse e secondo l'intersezione del piano della sezione trasversale per  $A$  con quello individuato da ciascun vettore e dall'asse  $z$ , alle due distribuzioni precedenti potremo sostituire quelle relative alle suddette componenti, cui daremo le seguenti denominazioni:

$$\begin{aligned} \text{componenti di } \frac{dP}{ds} & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{dN}{ds} & \text{intensità del carico assiale,} \\ \frac{dT}{ds} & \text{» » » tagliante;} \end{array} \right. \\ \text{componenti di } \frac{dM}{ds} & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{dM_o}{ds} & \text{» » » torcente,} \\ \frac{dM_s}{ds} & \text{» » » flettente.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

È chiaro ancora che in ciascuna sezione i carichi tagliante e flettente potranno scindersi nelle loro componenti secondo gli assi principali centrali d'inerzia.

Se nell'intorno di un dato punto dell'asse la distribuzione comporta intensità di carico relativamente grandi, nello spirito del postulato di Saint-Venant sostituiremo alla distribuzione effettiva il carico concentrato ad essa staticamente equivalente. In particolare tradurremo costantemente in forze concentrate le reazioni degli ordinari vincoli, benché esse in-

teressino di regola porzioni finite di superficie e di conseguenza anche segmenti di asse di lunghezza finita (fig. 2).

Con queste convenzioni, date le leggi di variazione lungo l'asse delle caratteristiche geometriche delle sezioni trasversali ed ammesso di poter prescindere in prima approssimazione dagli effetti delle distribuzioni di carico localizzate, in particolare della distribuzione del carico nel senso trasversale, lo studio di una trave può essere basato sopra uno schema costituito dall'asse, dai carichi delle varie specie eventualmente concentrati in punti di esso e dai diagrammi esprimenti le leggi con cui variano lungo l'asse le varie specie di carichi ripartiti.

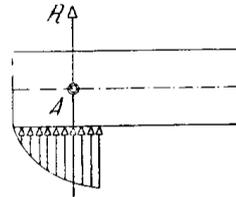


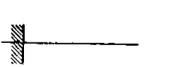
Fig. 2

\* \* \*

Gli ordinari vincoli delle travi, come sopra concepiti, possono ridursi ai seguenti tipi:

a) *nel piano*:

*appoggio semplice*. Vincola un punto dell'asse a muoversi su una linea fissa: un segmento di retta negli *appoggi scorrevoli*, un archetto di

TIPO DI VINCOLO	Schema	Numero delle condizioni di vincolo
Appoggio semplice . . . . .		1
Appoggio fisso o cerniera . . . . .		2
Incastro scorrevole . . . . .		2
Incastro fisso . . . . .		3

circonferenza negli appoggi pendolari. In assenza d'attrito la reazione è diretta secondo la normale alla linea di scorrimento;

*punto fisso o cerniera*. Immobilizza un punto dell'asse. Astraendo dall'attrito la reazione passa per il centro della cerniera; per definirla bisognerà darle due parametri. Si dice perciò che la cerniera impone due condizioni di vincolo, o, più brevemente, che essa costituisce un vincolo doppio;

*incastro.* Oltre a fissare una (incastro scorrevole) od entrambe (incastro fisso o semplicemente incastro) le coordinate del punto, vincola anche la direzione dell'asse nel punto ove il vincolo agisce. La reazione è definita da due o tre parametri, secondoché l'incastro sia scorrevole o, come sempre intenderemo in appresso, fisso.

I vincoli nel piano si rappresentano nel modo convenzionale indicato nel precedente specchio.

b) *nello spazio:*

*appoggio semplice con due gradi di libertà.* Vincola un punto dell'asse della trave nel piano normalmente al quale si svilupperebbe la reazione in assenza d'attrito; esso dà pertanto una condizione di vincolo;

*appoggio semplice con un grado di libertà.* Vincola un punto dell'asse ad una linea. Astraendo dall'attrito la reazione è contenuta nel piano normale a detta linea e occorreranno due parametri per definirla. Questo secondo appoggio implica perciò due condizioni di vincolo;

*appoggio fisso o cerniera sferica.* Immobilizza un punto dell'asse. Sempre in assenza d'attrito, la reazione passa per il centro della cerniera ed è funzione di tre parametri; l'appoggio fisso impone cioè tre condizioni di vincolo;

*incastro.* Fissa in generale tutte e tre le coordinate del punto e l'elemento piano appartenente alla sezione trasversale passante per esso. Se non è ostacolata la rotazione nel piano dell'elemento vincolato, l'incastro dicesi *girevole* ed equivale a cinque condizioni di vincolo; altrimenti esso è *completo* ed implica sei condizioni.

I vincoli spaziali si rappresentano schematicamente nel modo seguente:

TIPO DI VINCOLO	S c h e m a		Numero delle condizioni di vincolo
	Elevazione	Pianta	
Appoggio con due gradi di libertà . . . . .			1
Appoggio con un grado di libertà . . . . .			2
Appoggio fisso o cerniera sferica . . . . .			3
Incastro girevole . . . . .			5
Incastro completo . . . . .			6

La classificazione dei vincoli fatta con riguardo a tutte le possibili combinazioni dei parametri che si vogliono annullare, dei sei esponenti la mobilità dell'elemento superficiale baricentrico della sezione trasversale ove il vincolo è applicato, sarebbe molto più estesa, ma priva di particolare interesse.

In molti casi i parametri che definiscono le libertà di movimento alle quali i vincoli dovrebbero opporsi, anziché essere nulli, hanno un'espressione della forma:

$$(1) \quad \eta_c + f(P),$$

essendo il primo termine indipendente dai carichi, il secondo funzione di questi. Si dice allora *imperfetto* il vincolo semplice legato al parametro cui la (1) si riferisce.

Noi supporremo di regola che il secondo termine vari linearmente coi carichi, o ciò che equivale, con la reazione  $C$  del vincolo, a sua volta dipendente linearmente dal carico; la (1) prende allora la forma:

$$(2) \quad \eta_c + \varepsilon C.$$

Diremo il primo termine, ossia  $\eta_c$ , *cedimento anelastico*, il secondo termine *cedimento elastico* del vincolo. La costante  $\varepsilon$  misura ovviamente il cedimento elastico che il vincolo subisce quando esso risponde con una reazione uguale all'unità. Analogamente se il vincolo, anziché uno spostamento, ostacola una rotazione, scriveremo:

$$(3) \quad \vartheta_c + \mu M,$$

dove  $\vartheta_c$  esprime il cedimento angolare anelastico,  $M$  il momento con cui reagisce il vincolo,  $\mu$  la rotazione provocata da un momento  $M=1$ .

Se  $\eta_c$  ed  $\varepsilon$  ovvero  $\vartheta_c$  e  $\mu$  sono nulli, il vincolo dicesi *perfetto*.

### 3 — Caratteristiche della sollecitazione.

In una trave, in equilibrio sotto l'azione di un complesso di forze, supponiamo operato un taglio secondo una certa sezione trasversale  $S$  (fig. 3). Ciò in generale turberà l'equilibrio del sistema <sup>(1)</sup>, ma noi pos-

---

(1) Eccezionalmente ciascuno dei sistemi di forze applicate alle due porzioni di trave separate dalla sezione potrebbe essere equilibrato in sé; in tal caso sarebbe nulla la risultante delle azioni elementari trasmettenti nell'intera trave attraverso la sezione.

siamo sempre ripristinarlo applicando a ciascuna delle parti separate dal taglio il sistema di forze elementari mediante il quale nell'intera trave si

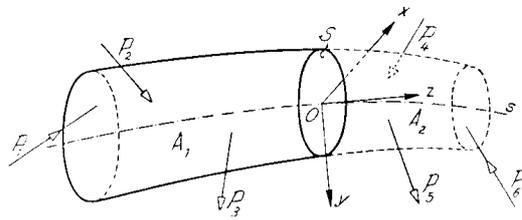


Fig. 3

esplicava sulla parte considerata l'azione dell'altra parte. Se per esempio consideriamo la porzione  $A_1$ , essa sarà in equilibrio sotto l'azione delle forze esterne  $P_1, P_2, P_3$ , ad essa applicate e delle forze elementari distribuite sulla faccia  $S_1$  del taglio,

che costituiscono l'azione prima esercitata dalla porzione  $A_2$  sulla  $A_1$ . In ogni caso, dunque, il complesso di forze elementari, cioè le tensioni che si sviluppano sulla faccia del taglio appartenente a una delle porzioni, per esempio alla  $A_1$ , deve equilibrare il sistema di forze  $P_1, P_2, P_3$ , applicate a detta porzione o, ciò che equivale, il loro risultante  $R_3$ .

Diremo tale risultante delle forze applicate alla porzione di solido considerata, *risultante relativo alla sezione S*, e *caratteristiche della sollecitazione relativa alla sezione S* i parametri di detto risultante rispetto alla terna di assi ortogonali costituita dagli assi principali d'inerzia  $x, y$  della sezione  $S$  e dalla normale ad essi,  $z$ .

Assumendo come centro di riduzione il baricentro  $O$  della sezione, le forze applicate alla porzione di solido considerata si potranno comporre, nel caso più generale, in una risultante  $R$  di traslazione passante per  $O$  ed in una coppia di momento  $M$  operante in un piano passante per lo stesso punto. Chiameremo le componenti di  $R$ :

- secondo  $z$ : forza normale . . .  $N$ ,
- »  $x$ : taglio . . .  $T_x$ ,
- »  $y$ : taglio . . .  $T_y$ ,

e quelle di  $M$ :

- secondo  $x$ : momento flettente  $M_x$ ,
- »  $y$ : » »  $M_y$ ,
- »  $z$ : » torcente  $M_o$ .

Si tratta delle caratteristiche già incontrate nello studio del problema di Saint-Venant, le quali conservano ancora qui le medesime denominazioni e lo stesso significato. Esse non hanno però più le leggi di variazione che avevamo riconosciute nella impostazione di quel problema relativo ad una trave particolarissima, ma dovranno ora considerarsi come funzioni affatto generiche di un nuovo parametro, quale ad esempio la lun-

ghezza dell'arco d'asse della trave compreso tra un punto arbitrario di questo, scelto come origine, ed il baricentro della sezione considerata.

\* \* \*

Particolarmente interessante è il caso della trave ad asse piano cimentata da forze contenute tutte nel piano del sistema, oppure simmetricamente distribuite rispetto a tale piano. In tal caso il risultante relativo ad una data sezione è certamente contenuto nel piano del sistema. Basterà allora costruire un poligono di successive risultanti considerando le forze nell'ordine stesso con cui s'incontrano percorrendo l'asse della trave, per determinare rapidamente le caratteristiche della sollecitazione relative ad una sezione qualunque.

Infatti la risultante  $R$  relativa ad una data sezione sarà misurata da un certo raggio proiettante  $P-3$  del poligono delle forze ed avrà per linea d'azione il corrispondente lato del poligono funicolare (fig. 4). Le due componenti  $N$  e  $T$  della  $R$ , rispettivamente normale e parallela alla traccia della sezione  $S$ , misurano la forza normale e il taglio per la sezione considerata; il momento flettente  $M$  si ottiene prendendo il momento di  $R$  rispetto al baricentro  $O$  della sezione, ovvero la somma dei momenti delle sue componenti  $N$  e  $T$ . Immaginando eseguita la decomposizione nel punto  $X$  in cui il risultante incontra il piano della sezione, ed osservando che in tal caso la componente  $T$  ha braccio nullo, avremo:

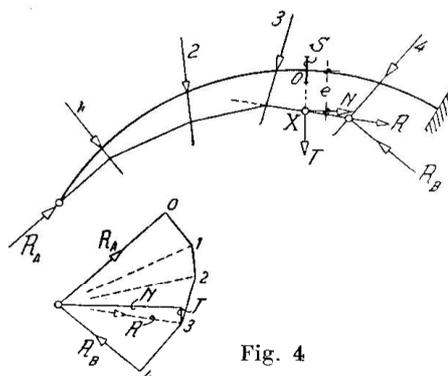


Fig. 4

essendo  $e$  l'eccentricità di  $X$ .

$$M = Ne,$$

essendo  $e$  l'eccentricità di  $X$ .

La coppia di momento  $M$  è la coppia risultante delle forze alla sinistra, assunto il punto  $O$  come centro di riduzione; poiché tutte le forze sono complanari, essa pure opera nel piano del sistema e perciò ha componente nulla nel piano normale: è cioè nullo in ogni caso il momento torcente.

In generale la sezione generica  $S$  essendo incontrata dal piano del sistema secondo un asse baricentrico  $s$  qualunque (fig. 5), tanto il taglio  $T$ , che il momento flettente  $M$  sono da riguardare come *deviati*, sicché le rispettive componenti  $T_x$  e  $T_y$ ,  $M_x$  ed  $M_y$  secondo gli assi principali

d'inerzia sono in generale diverse da zero: inclusa la forza normale  $N$ , le caratteristiche della sollecitazione non nulle sono allora in numero di cinque.

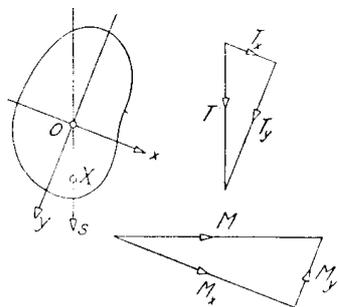


Fig. 5

Se invece, come si riscontra nella maggioranza dei casi, il piano del sistema incontra tutte le sezioni secondo un asse principale d'inerzia, il taglio  $T$  e il momento  $M$  sono *retti* e le caratteristiche si riducono a tre. Noi supporremo in generale questa condizione verificata.

Altre semplificazioni si hanno quando la trave, oltre ad essere piana, sia ad asse rettilineo e tutte le forze agiscano normalmente all'asse; questo caso formerà oggetto di una estesa trattazione particolare.

#### 4 — Estensione dei risultati del problema di Saint-Venant.

I quattro casi fondamentali del problema di Saint-Venant risolvono completamente quel problema, qualunque sia il sistema di forze applicate alle basi del cilindro, purché esse costituiscano un complesso in equilibrio. Potremo infatti in ogni caso scomporre il sistema di forze applicate, per esempio, alla base libera, nelle sei caratteristiche  $N$ ,  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_o$ , e dedurre i parametri della tensione e quindi della deformazione in un punto qualunque del cilindro, applicando il principio della sovrapposizione degli effetti ai casi particolari di sollecitazione donde risulta quello assegnato, seguendo cioè lo stesso metodo a suo tempo applicato per studiare i casi di sollecitazione composta.

Consideriamo ora una trave ad asse rettilineo e prismatica cementata da forze concentrate in equilibrio, e prendiamone in esame un tronco compreso tra due forze concentrate. Un simile tronco può indubbiamente essere assimilato nel suo comportamento al cilindro di Saint-Venant; basta solamente escludere quei punti che, per essere troppo prossimi alle sezioni estreme, risentono delle modalità — in generale diverse da quelle che sono postulate nel problema di Saint-Venant — con cui agiscono i sistemi di tensioni alle basi del tronco. In un punto sufficientemente lontano dalle sezioni estreme il postulato di Saint-Venant assicura essere invece priva d'influenza l'effettiva legge di distribuzione dei sistemi di tensione suddetti; potremo quindi determinare in esso lo stato di tensione applicando i risultati del problema di Saint-Venant, calcolare cioè le ca-

ratteristiche della sollecitazione relative alla sezione della trave passante per quel punto e introdurre i valori nelle formule che corrispondono al caso di sollecitazione semplice o composta di cui si tratta.

L'estensione del problema di Saint-Venant alle travi consiste nel considerare validi i risultati di quel problema, cioè nel ritenere lecita la determinazione dello stato di tensione nel modo ora indicato, *qualunque sia la posizione del punto del tronco considerato*. Se stabiliamo di prescindere dall'errore che tale estensione comporta, potremo grazie ad essa risolvere tutti i problemi relativi alle travi.

Basterà infatti osservare che ritenere quei risultati validi ovunque, e perciò anche nei punti infinitamente vicini alle sezioni limiti del tronco, equivale ad ammettere che la distribuzione delle tensioni in queste sezioni sia proprio quella postulata nel problema di Saint-Venant. Dopo ciò non è più necessario che la lunghezza del tronco sia ragguardevole rispetto alle dimensioni trasversali; essa potrà anche essere infinitesima. D'altra parte, se i risultati del noto problema sono applicabili a tutti i punti di un qualunque tronco prismatico compreso tra due forze concentrate, anche se di lunghezza infinitesima, essi valgono pure per le travi a sezione variabile, ancorchè soggette a carichi distribuiti, ossia per le travi del tipo più generale a suo tempo definito.

A parità di caratteristiche della sollecitazione, calcoleremo dunque lo stato di tensione in una sezione qualunque d'una trave al modo stesso che faremmo se la sezione appartenesse ad un cilindro sollecitato in modo conforme alle ipotesi di Saint-Venant.

Di tale procedimento non si può dare una giustificazione teorica, ma esso è sufficientemente confortato dai risultati dell'esperienza, almeno per i punti della trave non troppo prossimi a quelli ove sono applicati i carichi.

\* \* \*

Partendo dall'espressione della densità d'energia nel caso del problema di Saint-Venant:

$$\varphi = \frac{\sigma_z^2}{2E} + \frac{1}{2G}(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2),$$

ed esprimendo le tensioni in funzione delle caratteristiche della sollecitazione, ossia  $\sigma_x$  in funzione di  $N$ ,  $M_y$  ed  $M_x$ , e  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yx}$ , in funzione di  $T_x$ ,  $T_y$  ed  $M_o$ ; osservando poi che il lavoro di deformazione del tronco elementare di trave di lunghezza  $ds$  vale:

$$d\Phi_t = ds \int_A \varphi dA,$$

infine integrando per tutta la lunghezza  $s$  dell'asse geometrico, possiamo determinare il lavoro di deformazione totale della trave:

$$\Phi_t = \int_s d\Phi_t = \int_s ds \int_A \varphi dA .$$

Eseguiamo tale ricerca per il caso di una trave piana. Sarà allora (342/I e 302/I):

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{My}{J} \quad , \quad \tau_{ax} = 0 \quad , \quad \tau_{yx} = \tau = \frac{TS_r}{Jb_r} ;$$

sostituendo, la densità d'energia diviene:

$$\varphi = \frac{1}{2E} \left( \frac{N}{A} + \frac{My}{J} \right)^2 + \frac{1}{2G} \left( \frac{TS_r}{Jb_r} \right)^2 ,$$

e sarà quindi:

$$d\Phi = \frac{N^2 ds}{2EA^2} \int_A dA + \frac{M^2 ds}{2EJ^2} \int_A y^2 dA + \frac{NM}{EAJ} ds \int_A y dA + \frac{T^2 ds}{2GJ^2} \int_A \left( \frac{S_r}{b_r} \right)^2 dA ,$$

o anche, ricordando che:

$$\int_A dA = A \quad , \quad \int_A y^2 dA = J \quad , \quad \int_A y dA = 0 \quad , \quad \frac{1}{A\varphi^2} \int_A \left( \frac{S_r}{b_r} \right)^2 dA = \chi :$$

$$(4) \quad d\Phi_t = \frac{N^2 ds}{2EA} + \frac{M^2 ds}{2EJ} + \chi \frac{T^2 ds}{2GA} ;$$

dunque: *il lavoro di deformazione di un tronco elementare di trave è uguale alla somma dei lavori che nello stesso tronco produrrebbero le varie caratteristiche della sollecitazione agendo separatamente.*

Per tutta la trave sarà:

$$(5) \quad \Phi_t = \int_s \frac{N^2 ds}{2EA} + \int_s \frac{M^2 ds}{2EJ} + \int_s \chi \frac{T^2 ds}{2GA} .$$

Analogamente, per una trave spaziale avremo:

$$(6) \quad \Phi_t = \int_s \frac{N^2 ds}{2EA} + \int_s \frac{M^2 ds}{2EJ} + \int_s \chi \frac{T^2 ds}{2GA} + \int_s q \frac{M_o^2 ds}{2GJ_o} ,$$

espressione identica alla precedente, salvo il termine corrispondente alla torsione.

### 5 — Classificazione delle travi.

Come abbiamo precedentemente avvertito, rappresenteremo generalmente le travi in modo schematico, indicandone semplicemente l'asse geometrico ed i vincoli.

Una prima classificazione delle travi può essere fatta con riguardo alle condizioni di vincolo. Si distinguono le *travi staticamente determinate* dalle *iperstatiche*: per le prime bastano le equazioni della statica ad individuarne le reazioni di vincolo; per le altre tale determinazione richiede l'ausilio della teoria dell'elasticità.

Limitiamoci a considerare le travi piane più importanti. Sono travi staticamente determinate od isostatiche:

la *mensola*, che è una trave incastrata ad un estremo e del resto libera (fig. 6);

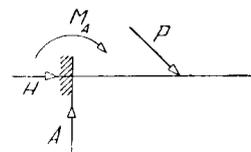


Fig. 6

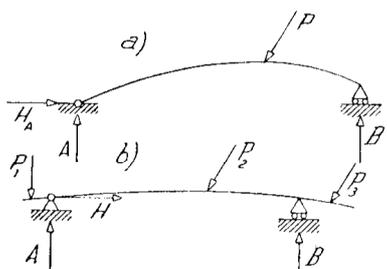


Fig. 7

la *trave semplice*, la quale ha due punti distinti dell'asse vincolati, l'uno con un appoggio fisso, l'altro con un appoggio semplice.

Gli appoggi possono vincolare gli estremi dell'asse (fig. 7 a) oppure altri punti; in questo secondo caso la trave dicesi *a sbalzi* (fig. 7 b).

Se i due punti vincolati sono infinitamente vicini l'uno all'altro, il loro complesso equivale ad un incastro, perché immobilizza una sezione e la tangente all'asse geometrico in corrispondenza di essa: il sistema degenera in due mensole ovvero in una mensola unica, secondoché la sezione immobilizzata sia intermedia o di estremità.

Sono invece *travi iperstatiche*:

a) con *semplice indeterminazione statica*:

la *trave incernierata agli estremi*, con due punti distinti dell'asse, ordinariamente gli estremi, vincolati a due appoggi fissi o cerniere (fig. 8 a);

la *trave incastrata ad un estremo e poggata in altro punto*, generalmente l'altro estremo (fig. 8 b);

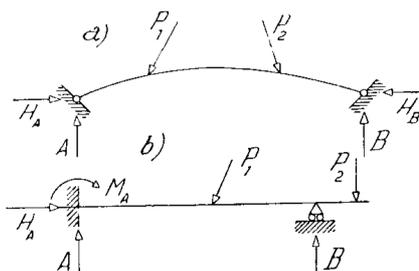


Fig. 8

b) con *trippla indeterminazione statica*:

la *trave incastrata agli estremi* (fig. 9).

La trave continua può avere gli estremi appoggiati (fig. 10 a) oppure incastrati (fig. 10 b), ed è sorretta in un certo numero di punti intermedi.

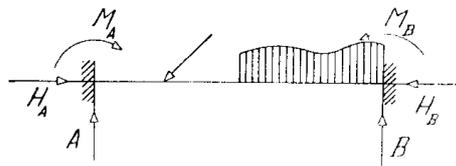


Fig. 9

Prende il nome di *campata* il tronco di trave compreso tra due appoggi consecutivi.

Se gli estremi sono poggianti, tutti gli appoggi sono semplici tranne uno (in generale verso il centro della trave) che è

fisso affinché il sistema possa reagire alle forze dirette parallelamente al piano di scorrimento, ordinariamente comune, degli altri appoggi. La trave è allora tante volte iperstatica, quanti sono gli appoggi intermedi, perchè in questo stesso numero sono le condizioni di vincolo sovrabbondanti. Se uno od entrambi gli estremi sono incastrati, tutti i rimanenti vincoli sono appoggi semplici; in tal caso si aggiungono due indeterminazioni in più per ogni incastro.

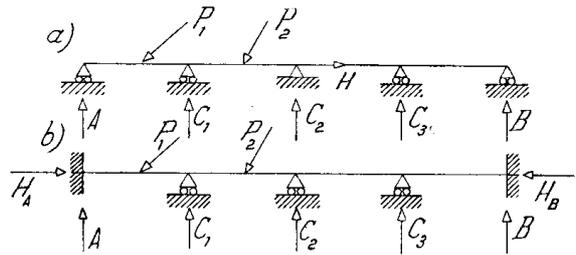


Fig. 10

## 6 — Sistemi principali delle travi iperstatiche.

Sia per lo studio delle travi iperstatiche, sia per meglio intendere la genesi di taluni sistemi resistenti, è necessario stabilire le modalità con cui una trave staticamente indeterminata per sovrabbondanza di vincoli

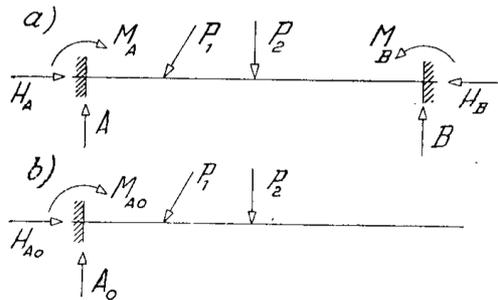


Fig. 11

può essere trasformata in un sistema isostatico, o come anche suol dirsi, ridotta a *sistema principale*.

Un primo metodo può ovviamente consistere nel modificare i vincoli in maniera da annullare tante condizioni di vincolo quante sono quelle sovrabbondanti; le componenti di reazioni che vengono annulate

mediate tale trasformazione prendono il nome di *incognite iperstatiche*.

Così la trave incastrata agli estremi (fig. 11 a), triplamente iperstatica, può essere ridotta a sistema principale sopprimendovi uno degli incastri, per esempio quello di destra (fig. 11 b): vengono in tal modo annullate le tre componenti di reazione B, M<sub>B</sub>, H<sub>B</sub>, le quali potranno essere riguardate come incognite iperstatiche. Il sistema principale è costituito dalla

mensola incastrata in  $A$ . Evidentemente, ove fossero conosciute le componenti delle reazioni iperstatiche, potremmo con l'ausilio dei soli mezzi della statica calcolare le altre componenti  $A$ ,  $M_A$ ,  $H_A$ , e, note queste, conosciute cioè tutte le forze sotto l'azione delle quali la trave trovasi in equilibrio, dedurre le caratteristiche della sollecitazione per una sezione qualunque.

Stabilito il grado di iperstaticità, è indifferente la scelta delle incognite iperstatiche, ossia delle componenti di reazione che si devono annullare per ridurre la trave a sistema principale, purché le rimanenti condizioni di vincolo non siano soltanto in apparenza nel numero voluto per la determinazione statica; esse devono cioè essere tra loro indipendenti, realmente staticamente determinato per modo che il sistema principale sia e non ipostatico.

Segue da ciò che una medesima trave iperstatica ammette in generale più di un sistema principale. Così nell'esempio già considerato della trave incastrata agli estremi, un secondo sistema principale sarebbe la menso-

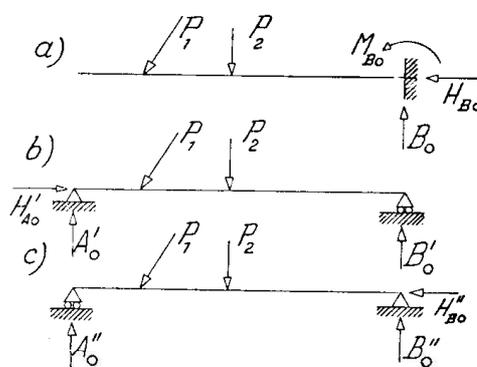


Fig. 12

la incastrata in  $B$  (fig. 12  $a$ ), con incognite iperstatiche  $A$ ,  $M_A$ ,  $H_A$ ; un terzo la trave semplice con un appoggio fisso in  $A$  ed uno scorrevole in  $B$  (fig. 12  $b$ ), con incognite iperstatiche  $M_A$ ,  $M_B$ ,  $H_B$ ; un quarto la trave semplice con vincoli simmetrici di quelli del sistema precedente, con incognite iperstatiche  $M_A$ ,  $M_B$ ,  $M_B$ ; (fig. 12  $c$ ).

Sarebbe invece errato ritenere un sistema principale della trave quello



Fig. 13

ultimo considerato, ma con appoggio semplice in  $A$  tale che la corrispondente reazione passasse per la cerniera  $B$  (fig. 13), ed assumere in conseguenza come incognite iperstatiche  $A$ ,  $M_A$ ,  $M_B$ . Un tale sistema è infatti ipostati-

co, perché i vincoli rimanenti sono in generale insufficienti a reagire alle forze sollecitanti la trave. L'equilibrio potrebbe soltanto sussistere nel caso particolarissimo che la risultante dei carichi passasse anch'essa per  $B$ .

Le indeterminazioni statiche finora considerate sono dette *esterne*, in quanto costituite da componenti di reazione dei vincoli sovrabbondanti. Ma si può ridurre una trave a sistema principale anche *annullando tante caratteristiche della sollecitazione fra quelle relative ad una o più sezioni, quante sono le indeterminazioni che essa presenta.*

Sempre limitandoci a considerare le travi piane, immaginiamo di operare un taglio in corrispondenza di una data sezione  $S$  d'una trave (fig. 14). L'equilibrio delle due porzioni così separate sarà certo ristabilito se applichiamo.

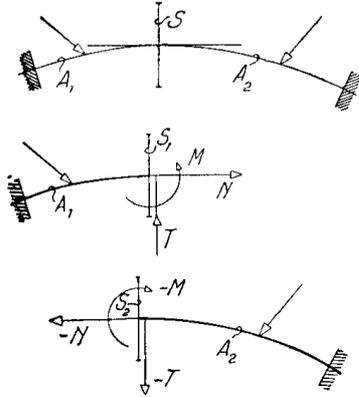


Fig. 14

alla faccia  $S_1$  del taglio le caratteristiche della sollecitazione  $N$ ,  $M$ ,  $T$ , calcolate con riguardo alle forze alla destra, in modo cioè che sostituiscano l'azione esercitata nell'intero solido dalla porzione  $A_2$  sulla  $A_1$ ;

alla faccia  $S_2$  le caratteristiche uguali ed opposte  $-N$ ,  $-M$ ,  $-T$ , le quali sostituiscono ovviamente l'azione prima esercitata dalla porzione  $A_1$  sulla  $A_2$ . Analoga operazione possiamo immaginare eseguita per quante altre si vo-

gliano sezioni del sistema, talché possiamo pensare la trave ridotta ad un complesso di tronchi indipendenti, ciascuno in equilibrio sotto l'azione delle forze esplicite ad esso applicate e delle caratteristiche della sollecitazione relative alle sezioni terminali (fig. 15).

E' facile intendere il significato dell'annullarsi di una di queste caratteristiche in corrispondenza di una data sezione.

Porre per esempio uguale a zero la caratteristica  $N$  significa interrompere la continuità della trave in corrispondenza della sezione considerata, in modo che le due porzioni separate dalla sezione non possano trasmettersi attraverso questa forze normali, pur essendo sempre assicurata la trasmissione di forze taglianti e di momenti flettenti. La figura 16a rappresenta lo schema di un dispositivo che potrebbe realizzare tale solidarietà parziale.

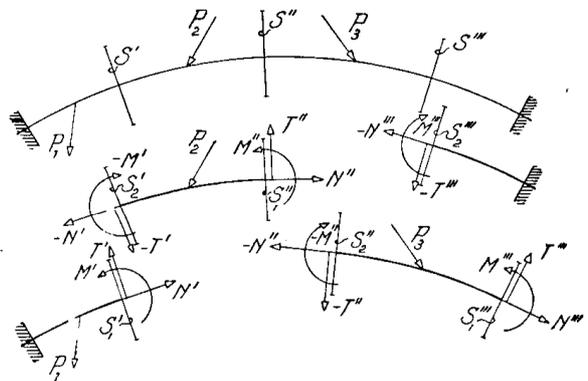


Fig. 15

Analoghi significati corrispondono all'annullarsi delle caratteristiche  $T$  (fig. 16b), o  $M$  (fig. 16c). In quest'ultimo caso la trave si comporta come se in corrispondenza della sezione fosse provvista di un'articolazione a cerniera capace di trasmettere forze normali e taglianti, ma non momenti.

Annullando poi due delle tre caratteristiche della sollecitazione relative alla sezione considerata, può farsi:

$N=M=0$ : il collegamento tra le due porzioni di trave separata dalla sezione permette la trasmissione esclusiva di forze taglianti (fig. 16 d);

$T=M=0$ : attraverso la sezione non possono trasmettersi che le forze normali (fig. 16 e);

$N=T=0$ : l'unica solidarietà tra le due porzioni di trave è quella a flessione (figura 16 f).

Infine, annullando tutte e tre le caratteristiche della sezione, il taglio separa il solido in due tronchi affatto indipendenti (fig. 16 g).

Diremo *sconnessioni semplici* quelle dei tipi a, b, c, della figura; *doppie* quelle dei tipi d, e, f; *tripla o completa* quella del tipo g.

È possibile pervenire ad un sistema principale annullando una caratteristica della sollecitazione per ogni grado d'indeterminazione statica, il che equivale ad imporre alla trave altrettante sconessioni semplici. Le caratteristiche annullate prendono il nome di *incognite iperstatiche interne*; e ciascuna incognita è costituita non più da una, come per le indeterminazioni esterne, ma da due forze — o coppie — uguali ed opposte, applicate alle due faccie separate dalla sconessione. La scelta delle iperstatiche interne non è legata che alla condizione di escludere casi di labilità delle varie parti nelle quali la costruzione viene separata dalle sconessioni.

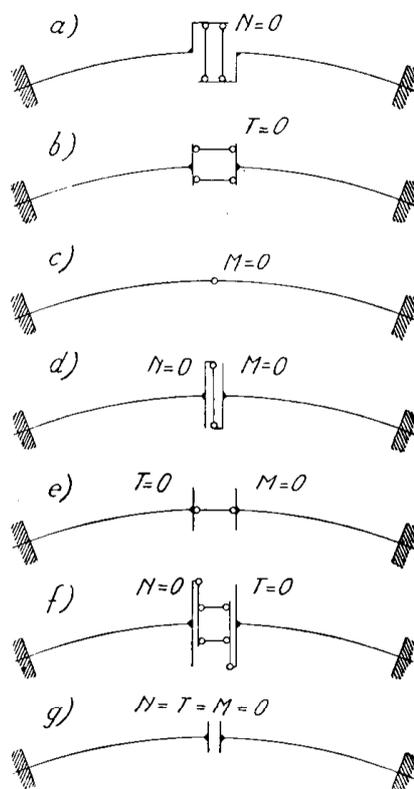


Fig. 16

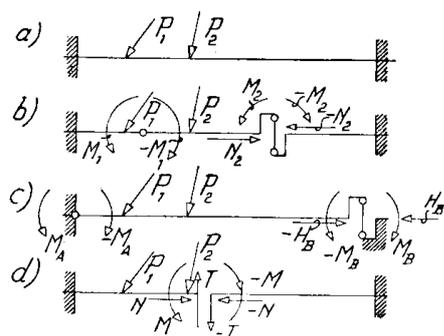


Fig. 17

Per esempio la trave incastrata già considerata potrebbe essere ridotta a sistema principale praticando in una prima sezione la sconessione semplice  $M_1=0$  (fig. 17 b), in una seconda sezione la sconessione doppia  $M_2=0, N_2=0$ . È indifferente la scelta delle due sezioni, purché esse siano distinte. In particolare la prima sezione potrebbe essere quella estrema di sinistra (fig. 17 c), la seconda quella estrema di destra: il sistema principale sarebbe allora la medesima trave semplice di figura 12 b; delle due forze uguali ed opposte che costituiscono ciascuna iperstatica,

l'una rappresenta l'azione della trave sul vincolo, l'altra — l'unica che ora abbia interesse — la reazione del vincolo sulla trave. O potremmo ancora praticare una sconnessione tripla, ossia un taglio completo in corrispondenza di una sezione qualunque, le cui caratteristiche  $N$ ,  $M$ ,  $T$ , sarebbero allora le iperstatiche (fig. 17 d): il sistema principale resterebbe separato in due mensole indipendenti.

La scelta della sezione, sempre arbitraria, potrebbe in particolare cadere su una delle sezioni di estremità: ci ridurremo allora al sistema principale costituito dalla trave incastrata ad un estremo, con i parametri della reazione dell'altro incastro per incognite iperstatiche.

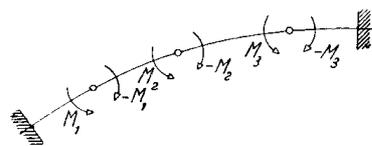


Fig. 18

Si potrebbero infine introdurre tre sconnessioni del tipo  $M=0$  in altrettante sezioni, ossia snodare la trave in quattro tronchi, inserendovi tre articolazioni (fig. 18): ciò equivarrebbe ad assumere come incognite iperstatiche i momenti flettenti  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ , nelle sezioni medesime. Si badi però che questo procedimento, perfettamente legittimo nel caso di una trave ad arco, in cui darebbe luogo al sistema isostatico denominato *arco a tre cerniere*, condurrebbe invece ad un sistema labile quando le tre articolazioni risultassero allineate (fig. 19). In tal caso infatti la sconnessione centrale non sarebbe più del tipo  $M=0$ , ma dell'altro  $T=M=0$ , rappresentato in figura 16 e.



Fig. 19

\* \* \*

Per ridurre a sistema principale una trave continua si possono, per esempio, sopprimere tutti gli appoggi eccettuato quello fisso ed uno semplice qualsiasi, riducendo così il sistema ad una trave semplice, eventualmente con sbalzi (fig. 20).

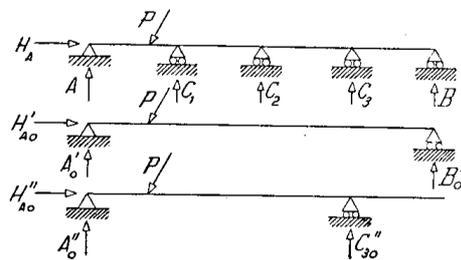


Fig. 20

Negli esempi riportati in figura le indeterminazioni statiche sono  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , nel primo caso  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $B$ , nel secondo. Si osservi che se i piani di scorrimento degli appoggi mobili hanno giacitura comune com'è la regola, l'includere tra le condizioni di vincolo sop-

presse la componente di reazione dell'appoggio fisso diretta parallelamente alla giacitura suddetta, condurrebbe ad un caso di labilità; sarebbe invece possibile includere la componente ortogonale, risultandone un sistema princi-

pale come quello rappresentato in figura 21, le cui iperstatiche sono ancora le reazioni  $C_1, C_2, C_3$ .

La figura 22 mostra alcune tra le possibilità di scelta del sistema principale nel caso di una trave incastrata agli estremi; sotto a ciascuno schema sono indicate le corrispondenti indeterminazioni statiche.

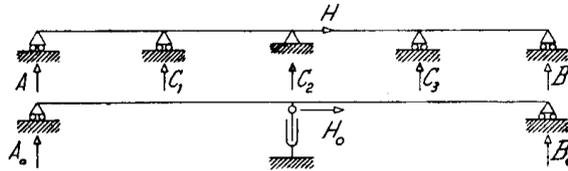


Fig. 21

Convien spesso scegliere come sistema principale quello che si ottiene praticando tante sconnessioni del tipo  $M=0$ , ossia inserendo tante articolazioni, quante sono le indeterminazioni.

Le sezioni prescelte sono per lo più quelle in corrispondenza degli appoggi (fig. 23): il sistema principale si riduce così a tante campate indipendenti, che si comportano come altrettante travi semplicemente appoggiate agli estremi; le indeterminazioni statiche sono i momenti nelle suddette sezioni o *momenti sugli appoggi*.

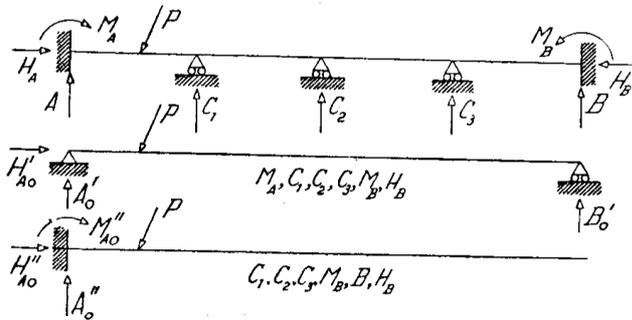


Fig. 22

Si possono naturalmente praticare le sconnessioni anche in sezioni diverse da quelle soprastanti agli appoggi, derivandone quei sistemi iso-

statici articolati, usati pure come sistemi resistenti, che sono le *travi Gerber* o *travi a mensola*. Per non incorrere in casi di labilità nelle diverse parti separate dalle cerniere, non si debbono

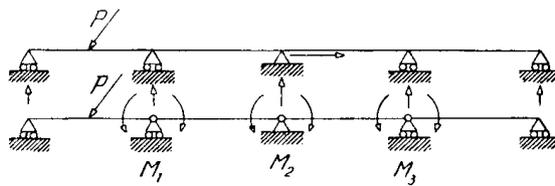


Fig. 23

disporre mai più di due di queste nella medesima campata, perchè altrimenti quelle comprese tra le due estreme non sarebbero più semplici cerniere, ma sconnessioni doppie implicanti l'annullamento del taglio oltrechè

del momento flettente. Per lo stesso motivo ad una campata ove siano inserite due cerniere dovranno esser contigue campa-



Fig. 24

te che ne siano prive: una disposizione come quella di figura 24 non escluderebbe infatti una rotazione rigida del tronco di trave  $E''E'''$  sul secondo degli appoggi rappresentati.

Se la trave è semplicemente appoggiata agli estremi ed in  $n$  punti intermedi, si potrebbe per esempio disporre una articolazione in ciascuna campata, tranne che in una (fig. 25 a). Questo tipo di trave Gerber è

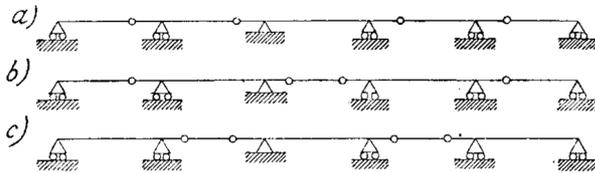


Fig. 25

talvolta usato nella formazione degli arcarecci delle tettoie. Nelle travi a mensola dei ponti invece le campate con due articolazioni si alternano con altre che ne sono prive; le campate terminali,

se gli estremi sono appoggiati, non hanno cerniere o ne hanno una sola, secondochè ne sia provvista o meno la campata adiacente (fig. 25 b, c).

La figura 26 mostra una disposizione possibile di trave Gerber ad estremi incastrati: la sconnessione di destra della campata centrale è quella doppia del tipo  $M=N=0$ , per modo che il numero complessivo delle sconnessioni semplici risulta uguale al numero delle indeterminazioni statiche — sette nel caso della figura — che presenta il sistema non articolato.

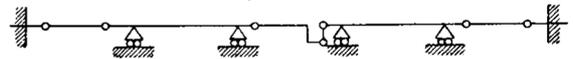


Fig. 26

Si può infine ridurre una trave continua a sistema principale praticando un certo numero di sconnessioni doppie o triple.

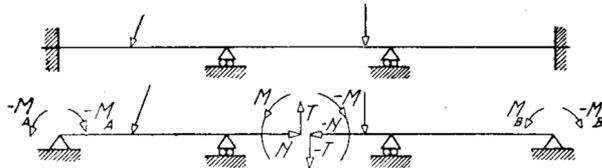


Fig. 27

Quest'ultimo metodo potrebbe ad esempio essere usato con vantaggio per lo studio di una trave di tre campate con estremi incastrati: il sistema principale verrebbe allora a spezzarsi in due travi con sbalzi, com'è indicato in figura 27: le incagnite iperstatiche sarebbero le caratteristiche  $N$ ,  $M$ ,  $T$ , della sollecitazione nella sezione ove viene praticato il taglio, ed i momenti d'incastro  $M_A$  ed  $M_B$ .

## 7 — Teoremi fondamentali sulle travi.

Le azioni sull'asse alle quali può ritenersi ridotto il sistema delle forze esterne sono di regola forze vere e proprie, finite o infinitesime, più raramente coppie flettenti o torcenti.

In un segmento di trave piana cui non siano applicate forze concentrate scegliamo un tronco elementare di lunghezza  $ds$  (fig. 28 a) e siano  $r$  il raggio di curvatura,  $p$  l'intensità del carico distribuito in corrispon-

denza di esso. Se indichiamo con  $p'$  l'intensità del carico assiale (fig. 28 b), con  $p''$  l'intensità del carico flettente (fig. 28 c), talché sia  $p = \sqrt{p'^2 + p''^2}$ , assegnate le caratteristiche della sollecitazione  $N, M, T$  della sezione iniziale del tronco, potremo dedurre quelle della sezione terminale dalle relazioni:

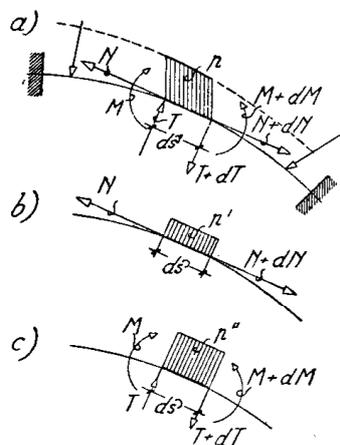


Fig. 28

$$N + dN - N + p' ds - T \frac{ds}{r} = 0 ,$$

$$T + dT - T + p'' ds + N \frac{ds}{r} = 0 \text{ (1)} ,$$

$$M + dM - M + T ds = 0 ,$$

esprimenti l'equilibrio del tronco considerato quando si trascurino gli infinitesimi del secondo ordine. Semplificando si ottiene:

$$(7) \quad \frac{dN}{ds} = \frac{T}{r} - p' \quad , \quad \frac{dT}{ds} = -\frac{N}{r} - p'' \quad , \quad \frac{dM}{ds} = T ,$$

Se poi la curvatura è così piccola da poter trascurare i termini che la contengono, le espressioni prendono la forma:

$$(8) \quad \frac{dN}{ds} = -p' \quad , \quad \frac{dT}{ds} = -p'' \quad , \quad \frac{dM}{ds} = T ;$$

valgono allora nel punto generico i seguenti teoremi:

*la derivata della forza normale è uguale all'intensità  $p'$  del carico assiale cambiata di segno ;*

*la derivata della forza di taglio è uguale all'intensità  $p''$  del carico flettente cambiata di segno ;*

*la derivata del momento flettente è uguale alla forza di taglio.*

Poiché in virtù delle ultime due delle (8) possiamo scrivere:

$$(9) \quad \frac{d^2 M}{ds^2} = \frac{dT}{ds} = -p'' .$$

resta ancora provato che *in una sezione ove sia nullo il taglio, il momento*

(1) Per  $T$  e  $p''$  si assumono di regola versi positivi opposti.

*flettente raggiunge un massimo od un minimo, secondoché il taglio vi sia in diminuzione od in aumento.*

Nelle sezioni in corrispondenza delle quali agiscono carichi concentrati, forza normale e taglio sono discontinui, hanno cioè valori diversi alla sinistra ed alla destra della sezione. Ci si riferisce allora alla forza normale od al taglio *alla sinistra* oppure *alla destra*; altrettanto dicasi per il momento flettente in quelle sezioni ove siano applicati momenti.