CAPITOLO IX

SOLLECITAZIONE A FORZA NORMALE SEMPLICE

51 — Verifica delle equazioni del problema.

Le componenti di spostamento siano definite dalle funzioni:

$$u = -\frac{c}{m}x \quad , \quad v = -\frac{c}{m}y \quad , \quad w = cz \, , \tag{148}$$

essendo $1/m$ il coefficiente di contrazione laterale, c una costante piccolissima.

Derivando queste tre funzioni ordinatamente rispetto ad x, y, z, si ottiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{c}{m} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{c}{m} \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial z} = c \, ;$$

osservando poi che sono nulle le derivate prime di u rispetto ad y e di v rispetto ad x, e che sono parimenti nulle tutte le derivate seconde di u, v, w, concludiamo che le (148) soddisfano alle (136).

Similmente, poichè sono nulle le derivate di u e v rispetto a z e le derivate di w rispetto ad x ed y, le componenti di spostamento assegnate soddisfano alla condizione (141) sulla superficie laterale del solido.

Infine, poichè per $x = y = z = 0$ è:

$$u = v = w = 0 \, ,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \, ,$$

le (148) soddisfano anche alle condizioni di vincolo (143) e (144).

In conclusione, le funzioni esprimenti gli spostamenti u, v, w, costituiscono una soluzione del problema di Saint-Venant, purchè alla base $z = l$ del solido si applichino le forze superficiali che si deducono dalle (142), ossia le forze:

$$F_x = 0 \quad , \quad F_y = 0 \quad , \quad F_z = c\,E \; ,$$

ed alla base $z = 0$ forze uguali ed opposte alle precedenti.

I singoli elementi $d\,A$ della base libera vengono così ad essere cimentati esclusivamente da forze normali d'intensità $E c \; dA$. La risultante di queste forze:

$$N = E\,c\,A \; , \tag{149}$$

essendo A l'area della sezione trasversale del cilindro, dev'essere normale al piano della base suddetta e passare per il baricentro; essa agisce dunque secondo l'asse del solido ed è l'unica caratteristica di sollecitazione non nulla: *il solido trovasi cioè cimentato a forza normale semplice.*

52 — **Analisi della deformazione.**

La costante c risulta determinata dalla (149) in funzione di N, che in pratica è un dato del problema:

$$c = \frac{N}{EA} \; ; \tag{150}$$

sicchè le componenti di spostamento valgono:

$$u = -\frac{1}{m}\,\frac{N}{EA}\,x \quad , \quad v = -\frac{1}{m}\,\frac{N}{EA}\,y \quad , \quad w = \frac{N}{EA}\,z \; . \tag{151}$$

Siccome tali componenti sono funzioni lineari delle coordinate, la deformazione è affine; *le sezioni piane si trasformano in sezioni piane.* In particolare ogni sezione retta si conserva piana, spostandosi parallelamente a sè stessa di una quantità proporzionale a z, *trasformandosi nel proprio piano omoteticamente*, perchè ogni suo punto si sposta lungo la retta che lo congiunge al baricentro di una quantità proporzionale a $\sqrt{x^2 + y^2}$, ossia alla sua distanza dal baricentro stesso.

Se supponiamo m positivo, w ha lo stesso segno di N, u e v segno contrario. Cosicchè se la forza N^* *applicata alla base* $z = l$ è una *trazione* (N^* positiva se equiversa all'asse z) il solido si allunga longitudinalmente e si contrae in senso trasversale; se la forza è invece una *compressione* (N^* negativa controversa all' asse z) si accorcia longitudinalmente e si dilata in senso trasversale. In ogni caso la variazione di lunghezza del solido si ottiene dalla terza delle (151) ponendovi $z = l$; essa vale cioè:

$$\Delta l = \frac{N l}{EA} . \tag{152}$$

Al prodotto EA si dà il nome di ***rigidezza a forza normale***; il rapporto $\rho = EA : l$ dicesi *estensibilità*.

Le componenti di deformazione non nulle valgono poi:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{N}{m EA} , \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{N}{EA} ; \end{aligned} \right. \tag{153}$$

l' ultima di queste, confrontata con la (150), avverte che la costante c è uguale al coefficiente di dilatazione lineare secondo l' asse del solido; le prime due provano che il coefficiente di dilatazione relativo ad un elemento lineare qualunque normale all' asse z risulta in ogni caso, in valore assoluto, m volte minore di quello relativo ad un elemento parallelo allo stesso asse. Se in particolare N è positivo, *alla dilatazione longitudinale* ε_z *corrisponde una contrazione trasversale* m *volte minore*: ciò spiega la denominazione di *coefficiente di contrazione laterale* che talvolta si dà al rapporto di Poisson.

La dilatazione cubica, con riguardo alla (93), vale:

$$\Theta = \frac{m-2}{mE} \sigma_z = \frac{m-2}{mE} \frac{N}{A} ,$$

e la variazione totale di volume del cilindro:

$$\Delta V = \int_V \Theta \, dV = \frac{m-2}{m} \frac{N l}{E} . \tag{154}$$

53 — **Stato di tensione.**

Dalle (138) risulta l' unica componente speciale di tensione non nulla:

$$\sigma_z = E \frac{\partial w}{\partial z} ,$$

ovvero, per l'ultima delle (153):

$$\sigma_z = \frac{N}{A} . \tag{155}$$

Poichè su qualunque elemento piano appartenente alla generica sezione trasversale è nulla la tensione tangenziale, la direzione dell'asse z è principale. Dato che è inoltre $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$, la σ_z è l'unica tensione principale non nulla, ciò che caratterizza uno stato di tensione monoassiale. Le altre due tensioni principali essendo nulle, rimangono indeterminate le corrispondenti direzioni.

Assumendo due direzioni ortogonali arbitrarie a e b appartenenti al piano di una data sezione e passanti per il punto M di cui si voglia rappresentare lo stato di tensione, si costruisca il cerchio di Mohr per gli elementi piani del fascio di sostegno b (fig. 25). Per un elemento Γ qualunque si otterrà, come è noto, il punto rappresentativo M_Γ guidando dal polo di rappresentazione P la parallela alla traccia di Γ. Siccome però le direzioni ortogonali a e b sono arbitrarie, sarà lecito farle ruotare nel piano della sezione senza che variino, a parità d'inclinazione φ dell'elemento sull'asse z, le tensioni σ e τ su di esso. Dalla rappresentazione si deduce perciò che sugli elementi tangenti al cono di rotazione di asse z' ed apertura di 45°, la tensione normale è la metà della tensione σ_z, mentre quella tangenziale raggiunge il valore massimo:

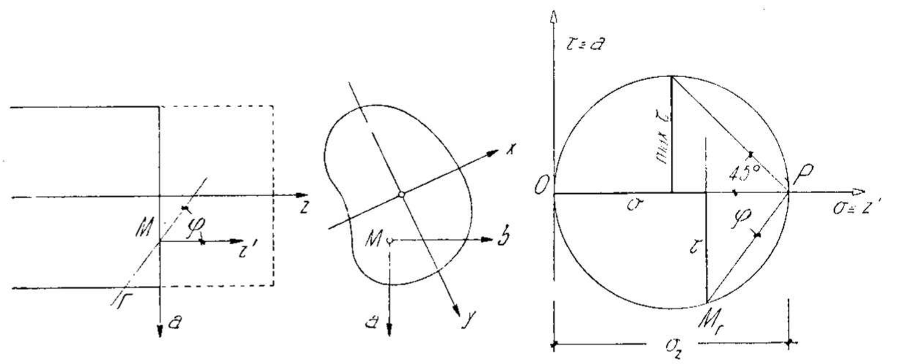

Fig. 25

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_z}{2} . \tag{156}$$

Queste proprietà sono comuni a tutti gli stati monoassiali; in particolare, essendo qui identico lo stato di tensione in tutti i punti del solido, possiamo affermare che in tutti i punti di qualunque superficie conica di rotazione avente asse parallelo alla direzione principale z, la tensione (σ, τ) si mantiene costante.

54 — Lavoro di deformazione.

La densità d'energia, che si ottiene applicando la (94) relativa ai solidi omogenei ed isotropi:

$$\varphi = \frac{1}{2E}\sigma_z^2 = \frac{N^2}{2EA^2}, \tag{157}$$

è costante in tutti i punti. Il lavoro di deformazione del cilindro si deduce perciò moltiplicando l'energia unitaria per il volume Al del solido; sarà cioè:

$$\Phi_l = \frac{N^2}{2EA^2}Al = \frac{N^2 l}{2EA}. \tag{158}$$

Questo risultato, avuto riguardo alla (152), è identico a quello che si otterrebbe applicando il teorema di Clapeyron, secondo il quale il lavoro di deformazione vale:

$$\Phi_l = \frac{1}{2}N\Delta l, \tag{159}$$

ossia la metà del lavoro che la forza N compirebbe se, invece di crescere gradatamente dal valore zero al valore finale, agisse con tutta la sua intensità durante la deformazione.