Capitolo VIII

GENERALITÀ SUL PROBLEMA DI SAINT-VENANT

48 — Equazioni di condizione.

Consideriamo un solido elastico omogeneo ed isotropo, di forma cilindrica, che supporremo generato da una figura piana A qualunque (fig. 21), la quale subisca una traslazione l in direzione normale alla sua giacitura; la lunghezza l sia molto grande rispetto alle dimensioni trasversali.

La terna trirettangola (x, y, z) di riferimento abbia l' origine O nel baricentro di una delle basi del cilindro, gli assi x e y appartenenti a detta base, l'asse z coincidente con l'*asse geometrico del solido*, ossia con la retta che nella traslazione descrive il baricentro dell'area generatrice.

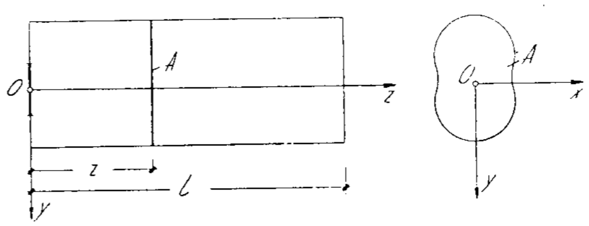

Fig. 21

Supporremo nulle le forze di massa:

$$X = Y = Z = 0 \, , \tag{131}$$

e il solido sollecitato e vincolato ***esclusivamente in corrispondenza delle basi.***

Supporremo inoltre che per tutti gli elementi superficiali paralleli all' asse z sia diversa da zero soltanto la tensione tangenziale parallela all' asse medesimo, o in altri termini, che sia in tutti i punti:

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \; ; \tag{132}$$

ciò equivale ad ammettere che tra le fibre longitudinali del solido non si esercitino azioni mutue di compressione o di trazione, ma soltanto azioni in senso longitudinale.

Posto in questi termini, il problema dell'equilibrio elastico d'un solido prismatico è stato risolto rigorosamente da Barré de Saint-Venant.

49 — Equazioni del problema.

Nel riferimento sopra introdotto, avuto riguardo alle equazioni di condizione (131) e (132) del problema, le equazioni indefinite d'equilibrio divengono:

$$(133) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} = 0 , \\ & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = 0 , \\ & \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} = 0 . \end{aligned} \right.$$

Le prime due dichiarano che le tensioni tangenziali sono indipendenti da z: *le tensioni tangenziali* τ_{xx} *e* τ_{xy} *sono dunque costanti per tutti i punti del solido appartenenti ad una medesima parallela all'asse* z. Se poi sono nulle tutte le tensioni tangenziali, la terza si riduce alla:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial z} = 0 ,$$

pertanto *la tensione* σ_x *si mantiene costante per tutti i punti di una medesima parallela all'asse* z.

Dalle (91), avuto riguardo alle equazioni di condizione (137) ed al riferimento x, y, z, si ottiene:

$$(134) \qquad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\sigma_x}{mE} \quad , \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad , \quad \gamma_{xy} = 0 ;$$

tenute inoltre presenti le prime due delle (133), avremo:

$$(135) \qquad \frac{\partial \gamma_{xx}}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} = 0 .$$

Infine l'ultima delle (133), sempre in virtù delle (91), può scriversi:

$$G\left(\frac{\partial \gamma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial y}\right) + E\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} = 0 .$$

Sostituendo in tutte queste equazioni ai parametri della deformazione le loro espressioni in funzione delle componenti di spostamento u, v, w, si ottengono le seguenti sei condizioni:

$$(136)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{m}\frac{\partial w}{\partial z}\,,\\ &\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\,,\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}=0\,,\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}=0\,,\\ &\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0\ (^1)\,, \end{aligned}\right.$$

cui devono soddisfare le componenti di spostamento in ogni punto del solido: le prime tre sono le stesse condizioni (132) di Saint-Venant, le rimanenti esprimono nelle u, v, w, le equazioni indefinite d'equilibrio.

Soddisfatte le (136), le componenti speciali non nulle di tensione si deducono dalle semplici relazioni:

$$(137)\qquad \sigma_z = E\varepsilon_z \quad , \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad , \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}\ ;$$

che in funzione delle componenti di spostamento, si scrivono:

$$(138)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sigma_z = E\frac{\partial w}{\partial z}\,,\\ &\tau_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad , \quad \tau_{yz} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right). \end{aligned}\right.$$

* * *

Sempre con riguardo alla (132) e nell'ipotesi che le reazioni dei vincoli siano ovunque nulle, cioè che le forze esplicitamente applicate costi-

(1) - All'ultima equazione si perviene facilmente osservando che, in virtù delle prime due, è:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}=-\frac{1}{m}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\,.$$

tuiscano un sistema in equilibrio, le equazioni ai limiti (32), detti ancora m^*, n^*, p^*, i coseni direttori della normale all'elemento superficiale generico, divengono:

$$F_x = p^* \tau_{zx} \,,$$
$$F_y = p^* \tau_{zy} \,,$$
$$F_z = m^* \tau_{xz} + n^* \tau_{yz} + p^* \sigma_z \,.$$

Applicandole alla superficie laterale del solido, dove abbiamo esclusa la presenza sia di reazioni vincolari che di forze esplicite, e dove il coseno direttore p^* è sempre nullo in quanto la normale in ogni punto alla superficie è pure normale all'asse z, si riducono all'unica equazione:

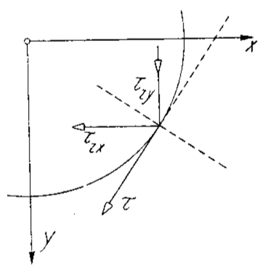

Fig. 22

$$(139) \qquad m^* \tau_{xz} + n^* \tau_{yz} = 0 \,,$$

la quale avverte che *la tensione tangenziale nei punti del contorno di una qualunque sezione retta del cilindro ha componente nulla secondo la normale al contorno*, ossia che la tensione tangenziale risultante τ è tangente al contorno medesimo (fig. 22). Le stesse relazioni applicate invece alle basi del cilindro, per le quali risulta:

$$m^* = 0 \quad , \quad n^* = 0 \quad , \quad p^* = \pm 1 \,,$$

si traducono nelle:

$$(140) \qquad \begin{cases} F_x = \pm \tau_{zx} \,, \\ F_y = \pm \tau_{zy} \,, \\ F_z = \pm \sigma_z \,, \end{cases}$$

dove il segno positivo vale per la base $z = l$, il segno negativo per la base $z = 0$.

In funzione delle componenti di spostamento e con riferimento alle (138), le precedenti equazioni si trasformano infine:

la (139) nella:

$$(141) \qquad m^* \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + n^* \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \,,$$

le (140) nelle:

$$
(142)\qquad \begin{cases} F_x = \pm\, G\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right), \\[2ex] F_y = \pm\, G\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right), \\[2ex] F_z = \pm\, E\,\dfrac{\partial w}{\partial z}\,. \end{cases}
$$

* * *

Per la base $z = 0$ del cilindro supporremo:

che ne sia fisso il baricentro O, cioè che per $x = y = z = 0$, sia:

$$
(143)\qquad u_0 = v_0 = w_0 = 0\ ;
$$

che l'*elemento superficiale per O* appartenente alla base stessa abbia rotazioni nulle intorno agli assi x, y, z, ovvero che per $x=y=z=0$, sia:

$$
(144)\qquad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = 0\,.
$$

Supporremo poi il cilindro libero da vincoli alla base $z = l$. I legami ***puramente geometrici*** così imposti al solido elastico ne definiscono la configurazione a deformazione avvenuta.

* * *

Il problema dell'equilibrio elastico sarebbe ora ridotto alla ricerca di tre funzioni u, v, w, soddisfacenti:

alla sestupla di equazioni (136) in tutti i punti del solido,
alla (141) nei punti della superficie laterale,
alla (142) nei punti delle basi,
alle (143) e (144) nel punto O.

Ma in luogo del procedimento diretto, che nonostante tutte le restrizioni poste al problema generale, urterebbe pur sempre contro notevoli difficoltà analitiche, noi seguiremo il seguente procedimento inverso:

fisseremo a priori le funzioni u, v, w;

verificheremo che soddisfino a tutte le equazioni sopra indicate;

calcoleremo, per mezzo delle (132), le componenti speciali non nulle di tensione in corrispondenza delle basi;

risaliremo, dai valori di dette componenti, alle azioni esterne che devono agire sulle basi affinchè lo stato di deformazione previsto sia equilibrato.

Naturalmente, il metodo non può servire che a giustificare le soluzioni già note o a controllare quelle che si ritengono vere relativamente ad un certo numero di casi particolari.

Le soluzioni sono poi da ritenersi rigorose quando le forze applicate alle basi del cilindro abbiano in ciascun punto i valori F_x, F_y, F_z, forniti dalle (142); esse acquistano tuttavia portata molto più vasta in virtù del postulato di Saint-Venant. Sotto le dichiarate restrizioni, tale principio permette infatti di prescindere dalla legge con cui le azioni sono effettivamente applicate alle basi, e quindi di utilizzare, con approssimazione tanto maggiore quanto più distanti dalle basi stesse sono i punti che si considerano, le soluzioni del problema, anche quando, come spesso si verifica nelle applicazioni pratiche, sia sconosciuta la effettiva legge di distribuzione delle forze applicate a ciascuna base, ma siano assegnati i sei parametri del loro sistema relativi agli assi di riferimento.

50 — Caratteristiche della sollecitazione relative ad una sezione.

Mediante un taglio effettuato secondo una certa sezione retta S, supponiamo suddiviso il solido di Saint-Venant in due porzioni A_1 e A_2 (fig. 23), ed indichiamo con R la risultante, con M il momento risultante del *sistema di forze applicate alla base* $z = l$ del solido, avendo assunto come centro di riduzione il baricentro O_s della sezione S.

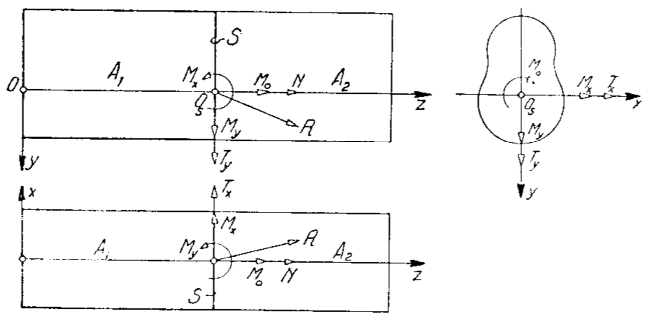

Fig. 23

Scomponiamo la R nelle sue tre componenti:

$$T_x \quad , \quad T_y \quad , \quad N ,$$

rispettivamente secondo gli assi x, y, z; parimenti scomponiamo il vettore del momento M nei vettori componenti:

$$M_x \quad , \quad M_y \quad , \quad M_o \, ,$$

e conveniamo di riguardare come positivo il generico di questi sei parametri quando sia cospirante con l'asse cui è parallelo.

Per l'equilibrio della porzione A_2 di cilindro, la forza R ed il momento M, ovvero le loro componenti secondo gli assi, devono costituire un complesso staticamente equivalente ed opposto al complesso delle forze elementari:

$$-\sigma_x dA \quad , \quad -\tau_{xx} dA \quad , \quad -\tau_{yx} dA \, ,$$

che la porzione di solido situata dalla parte degli assi negativi trasmetteva prima del taglio alla porzione A_2 attraverso gli elementi superficiali dA della sezione S; o possiamo anche dire che la forza R ed il momento M, ovvero le loro componenti, equivalgono staticamente al complesso delle forze elementari:

$$\sigma_x dA \quad , \quad \tau_{xx} dA \quad , \quad \tau_{yx} dA \, ,$$

che la porzione del solido A_2 trasmetteva, sempre prima del taglio, all'altra porzione attraverso la sezione S. Per l'equilibrio devono allora sussistere le seguenti sei relazioni:

$$(145) \quad \begin{cases} N = \int_A \sigma_x dA \quad , \quad T_x = \int_A \tau_{xx} dA \quad , \quad T_y = \int_A \tau_{xy} dA \, , \\ M_o = \int_A (\tau_{xy} x - \tau_{xx} y) dA \quad , \quad M_x = \int_A \sigma_x y dA \quad , \quad M_y = -\int_A \sigma_x x dA \, , \end{cases}$$

gli integrali essendo estesi a tutta l'area A della sezione trasversale.

Chiameremo questi sei integrali *caratteristiche del sistema di tensioni interne agenti sulla sezione*, o più brevemente, *caratteristiche della sollecitazione relative alla sezione S*.

La prima di queste caratteristiche è la componente del sistema di tensioni secondo la normale alla sezione: la diremo perciò *forza normale*.

La seconda e la terza, cioè T_x e T_y, sono le componenti del sistema stesse secondo gli assi x ed y, rispettivamente paralleli agli assi x ed y del riferimento; poichè esse tendono a far scorrere la sezione S nel suo piano, vale a dire a tagliare il solido in corrispondenza della sezione, prendono il nome di *forze taglianti*.

La quarta caratteristica, M_o, è il momento del sistema di tensioni rispetto all'asse del cilindro; poichè esso tende a far ruotare la sezione nel suo piano, ossia a produrre una torsione del solido, viene detto *momento torcente.*

Finalmente la quinta e la sesta caratteristica, ossia M_x ed M_y, sono i momenti del sistema di tensioni rispetto agli assi principali d'inerzia della sezione; essi tendono a far ruotare la sezione intorno ad assi giacenti nel suo piano, ossia ad inflettere il solido, e prendono perciò il nome di *momenti flettenti.*

Per l'equilibrio di tutto il solido, il sistema di forze applicate alla base $z = 0$, assunto sempre come centro di riduzione il baricentro della sezione S, deve ammettere una risultante di traslazione $-R$ ed un momento risultante $-M$, uguali e contrari alla forza R ed al momento M, risultanti del sistema di forze applicate alla base $z = l$; di conseguenza la sezione S, considerata come appartenente alla porzione di solido A_2, avrà le caratteristiche della sollecitazione:

$$-N \quad , \quad -T_x \quad , \quad -T_y \quad , \quad -M_o \quad , \quad -M_x \quad , \quad -M_y \, .$$

Se in particolare la sezione S coincide con la base $z = l$, le (145) divengono:

$$(146) \quad \begin{cases} N^* = \int_A F_z dA \quad , \quad T_x^* = \int_A F_x dA \quad , \quad T_y^* = -\int_A F_x x dA \, , \\ M_o^* = \int_A (F_y x - F_x y) dA \quad , \quad M_x^* = \int_A F_z y dA \quad , \quad M_y^* = -\int_A F_z x dA \, . \end{cases}$$

Potremo allora riguardare la porzione B di solido in equilibrio sotto l'azione delle forze (fig. 24):

$$-N \quad , \quad -T_x \quad , \quad -T_y \quad , \quad -M_o \quad , \quad -M_x \quad , \quad -M_y \, ,$$

applicate alla sezione S, e delle forze:

$$N^* \quad , \quad T_x^* \quad , \quad T_y^* \quad , \quad M_o^* \quad , \quad M_x^* \quad , \quad M_y^* \, ,$$

applicate alla base libera e, dalle equazioni della statica dei sistemi rigidi, dedurre le relazioni:

$$(147) \quad \begin{cases} N = N^* \quad , \quad T_x = T_x^* \quad , \quad T_y = T_y^* \, , \\ M_o = M_o^* \quad , \quad M_x = M_x^* - T_y^*(l-z) \quad , \quad M_y = M_y^* + T_x^*(l-z) \, , \end{cases}$$

esprimenti le leggi con cui le caratteristiche della sollecitazione relative alla sezione generica variano in funzione delle analoghe caratteristiche relative alla base libera del cilindro. Esse avvertono che *la forza normale, le forze taglianti ed il momento torcente sono costanti per tutte le sezioni del cilindro, mentre i momenti flettenti variano con legge lineare.*

La quinta delle (147) dimostra inoltre che se $T_y^* = T_y$ è diverso da zero, M_x può tutt'al più annullarsi in un'unica sezione del solido; così pure la sesta dimostra che se $T_x^* = T_x$ non è nullo, M_y non può annullarsi che in una sola sezione.

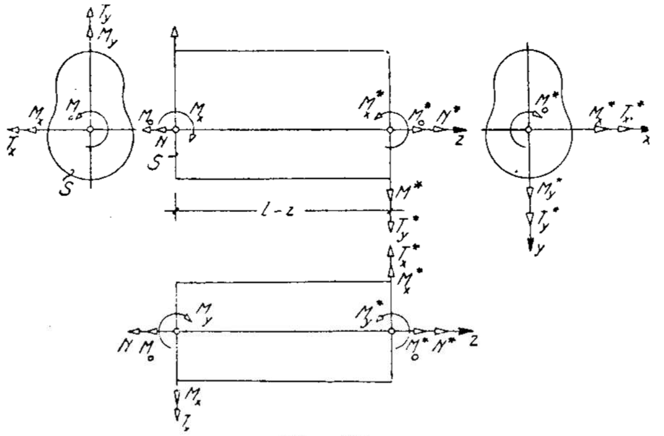

Fig. 24

Eccettuate le caratteristiche T_x e T_y, le quali dunque per una sezione generica del solido non possono avere valori non nulli senza che siano pure diversi da zero i momenti M_y e M_x, le rimanenti caratteristiche possono annullarsi l'una indipendentemente dall'altra. Potremo quindi ricercare le soluzioni del problema di Saint-Venant relative ai casi particolari indicati nello specchio seguente:

CARATTERISTICHE TUTTE NULLE		SOLLECITAZIONE
tranne	N	a forza normale
„	M_x ovvero M_y	a flessione
„	M_0	a torsione
„	T_x ed M_y ovvero T_y ed M_x	a flessione e taglio

Note queste soluzioni particolari, il principio della sovrapposizione degli effetti ci permetterà di dedurre lo stato di tensione corrispondente al caso in cui le varie caratteristiche agiscano contemporaneamente. Qualunque sia il sistema di forze applicate alla base libera, purchè equivalga staticamente alla distribuzione di forze richiesta dalla soluzione rigorosa — ne abbia cioè le medesime caratteristiche — per il principio di Saint-Venant, lo stato di tensione in punti del cilindro sufficientemente lontani dalle basi può ritenersi identico a quello corrispondente alla detta soluzione e pertanto completamente individuato.

I rimanenti capitoli di teoria dell'elasticità sono tutti dedicati alla trattazione dei suddetti quattro casi particolari fondamentali e dei casi di sollecitazione composta più interessanti per le applicazioni.