CAPITOLO VII

SISTEMI ELASTICI A DUE DIMENSIONI

43 — Stati piani di deformazione.

Il solido elastico sia un cilindro di lunghezza indefinita, cimentato da forze, sia di massa che superficiali, uniformemente distribuite nel senso delle generatrici, e spiranti normalmente alla direzione di queste. In tali condizioni il piano di una sua sezione retta qualunque sarà necessariamente piano di simmetria tanto per il solido elastico e per le forze esterne, come per le deformazioni. Un punto qualunque si sposterà nel piano normale alla generatrice passante per esso, talchè, se indichiamo ora con x, y, z, gli assi di riferimento, con u, v, w, le corrispondenti componenti di spostamento, e supponiamo l'asse z abbia la direzione stessa delle generatrici, sarà $w = 0$ per tutti i punti del solido.

In conseguenza risulta dalle (4) e (9):

$$\varepsilon_z = 0 \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \; ;$$

e quindi dalle (91):

$$\tau_{xz} = 0 \quad , \quad \tau_{yz} = 0 \, .$$

Dalle stesse (91) si ha inoltre:

$$\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \, ,$$

e sostituendo questa nelle espressioni delle prime due dilatazioni:

$$
(113) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{m^2 - 1}{m^2 E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{m - 1}\right), \\
\varepsilon_y &= \frac{m^2 - 1}{m^2 E}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_x}{m - 1}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Le equazioni indefinite di equilibrio, dette X e Y le componenti non nulle delle forze di massa, saranno poi:

$$
(114) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0\,, \\
&\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0\,;
\end{aligned}
\right.
$$

mentre la terza equazione sarà identicamente soddisfatta in quanto le forze esterne hanno componente nulla secondo l'asse z, ed è quindi $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$, ossia $\sigma_z =$ costante.

Le equazioni ai limiti, chiamando F_x ed F_y le componenti diverse da da zero della forza applicata all'elemento superficiale generico, m^* ed n^* i coseni di direzione non nulli della normale esterna a tale elemento, divengono infine:

$$
(115) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + F_x = m^* \sigma_x + n^* \tau_{yx}\,, \\
&\lambda_2 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + F_y = n^* \sigma_y + m^* \tau_{xy}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

44 — Stati piani di tensione.

Il solido elastico sia ora una lastra piana di spessore costante e piccolissimo rispetto alle altre dimensioni, limitata da una superficie cilindrica a generatrici normali alle faccie (fig. 19). Le forze esterne siano tutte parallele al piano medio xy, quelle superficiali agiscano esclusivamente sul bordo della lastra, e tutte le forze siano inoltre ripartite uniformemente nel senso dello spessore z.

Per l'ipotesi fatta sulle modalità di carico, le condizioni:

$$
\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0
$$

valgono non soltanto per gli elementi delle faccie, ma per tutti gli elementi piani normali all' asse z, i quali, per l' ipotesi fatta circa lo spessore, sono tutti vicinissimi alle faccie.

In dipendenza della condizione $\sigma_z = 0$, dalle (91) si trae:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{m}\right), \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_x}{m}\right).
\end{aligned}
\right.
\tag{116}
$$

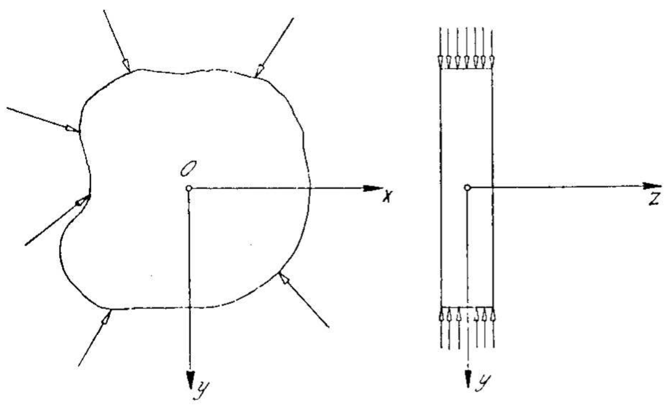

Fig. 19

Le equazioni indefinite ed ai limiti sono sempre le (114) e (115). Dato che per la determinazione delle tensioni incognite σ_x, σ_y, τ_{xy}, nel punto generico del sistema sono disponibili due sole equazioni di equilibrio, gli stati piani di deformazione e di tensione si presentano semplicemente iperstatici.

45 — **Equazioni dell' equilibrio elastico dei sistemi piani.**

Oltre alle equazioni indefinite (114) ed ai limiti (115), le quali sono dunque le medesime tanto per gli stati piani di deformazione come per gli stati piani di tensione, devono essere soddisfatte quelle di congruenza.

Per uno stato piano di tensione, essendo:

$$\sigma_z = 0 \quad , \quad \tau_{xz} = 0 \quad , \quad \tau_{yz} = 0 \, ,$$

$$\Delta^2 \sigma_z = 0 \quad , \quad \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = - \frac{m-1}{m(m-1)} \operatorname{div} \mathbf{Y} \, ,$$

scrivendo le (109) e sommandole membro a membro, si ottiene:

$$\Delta^2 s + \frac{m}{m+1}\left(\Delta^2 s + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right) = - \frac{2m+1}{m-1} \operatorname{div} \mathbf{Y} \, ,$$

da cui, con ovvie riduzioni:

$$\Delta^2 (\sigma_x + \sigma_y) = - \frac{m}{m-1}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right). \tag{117}$$

Per uno stato piano di deformazione, posto:

$$(118) \qquad E_1 = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \quad , \quad \frac{1}{m_1} = \frac{1}{m - 1} \, ,$$

le (113) divengono:

$$(119) \qquad \begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E_1}\left(\sigma_x - \dfrac{\sigma_y}{m_1}\right) , \\[2ex] \varepsilon_y = \dfrac{1}{E_1}\left(\sigma_y - \dfrac{\sigma_x}{m_1}\right) ; \end{cases}$$

espressioni delle dilatazioni formalmente identiche alle (116), salvo la diversità dei valori di E e di m.

Le condizioni di congruenza per questo caso si traducono allora nell' equazione:

$$(120) \qquad \Delta^2 (\sigma_x + \sigma_y) = - \frac{m_1}{m_1 - 1}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) ,$$

identica alla (117), salvo il diverso valore del coefficiente di contrazione trasversale.

Si possono dunque trattare gli stati piani di deformazione come gli stati piani di tensione, modificando le costanti d' elasticità E ed m secondo le (118).

Se sono nulle o costanti le forza di massa, sia la (117) che la (120) si riducono alla forma:

$$(121) \qquad \Delta^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \; ;$$

la distribuzione degli sforzi è cioè identica per entrambi i tipi di sistemi piani. In tal caso *le equazioni dell' equilibrio elastico non contengono le costanti d' elasticità*; ciò significa che in assenza di vincoli che limitino la deformabilità del sistema, la distribuzione degli sforzi è indipendente dalle proprietà elastiche del corpo; per un dato sistema elastico essa può essere pertanto studiata sperimentalmente su di un modello eseguito con materiale qualunque purchè omogeneo ed isotropo. Tale possibilità viene invece meno quando le condizioni di vincolo siano in numero superiore a quello strettamente necessario ad assicurare l' immobilità del sistema, perchè, risultandone condizionata la deformabilità, le costanti d'elasticità compaiono in generale nelle equazioni di vincolo.

46 — La funzione di Airy.

Se le forze di massa si riducono al solo peso proprio e questo agisce nella direzione y, indicando con ρ la massa dell'unità di volume, con g l'accelerazione di gravità, le (114) divengono:

$$(122) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \, , \\ &\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g = 0 \, . \end{aligned} \right.$$

Se F è una funzione continua delle coordinate x, y, e poniamo:

$$(123) \qquad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad , \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad , \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} = \rho g x \, ,$$

è facile verificare che effettuando le derivate dei parametri della tensione e sostituendole nelle (122), queste risultano identicamente soddisfatte.

Sostituendo poi nell'equazione di congruenza (121), si ottiene:

$$(124) \qquad \Delta^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \, \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \, ,$$

ossia:

$$\Delta^2 \Delta^2 F = 0 \, :$$

la funzione F deve pertanto soddisfare alla *condizione di biarmonicità*, Con l'ausilio di essa lo studio dei sistemi piani viene ridotto a ricercare una soluzione della equazione differenziale del quarto ordine (124), la quale soddisfi alle equazioni ai limiti.

La funzione così definita viene chiamata *funzione degli sforzi* o *funzione di Airy*.

47 — I sistemi piani in coordinate polari.

Lo studio di taluni sistemi piani viene facilitato dall'impiego di coordinate polari. Ci limitiamo qui a trattare il caso particolarmente semplice in cui il sistema presenti un centro di simmetria.

Scelto tale centro come polo del riferimento (fig. 20), prendiamo in esame un elemento del sistema compreso tra le superfici cilindriche di raggi r, $r+dr$, e i piani di anomalie φ, $\varphi+d\varphi$; sia unitario lo spessore del sistema. Indichiamo con σ_r e σ_t le tensioni normali rispettivamente secondo il raggio e secondo la tangente; entrambe sono indipendenti da φ, e la tensione tangenziale $\tau_{rt} = \tau_{tr}$ è ovviamente nulla perchè, per simmetria, i piani normali ai raggi sono principali.

L' equilibrio alla traslazione nelle direzione del raggio, con le notazioni della figura e per il caso di forze di massa nulle, fornisce:

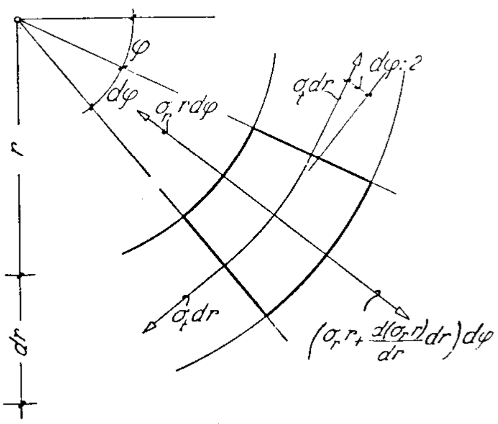

Fig. 20

$$\left[\sigma_r r + \frac{d(\sigma_r r)}{dr} dr\right] d\varphi - \sigma_r r\, d\varphi - - 2\,\sigma_t dr \frac{d\varphi}{2} = 0\,,$$

da cui semplificando:

$$\frac{d(\sigma_r r)}{dr} - \sigma_t = 0$$

o anche:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_t - \sigma_r}{r}\,. \tag{125}$$

Per la determinazione delle incognite σ_t e σ_r l' equilibrio dello stato di tensione piano fornisce dunque una sola equazione, confermandosi così tale stato semplicemente iperstatico.

La condizione di biarmonicità per la funzione di Airy, espressa in coordinate cartesiane dalla (124), si trasforma nell'altra:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial F^2}{\partial \varphi^2}\right) = 0\ (^1)\,. \tag{126}$$

(1) - Notando infatti che è:

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad , \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,,$$

e perciò anche:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\varphi \qquad , \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\varphi\,,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\operatorname{sen}\varphi}{r} \qquad , \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos\varphi}{r}\,;$$

avremo:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\operatorname{sen}\varphi\,;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\operatorname{sen}\varphi\right) =$$

che, in virtù della simmetria, può scriversi:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}\right)= \tag{127}$$

$$=\frac{d^4F}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3F}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{dF}{dr}=0\,.$$

Com'è facile verificare, la (125) è soddisfatta dalle componenti di tensione:

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}\quad,\qquad \sigma_t=\frac{d^2F}{dr^2}\,. \tag{128}$$

Affinchè la distribuzione di tensioni sia possibile, la F deve inoltre verificare la (127). Questa, con la sostituzione $r=e^t$, si traduce in una equazione differenziale a coefficienti costanti, la cui soluzione generale è della forma:

$$F=A\ln r+Br^2\ln r+Cr^2+D\,, \tag{129}$$

come si prova facilmente sostituendone le derivate nella condizione di biarmonicità. Le quattro costanti d'integrazione che vi figurano restano determinate dalle condizioni ai limiti.

Sostituendo le derivate prima e seconda della F nelle (128), si ottengono infine le espressioni dei parametri della tensione:

$$\begin{cases} \sigma_r=\quad\dfrac{A}{r^2}+B(1+2\ln r)+2C\,, \\ \sigma_t=-\dfrac{A}{r^2}+B(3+2\ln r)+2C\,. \end{cases} \tag{130}$$

Le costanti A e B possono avere valori diversi da zero soltanto quan-

---

$$=\frac{\partial^2F}{\partial r^2}\cos^2\varphi-2\frac{\partial^2F}{\partial\varphi\,\partial r}\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{r}+\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{r}+2\frac{\partial F}{\partial\varphi}\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{r^2}+\frac{\partial^2F}{\partial\varphi^2}\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{r^2}\,.$$

Analogamente troviamo:

$$\frac{\partial^2F}{\partial y^2}=\frac{\partial^2F}{\partial r^2}\operatorname{sen}^2\varphi+2\frac{\partial^2F}{\partial\varphi\,\partial r}\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{r}+\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\cos^2\varphi}{r}-2\frac{\partial F}{\partial\varphi}\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{r^2}+\frac{\partial^2F}{\partial\varphi^2}\frac{\cos^2\varphi}{r^2}\,.$$

Sommando le due derivate seconde della F:

$$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}-\frac{\partial^2F}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2F}{\partial\varphi^2}$$

e tenendo presente la (124), si ottiene la (126).

do il sistema presenti una cavità centrale, come nel caso di un anello o di un tubo; se il sistema è pieno, devono necessariamente essere nulle le tensioni al centro, perchè altrimenti, per $r = 0$, entrambe vi prenderebbero valori infiniti. In questo secondo caso l'unica soluzione simmetrica possibile è semplicemente:

$$\sigma_r = \sigma_t = 2C:$$

il sistema sopporta una trazione o una compressione uniforme in tutte le direzioni del suo piano.