Capitolo VI

SOLIDI ISOTROPI

38 – Costanti di elasticità.

Abbiamo finora ammesso che le proprietà elastiche del solido siano diverse da punto a punto e, nello stesso punto, diverse anche nelle varie direzioni. Esse dipendono allora, come si è visto al numero 24, da ventuno costanti di elasticità *in ciascun punto* del solido.

Dovremo ora abbandonare tale generalità di ipotesi, per precisare definitivamente le proprietà elastiche dei solidi intorno ai quali verte il nostro studio.

Faremo l'ipotesi che il solido elastico sia *omogeneo ed isotropo, ossia ch'esso sia ugualmente costituito in tutti i suoi punti e secondo tutte le direzioni uscenti da ogni suo punto.*

L'ipotesi dell'omogeneità equivale alla condizione che le ventuno costanti d'elasticità siano indipendenti dalle coordinate del punto, che si mantengano cioè costanti in tutto il solido; quella dell'isotropia rende invece quelle stesse costanti indipendenti dall'orientamento degli assi coordinati.

I corpi naturali soddisfano spesso assai imperfettamente a tali ipotesi; tuttavia omogeneità ed isotropia vengono regolarmente ammesse nelle applicazioni della teoria dell'elasticità in vista di notevolissime semplificazioni che ne vengono ai calcoli. D'altra parte l'esperienza dimostra che l'approssimazione che ne risulta è in generale sufficiente agli scopi cui i calcoli mirano.

Supponiamo per esempio di mutare solamente il verso dell'asse y_i: le componenti di deformazione relative alla nuova terna di riferimento si otterranno dalle (4) cambiando y_i in $-y_i$ e v_i in $-v_i$, ciò che fa semplicemente mutare di segno i parametri ε_{ik} ove è $k \neq i$, mentre rimangono immutati gli altri.

Al mutare del verso dell'asse y_i, le ε_{ik} con indici distinti possono pertanto comparire nell'espressione (63) della densità d'energia col segno positivo o con quello negativo; immutati restando tutti gli altri termini, possono cioè figurare positivi o negativi e con lo stesso valore assoluto quei termini della φ che contengono i detti parametri alla prima potenza, ossia i termini nelle costanti $a_{ik,jh}$ i cui indici soddisfano simultaneamente alle condizioni:

$$i \neq k \quad , \quad ik \neq jh .$$

Siccome φ è indipendente dal sistema di riferimento e non potrebbe conservare lo stesso valore al mutare di segno di quei termini ove essi fossero diversi da zero, se ne deduce che, per valori arbitrari delle componenti della deformazione, debbono annullarsi le costanti di elasticità che vi figurano come coefficienti, i cui indici soddisfano alle due condizioni sopra dichiarate.

Rimangono allora diverse da zero le costanti che non soddisfano:

ad alcuna delle due condizioni, cioè quelle del tipo $a_{ii,ii}$:

$$a_{11,11} \quad , \quad a_{22,22} \quad , \quad a_{33,33} ;$$

alla prima condizione, cioè le costanti del tipo $a_{ii,kk}$:

$$a_{11,22} \quad , \quad a_{11,33} \quad , \quad a_{22,33} ;$$

alla seconda condizione, cioè le costanti del tipo $a_{ik,ik}$:

$$a_{12,12} \quad , \quad a_{13,13} \quad , \quad a_{23,23} .$$

Le costanti vengono ridotte così da ventuno a nove; le rimanenti dodici, che abbiamo dimostrato essere nulle per un corpo elastico isotropo, prendono il nome di *costanti delle elasticità dissimmetriche.*

Dopo ciò la (55), scritta per le tensioni del tipo $\sigma_{ii} = \sigma_i$, ossia per le tensioni normali, prende la forma:

$$\sigma_i = \sum_{hh} a_{ii,hh} \varepsilon_h = a_{ii,11} \varepsilon_1 + a_{ii,22} \varepsilon_2 + a_{ii,33} \varepsilon_3 , \tag{84}$$

perchè gli indici della seconda coppia apposti alle a sono uguali, se tali sono anche quelli della prima, essendo nulle tutte le costanti per cui tale condizione non è verificata; scritta invece per i parametri della tensione del tipo $\sigma_{ik} = \tau_{ik}$, ossia per le tensioni tangenziali, diviene:

$$\tau_{ik} = \sum_{ik} a_{ik,ik}\, \varepsilon_{ik} = a_{ik,ik}\, \varepsilon_{ik} + a_{ik,ik}\, \varepsilon_{ik} \,,$$

o anche:

$$\tau_{ik} = a_{ik,ik}\, \gamma_{ik} \,. \tag{85}$$

Scriviamo ora per disteso le espressioni dei parametri della tensione, traendole dalle (84) e (85). Nel riferimento y_1, y_2, y_3, saranno:

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_1 = a_{11,11}\, \varepsilon_1 + a_{11,22}\, \varepsilon_2 + a_{11,33}\, \varepsilon_3 \,, \\ \sigma_2 = a_{22,11}\, \varepsilon_1 + a_{22,22}\, \varepsilon_2 + a_{22,33}\, \varepsilon_3 \,, \\ \sigma_3 = a_{33,11}\, \varepsilon_1 + a_{33,22}\, \varepsilon_2 + a_{33,33}\, \varepsilon_3 \,, \\ \tau_{12} = a_{12,12}\, \gamma_{12} \quad , \quad \tau_{13} = a_{13,13}\, \gamma_{13} \quad , \quad \tau_{23} = a_{23,23}\, \gamma_{23} \,. \end{array}\right. \tag{86}$$

Se invece li riferiamo alla nuova terna:

$$y'_i = y_{i+1} \,,$$

i parametri della tensione potranno ovviamente dedursi dalle (86) mediante permutazione ciclica degli indici nelle componenti della deformazione. Poichè i coefficienti debbono rimanere invariati in virtù della supposta isotropia, avremo:

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma'_1 = \sigma_2 = a_{11,11}\, \varepsilon_2 + a_{11,22}\, \varepsilon_3 + a_{11,33}\, \varepsilon_1 \,, \\ \sigma'_2 = \sigma_3 = a_{22,11}\, \varepsilon_2 + a_{22,33}\, \varepsilon_3 + a_{22,33}\, \varepsilon_1 \,, \\ \sigma'_3 = \sigma_1 = a_{33,11}\, \varepsilon_2 + a_{33,22}\, \varepsilon_3 + a_{33,33}\, \varepsilon_1 \,, \\ \tau'_{12} = \tau_{23} = a_{12,12}\, \gamma_{23} \quad , \quad \tau'_{23} = \tau_{31} = a_{23,23}\, \gamma_{31} \quad , \quad \tau'_{31} = \tau_{12} = a_{31,31}\, \gamma_{12} \,. \end{array}\right. \tag{87}$$

Dal confronto con le precedenti espressioni si deduce dunque che, per valori arbitrari delle componenti della deformazione, debbono essere verificate le uguaglianze:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11,11} = a_{22,22} = a_{33,33} \,, \\ a_{11,22} = a_{22,33} = a_{33,11} \,, \\ a_{12,12} = a_{23,23} = a_{31,31} \,. \end{array}\right. \tag{88}$$

Le costanti di elasticità si riducono così a tre sole tra loro distinte.

* * *

Identiche riduzioni si verificano naturalmente nei coefficienti c.

Annullandosi dapprima tutti i coefficienti dei termini contenenti le τ alla prima potenza nella (64), le (56) possono scriversi:

$$\varepsilon_i = \sum_k c_{ii,kk}\,\sigma_k\ ,$$

$$\gamma_{ik} = 2\,\varepsilon_{ik} = 2\,(c_{ik,ik}\,\sigma_{ik} + c_{ik,ik}\,\sigma_{ki}) = 4\,c_{ik,ik}\,\tau_{ik}\ ,$$

e per disteso:

$$(89)\qquad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_1 &= c_{11,11}\,\sigma_1 + c_{11,22}\,\sigma_2 + c_{11,33}\,\sigma_3\ ,\\ \varepsilon_2 &= c_{22,11}\,\sigma_1 + c_{22,22}\,\sigma_2 + c_{22,33}\,\sigma_3\ ,\\ \varepsilon_3 &= c_{33,11}\,\sigma_1 + c_{33,22}\,\sigma_2 + c_{33,33}\,\sigma_3\ ,\\ \gamma_{12} = 4\,c_{12,12}\,\tau_{12}\quad &,\quad \gamma_{23} = 4\,c_{23,23}\,\tau_{23}\quad ,\quad \gamma_{31} = 4\,c_{31,31}\,\tau_{31}\ . \end{aligned}\right.$$

Osservando poi che i rimanenti coefficienti sono legati da relazioni analoghe alle (88), e ponendo:

$$(90)\qquad \left\{\begin{aligned} c_{11,11} &= c_{22,22} = c_{33,33} = \frac{1}{E}\ ,\\ c_{11,22} &= c_{22,33} = c_{33,11} = -\frac{1}{mE}\ ,\\ c_{12,12} &= c_{23,23} = c_{31,31} = \frac{1}{4G}\ , \end{aligned}\right.$$

le (89) divengono:

$$(91)\qquad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{m}\right),\\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \frac{\sigma_3+\sigma_1}{m}\right),\\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{m}\right),\\ \gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G}\quad &,\quad \gamma_{23} = \frac{\tau_{23}}{G}\quad ,\quad \gamma_{31} = \frac{\tau_{31}}{G}\ . \end{aligned}\right.$$

Chiameremo:

E *modulo d'elasticità normale* o *modulo di Young*,

G *modulo d'elasticità tangenziale*,

$\frac{1}{m}$ *coefficiente di contrazione laterale* o *coefficiente di Poisson*.

È facile constatare che le prime due delle tre costanti di elasticità alle quali in definitiva ci siamo ridotti nel caso di corpi elastici isotropi, cioè i moduli d'elasticità, hanno le dimensioni di una tensione; essi si esprimono di regola in t/cm^2, talvolta anche in kg/cm^2 o in kg/mm^2; la terza è invece una costante adimensionale.

* * *

Indicata con s la somma delle tre tensioni normali, la generica delle prime tre delle (91) si può anche scrivere:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{E}\left(\sigma_i + \frac{\sigma_i}{m} - \frac{1}{m}\sum_k \sigma_k\right) = \frac{1}{mE}\left[(m+1)\,\sigma_i - s\right] . \tag{92}$$

Sommando rispetto all'indice i e ricordando l'espressione di Θ, si ottiene:

$$\Theta = \sum_i \varepsilon_i = \frac{1}{mE}\sum_i\left[(m+1)\,\sigma_i - s\right] = \frac{m-2}{mE}\,s . \tag{93}$$

Possiamo dunque affermare che *in un solido omogeneo ed isotropo la somma delle tre componenti normali di tensione è proporzionale al coefficiente di dilatazione cubica.*

Posto ora:

$$\sigma_i = s_i ,$$

supposto cioè che gli assi di riferimento abbiano le direzioni principali degli sforzi, sarà:

$$\tau_{ik} = 0$$

e, in virtù delle ultime tre delle (91), anche:

$$\gamma_{ik} = 0 .$$

Ma queste ultime condizioni non possono verificarsi se non quando risulti:

$$\varepsilon_i = e_i ,$$

cioè quando gli assi di riferimento abbiano le direzioni principali della deformazione; concludiamo quindi che *in ciascun punto d' un solido isotropo le direzioni principali delle deformazioni coincidono con le direzioni principali delle tensioni.*

La densità d' energia in funzione dei parametri della tensione, espressa in generale dalla (64), prende ora la forma:

$$\varphi = \frac{1}{2}\left[(c_{11,11}\sigma_1^2 + c_{22,22}\sigma_2^2 + c_{33,33}\sigma_3^2) + 2(c_{11,22}\sigma_1\sigma_2 + c_{22,33}\sigma_2\sigma_3 + c_{33,11}\sigma_3\sigma_1) + \right.$$
$$\left. + 4(c_{12,12}\tau_{12}^2 + c_{23,23}\tau_{23}^2 + c_{31,31}\tau_{31}^2)\right],$$

e avuto riguardo alle (90):

$$(94) \qquad \varphi = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{mE}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + \frac{1}{2G}(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2).$$

39 — **Relazione tra le costanti di elasticità.**

Sottraendo la seconda delle (91) dalla prima, si ottiene:

$$mE(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = (m+1)(\sigma_1 - \sigma_2).$$

Poichè la scelta degli assi di riferimento non è legata ad alcuna condizione, fra i coefficienti di dilatazione ε_a, ε_b relativi a due direzioni ortogonali arbitrarie e le tensioni normali σ_a, σ_b agenti sugli elementi superficiali perpendicolari a tali direzioni, sussisterà una relazione analoga alla precedente; si avrà cioè:

$$(95) \qquad mE(\varepsilon_a - \varepsilon_b) = (m+1)(\sigma_a - \sigma_b).$$

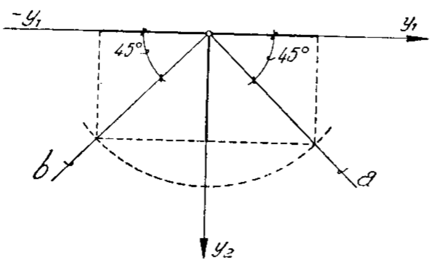

Fig. 18

Assumiamo dette direzioni parallele al piano coordinato $y_1 y_2$, e precisamente (fig. 18):

l' elemento lineare a formante angoli di 45° con le direzioni y_1, y_2, definito cioè in direzione dalla terna di coseni:

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_3 = 0;$$

l' elemento lineare b situato nel quadrante $-y_1$, y_2, e normale al precedente, ossia avente i coseni direttori:

$$\nu_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \nu_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \nu_3 = 0.$$

Applicando la (6), avremo allora:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}\,\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\,\gamma_{12} \quad , \quad \varepsilon_b = \frac{1}{2}\,\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon_2 - \frac{1}{2}\,\gamma_{12}\,;$$

dalle quali, sottraendo membro a membro, si deduce:

(96) $$\varepsilon_a - \varepsilon_b = \gamma_{12}\,.$$

Dalla (34) si ha poi:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}\,\sigma_1 + \frac{1}{2}\,\sigma_1 + \tau_{12} \quad , \quad \sigma_b = \frac{1}{2}\,\sigma_1 + \frac{1}{2}\,\sigma_2 - \tau_{12}\,,$$

da cui, sottraendo ancora membro a membro:

(97) $$\sigma_a - \sigma_b = 2\,\tau_{12}\,.$$

Introducendo le (96) e (97) nella (95), questa diviene:

$$m E \gamma_{12} = 2\,(m+1)\,\tau_{12}\,;$$

ma, per la quarta delle (91), è pure:

$$G \gamma_{12} = \tau_{12}\,;$$

sussiste dunque la relazione:

(98) $$G = \frac{1}{2}\,\frac{m}{m+1}\,E\,,$$

il modulo d'elasticità tangenziale dipende cioè dal modulo d'elasticità normale e dal coefficiente di contrazione laterale. *Le costanti* E *ed* m *bastano dunque da sole a definire completamente le proprietà elastiche d'un corpo omogeneo ed isotropo.*

40 — Componenti speciali di tensione.

Risolviamo la (92) rispetto a σ_i e sostituiamo in essa l'espressione di s che si trae dalla (93); avremo:

$$\sigma_i = \frac{mE}{m+1}\left(\frac{\Theta}{m-2} + \varepsilon_i\right) = 2G\left(\frac{\Theta}{m-2} + \varepsilon_i\right).$$

Introducendo la costante di Lamé:

$$\lambda = \frac{2G}{m-2} = \frac{mE}{(m+1)(m-2)} \tag{99}$$

e osservando che le componenti tangenziali risultano ovviamente dalle ultime tre delle (91), le (54), nel caso particolare d' un solido isotropo, si scrivono:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \lambda\Theta + 2G\varepsilon_i\,, \\ \tau_{ik} &= G\gamma_{ik} = 2G\varepsilon_{ik}\,. \end{aligned} \tag{100}$$

41 — Limiti teorici del coefficiente di Poisson.

Poichè la densità d' energia φ, espressa dalla (94), deve essere sempre positiva per valori arbitrari delle componenti speciali di tensione, dovrà anzitutto essere:

$$\frac{1}{E} > 0 \qquad , \qquad \frac{1}{G} > 0\,;$$

avuto riguardo alla (98), ciò importa pure:

$$\frac{m+1}{m} > 0\,,$$

ovvero:

$$\frac{1}{m} > -1\,.$$

Ponendo poi nella (94) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, $\tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$, si ottiene:

$$\varphi = \frac{3\sigma^2}{E}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right),$$

da cui segue:

$$\frac{1}{m} < \frac{1}{2}$$

Teoricamente dunque il coefficiente di contrazione trasversale è compreso tra -1 e $1/2$.

42 — Equazioni dell' equilibrio elastico.

Si è già detto che il problema dell' equilibrio elastico può essere risolto assumendo come incognite le componenti di spostamento v_i. Vediamo intanto come si esprimono per un solido omogeneo ed isotropo le equazioni indefinite di equilibrio, appunto in termini di spostamenti.

Passando anzitutto dalle tensioni alle deformazioni per mezzo delle (100), le (28) divengono:

$$\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial y_k} + 2G \sum_i \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial y_i} + Y_k = 0 ,$$

e in funzione degli spostamenti, successivamente:

$$\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial y_k} + G \sum_i \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k} + \frac{\partial v_k}{\partial y_i}\right) + Y_k = 0 ,$$

$$\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial y_k} + G \frac{\partial}{\partial y_k} \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial y_i} + G \sum_i \frac{\partial^2 v_k}{\partial y_i^2} + Y_k = 0 ;$$

introducendovi poi l' operatore di Laplace $\Delta^2 v_k = \sum_i \frac{\partial^2 v_k}{\partial y_i^2}$ e notando che è $\sum_i \frac{\partial v_i}{\partial y_i} = \Theta$, si ottiene:

$$G \Delta^2 v_k + (\lambda + G) \frac{\partial \Theta}{\partial y_k} + Y_k = 0 .$$

Esprimendo ancora la costante di Lamé in funzione del modulo di elasticità tangenziale a norma della (99), si perviene in definitiva alle equazioni:

$$G\left(\Delta^2 v_k + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \Theta}{\partial y_k}\right) + Y_k = 0 , \tag{101}$$

che equivalgono alla espressione vettoriale:

$$G\left(\Delta^2 \mathbf{v} + \frac{m}{m-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}\right) + \mathbf{Y} = 0 . \tag{102}$$

Per un sistema elastico in moto le (101) e (102) si scrivono ovviamente:

$$G\left(\Delta^2 v_k + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \Theta}{\partial y_k}\right) + Y_k - \rho \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} = 0 , \tag{103}$$

$$G\left(\Delta^2 \mathbf{v} + \frac{m}{m-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}\right) + \mathbf{Y} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = 0 . \tag{104}$$

Derivando ora la (101) rispetto a y_k e sommando rispetto all'indice $\boldsymbol{k}$, avremo successivamente:

$$G\left(\Delta^2 \sum_k \frac{\partial v_k}{\partial y_k} + \frac{m}{m-2} \sum_k \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y_k^2}\right) + \sum_k \frac{\partial Y_k}{\partial y_k} = 0\,,$$

(105) $$2\,G \frac{m-1}{m-2}\,\Delta^2 \Theta + \operatorname{div} \mathbf{Y} = 0\,.$$

Se sono nulle o costanti in tutto il corpo le forze di massa, si ottiene:

$$2\,G \frac{m-1}{m-2}\,\Delta^2 \Theta = 0\,,$$

da cui, per la dilatazione cubica Θ, la *condizione di armonicità*:

(106) $$\Delta^2 \Theta = 0\,.$$

Quanto alle condizioni ai limiti (32), sostituendovi le (100) e passando agli spostamenti, si trasformano successivamente:

$$\lambda\,\Theta\,n_k + 2\,G \sum_i \varepsilon_{ik} n_i = F_k + R_k\,,$$

$$G\left[\frac{2}{m-2}\,\Theta\,n_k + \sum_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k} + \frac{\partial v_k}{\partial y_i}\right) n_i\right] = F_k + R_k\,,$$

per tradursi in ultimo nelle equazioni:

(107) $$G\left(\frac{2}{m-2}\,\Theta\,n_k + \frac{\partial}{\partial y_k} \sum_i v_i n_i + \sum_i \frac{\partial v_k}{\partial y_i}\,n_i\right) = F_k + R_k\,.$$

Le (101) e le (107), associate alle equazioni di compatibilità, definiscono in modo completo le funzioni v_i. Note queste, si deducono in modo ovvio i parametri della deformazione e della tensione.

* * *

Se si assumono come incognite le componenti di tensione, la generica delle equazioni (11) del primo gruppo:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_i}{\partial y_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_j}{\partial y_i^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial y_j\,\partial y_i}\,,$$

tenute presenti le (92), diviene:

$$\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\left[(m+1)\,\sigma_i - s\right] + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\left[(m+1)\,\sigma_j - s\right] = \frac{mE}{G}\,\frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial y_i\,\partial y_j}\,,$$

e successivamente avuto riguardo alla (98):

$$\frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial y_j^2} + \frac{\partial^2 \sigma_j}{\partial y_i^2} - \frac{1}{m+1}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y_j^2}\right) = 2\frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}\,.$$

Similmente dalla generica delle equazioni (11) del secondo gruppo:

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_i}{\partial y_j \partial y_k} = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(-\frac{\partial \gamma_{jk}}{\partial y_i} + \frac{\partial \gamma_{ki}}{\partial y_j} + \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial y_k}\right),$$

avremo:

$$\frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial y_j \partial y_k} - \frac{1}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial y_j \partial y_k} = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(-\frac{\partial \tau_{jk}}{\partial y_i} + \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial y_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial y_k}\right).$$

Utilizzando le equazioni di Cauchy, le precedenti assumono forma particolarmente semplice, cui più facilmente si perviene col seguente procedimento diretto.

Avuto riguardo alla (98), scriviamo la generica delle (92) nella forma:

$$\varepsilon_k = \frac{\partial v_k}{\partial y_k} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_k - \frac{s}{m+1}\right);$$

derivando due volte rapporto a y_i e sommando rispetto all'indice i, avremo:

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\Delta^2 v_k = \frac{1}{2G}\left(\Delta^2 \sigma_k - \frac{\Delta^2 s}{m+1}\right);$$

d' altra parte si ha dalla (101):

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\Delta^2 v_k = -\frac{m}{m-2}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y_k^2} - \frac{1}{G}\frac{\partial Y_k}{\partial y_k};$$

sicchè, uguagliando:

$$\Delta^2 \sigma_k + \frac{2Gm}{m-2}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y_k^2} = -2\frac{\partial Y_k}{\partial y_k} + \frac{\Delta^2 s}{m+1},$$

ovvero, tenendo presenti le (93) e (98), anche:

$$\Delta^2 \sigma_k + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial y_k^2} = -2\frac{\partial Y_k}{\partial y_k} + \frac{\Delta^2 s}{m+1},$$

e osservando che la (105) equivale alla:

$$\frac{m-1}{m+1}\Delta^2 s + \operatorname{div}\mathbf{Y} = 0\,, \tag{108}$$

finalmente:

$$\Delta^2 \sigma_k + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 s}{\partial y_k^2} = -2 \frac{\partial Y_k}{\partial y_k} - \frac{1}{m-1} \sum_i \frac{\partial Y_i}{\partial y_i} . \tag{109}$$

Con analogo procedimento si ricavano le altre equazioni:

$$\Delta^2 \tau_{ik} + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 s}{\partial y_i \, \partial y_k} = -\left(\frac{\partial Y_i}{\partial y_k} + \frac{\partial Y_k}{\partial y_i} \right) . \tag{110}$$

Se poi sono nulle o costanti in tutto il corpo le forze di massa, le (109) e (110) prendono la forma unica delle *equazioni di Beltrami*:

$$\Delta^2 \sigma_{ik} + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 s}{\partial y_i \, \partial y_k} = 0 ; \tag{111}$$

Derivando infine la (111) due volte rapporto a y_j, sommando rispetto all'indice di questa coordinata, e tenendo presenti le (93) e (106), avremo, per le componenti della tensione, la *condizione di biarmonicità*:

$$\Delta^2 \Delta^2 \sigma_{ik} = 0 . \tag{112}$$

Le (109) e (110), le (111) oppure le (112) nel caso di forze di massa nulle o costanti, tengono luogo delle equazioni di congruenza per un corpo isotropo. Esse si prestano bene alla risoluzione del problema dell'equilibrio elastico quando siano esplicitamente date tutte le forze superficiali agenti sul corpo; questo deve in tal caso riguardarsi come libero da vincoli, e le equazioni ai limiti prendono la forma semplificata:

$$\sum_i \sigma_{ik} n_i = F_k .$$

Poichè le condizioni di congruenza in termini di tensioni sono equazioni alle derivate parziali seconde, si può affermare che se il sistema di forze esterne è tale che le equazioni indefinite ed ai limiti siano soddisfatte da componenti del tensore degli sforzi costanti oppure lineari nelle coordinate, queste medesime componenti risolvono il problema dell'equilibrio elastico, in quanto esse certamente soddisfano anche alle equazioni di congruenza.