Capitolo IV

L'ENERGIA POTENZIALE ELASTICA

23 – Il tensore di elasticità.

Si è visto che in un punto M generico del solido elastico lo stato di tensione è caratterizzato da sei componenti speciali del tensore degli sforzi $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$, lo stato di deformazione da altrettante componenti del tensore di deformazione $\varepsilon_{jh} = \varepsilon_{hj}$.

Le relazioni che intercedono fra le componenti del primo e quelle del secondo tensore dipendono naturalmente da proprietà del solido, circa le quali non ci siamo fin qui pronunciati.

Ammettiamo ora, come è lecito per le piccole deformazioni, che ciascuna componente di tensione sia una funzione lineare ed omogenea delle sei componenti di deformazione, che valgano dunque le relazioni:

$$\sigma_{ik} = \sum_{jh} a_{ik,jh} \, \varepsilon_{jh} \, , \tag{54}$$

dove i coefficienti $a_{ik,jh}$, dipendenti appunto da quelle certe proprietà e che diremo *costanti di elasticità*, sono costanti in ciascun punto, ma variabili in generale da punto a punto. Esse sono formalmente nel numero delle disposizioni con ripetizione a 4 a 4 degli indici *1*, *2*, *3*, ossia $3^4 = 81$; ma essendo manifestamente:

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} = \sum_{jh} a_{ik,jh} \, \varepsilon_{jh} = \sum_{jh} a_{ki,jh} \, \varepsilon_{jh} = \sum_{hj} a_{ki,hj} \, \varepsilon_{hj} \, ,$$

stanno le uguaglianze:

$$a_{ik,jh} = a_{ki,jh} = a_{ki,hj} \, , \tag{55}$$

e perciò le costanti distinte sono nel numero delle sei combinazioni con ripetizione del tipo $ik \equiv ki$ per ciascuna delle altrettante analoghe combinazioni del tipo $jh \equiv hj$, ossia 36.

Le costanti ora definite si possono riguardare come le componenti d'un tensore quadruplo: *il tensore di elasticità.*

Ammetteremo che il determinante A dei coefficienti $a_{ik,jh}$ delle (54) sia diverso da zero, talchè sia possibile, assegnate le componenti di tensione, dedurre univocamente, risolvendo il sistema, le componenti di deformazione. Queste, pertanto, saranno esse pure funzioni lineari ad omogenee delle componenti di tensione:

(56) $$\varepsilon_{ik} = \sum_{jh} c_{ik,jh}\, \sigma_{jh} ,$$

i cui coefficienti sono immediatamente deducibili da quelli del precedente sistema, nella forma:

(57) $$c_{pq,rs} = \frac{A_{pq,rs}}{A} ,$$

quado $A_{pq,rs}$ sia il complemento algebrico dell'elemento $a_{pq,rs}$ nel determinante A delle $a_{ik,jh}$.

L'ipotesi ora fatta concorda con quella formulata in principio circa la perfetta elasticità del solido ideale: la relazione posta fra le tensioni e le deformazioni richiede infatti che la deformazione si annulli, ossia che il solido riprenda la sua forma iniziale, al cessare dello stato di tensione.

24 — Lavoro elementare delle forze elastiche. Condizioni per l'esistenza del potenziale elastico.

Supponiamo ora isolato dal solido il parallelepipedo rettangolo più volte considerato e proponiamoci di calcolare il lavoro che le forze ad esso applicate producono quando le componenti di deformazione subiscono incrementi $\delta\varepsilon_{ik}$ talmente piccoli da poter ammettere che le componenti di tensione si mantengano inalterate.

Trascurando gl'infinitesimi di ordine superiore, potremo ritenere agire certe tensioni $-\sigma_{ik}$ sulle faccie del parallelepipedo per il vertice M, tensioni uguali e contrarie alle precedenti sulle faccie opposte.

Ciascuna coppia di forze omonime ed uguali in valore assoluto agenti su due faccie opposte compie un lavoro uguale al prodotto della forza per lo spostamento relativo delle faccie valutato nella direzione della forza. Così le $\sigma_i\, dA_i$ e $-\sigma_i\, dA_i$, agenti sulle faccie normali all'asse y_i, che per l'incremento di deformazione supposto subiscono, parallelamente ad y_i, lo spostamento relativo $\delta\varepsilon dy_i$, compiono il lavoro:

$$\sigma_i dA_i \delta\varepsilon_i dy_i = \sigma_i \delta\varepsilon_i dV.$$

Per valutare il lavoro delle forze tangenziali $\sigma_{ik} dA_i$ e $-\sigma_{ik} dA_i$, premesso che $\delta\left(\frac{\partial v_k}{\partial y_i}\right)$ esprime la rotazione degli spigoli paralleli all'asse y_i (fig. 15), lo spostamento relativo delle faccie nella direzione delle forze è $\delta\left(\frac{\partial v_k}{\partial y_i}\right) dy_i$, ed il lavoro $\sigma_{ik} dA_i \delta\left(\frac{\partial v_k}{\partial y_i}\right) dy_i$.

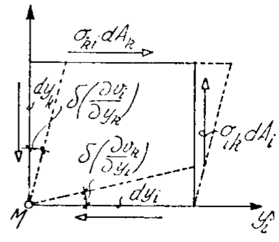

Fig. 15

D'altra parte, essendo $\delta\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k}\right)$ la rotazione degli spigoli paralleli all'asse y_i, lo spostamento relativo delle faccie normali a quest'asse nella direzione y_i sarà $\delta\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k}\right) dy_k$, ed il lavoro compiuto dalle $\sigma_{ki} dA_k$ e $-\sigma_{ki} dA_k$:

$$\sigma_{ki} dA_k \delta\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k}\right) dy_k .$$

Osservando poi che $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ e $\delta\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k}\right) + \delta\left(\frac{\partial v_k}{\partial y_i}\right) = 2\delta\varepsilon_{ik}$, possiamo esprimere il lavoro eseguito dalle due coppie di forze tangenziali con l' unico termine:

$$2\,\sigma_{ik} \delta\varepsilon_{ik} dV .$$

Ragionando analogamente per le rimanenti coppie di forze, sommando tutti i lavori e dividendo per dV, si perviene, in definitiva, alla espressione del lavoro per unità di volume:

$$\delta\varphi = \sum_{ik} \sigma_{ik} \delta\varepsilon_{ik} . \tag{58}$$

Ammettiamo ora che il sistema delle forze elastiche sia *conservativo*, o in altri termini che il lavoro speso per produrre una deformazione dipenda esclusivamente dalle configurazioni estreme del corpo elastico, sicchè si trasformi integralmente in energia potenziale, suscettibile di trasformarsi di nuovo integralmente in lavoro quando si annulli la deformazione. Esso dovrà allora potersi esprimere come differenza dei valori che una certa funzione — *funzione potenziale* — assume in corrispondenza delle configurazioni iniziale e finale del sistema.

Perchè ciò si verifichi, ossia perchè le forze elastiche ammettano un potenziale, è necessario e sufficiente che il lavoro elementare $\delta\varphi$, espresso dalla (58), sia il differenziale esatto d'una certa funzione:

$$\varphi(\varepsilon_{ik})$$

delle sei componenti del tensore di deformazione. Dovranno allora, come è noto dall'analisi, sussistere le $\binom{6}{2} = 15$ uguaglianze del tipo:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial \varepsilon_{jh}} = \frac{\partial \sigma_{jh}}{\partial \varepsilon_{ik}}, \tag{59}$$

le quali, con riguardo alle (54), si traducono nelle altre:

$$a_{ik,jh} = a_{jh,ik}. \tag{60}$$

Risultano così uguali le costanti di elasticità che si ottengono scambiandovi le due coppie di indici. Tolte le sei del tipo $a_{ik,ik}$, caratterizzate cioè da coppie identiche, le quali evidentemente non restano modificate dallo scambio suddetto, le rimanenti trenta si riducono perciò a sole quindici distinte.

In virtù dell'ultima ipotesi introdotta circa l'esistenza del potenziale elastico, le costanti di elasticità si riducono dunque da 36 a 21.

Naturalmente sarà anche:

$$c_{ik,jh} = c_{jh,ik}, \tag{61}$$

e pertanto anche i coefficienti delle forme lineari (56) si riducono al numero di soli 21 distinti.

25 — Energia potenziale elastica.

Del potenziale elastico φ per unità di volume è nota dalla (58) la variazione prima. La funzione φ è definita perciò a meno d'una costante, e possiamo trovarne la variazione totale $\varphi - \varphi_0$ ch'essa subisce quando le componenti di deformazione crescono da valori nulli ai valori finali ε_{ik} cui corrispondono le componenti di tensione σ_{ik}.

Ammessa l'esistenza del potenziale φ, è noto che l'incremento di esso dipende esclusivamente dagli stati iniziale e finale di deformazione, non dalla legge secondo la quale la deformazione stessa si produce. Possiamo perciò supporre che tutte le componenti di deformazione crescano proporzionalmente ad un certo parametro α variabile tra zero (stato iniziale) e l'unità (stato finale), sicchè ad un certo istante esse abbiano i valori:

$$\varepsilon'_{ik} = \alpha\,\varepsilon_{ik}\,,$$

ai quali, in dipendenza delle (54), corrispondono le componenti speciali di tensione:

$$\sigma'_{ik} = \alpha\,\sigma_{ik}\,.$$

A norma della (58), l'incremento di φ corrispondente ad un incremento infinitesimo delle componenti di deformazione, ossia del parametro α, sarà:

$$\delta\varphi = \sum_{ik} \alpha\,\sigma_{ik}\,\delta(\alpha\,\varepsilon_{ik}) = \alpha \sum_{ik} \sigma_{ik}\,\delta(\alpha\,\varepsilon_{ik})\,;$$

e, osservando che le ε_{ik} devono riguardarsi costanti, anche:

$$\delta\varphi = \alpha\,\delta\alpha \sum_{ik} \sigma_{ik}\,\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\,\delta(\alpha^2) \sum_{ik} \sigma_{ik}\,\varepsilon_{ik}\,.$$

Per la variazione totale di α tra zero e l'unità avremo quindi:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{2} \sum_{ik} \sigma_{ik}\,\varepsilon_{ik}\,;$$

ammettendo poi che *sia nulla l'energia nell'elemento non deformato*, posto cioè per convenzione:

$$\varphi_0 = 0\,,$$

l'*energia potenziale elastica per unità di volume* o *densità di energia* può scriversi:

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{ik} \sigma_{ik}\,\varepsilon_{ik}\,. \tag{62}$$

Essa può esprimersi come *forma quadratica* o delle sole componenti di deformazione, oppure delle sole componenti di tensione:

nel primo caso, avuto riguardo alle (54), avremo:

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{ik,jh} a_{ik,jh}\,\varepsilon_{ik}\,\varepsilon_{jh}\,; \tag{63}$$

nel secondo, tenute presenti le (56):

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{ik,jh} c_{ik,jh}\,\sigma_{ik}\,\sigma_{jh}\,. \tag{64}$$

La (63) e la sua *reciproca* (64) contengono formalmente 81 termini, che in realtà si riducono al numero di costanti a o c distinte e diverse da zero, ossia a 21. É noto d'altronde che i termini di forme quadratiche di sei variabili, come quelle esprimenti la densità d'energia, sono nel numero delle combinazioni con ripetizione di 6 elementi a due a due, ossia $\binom{6}{2} + 6 = 21$.

Una deformazione non può prodursi senza spendere una certa quantità di lavoro: la funzione φ deve quindi essere essenzialmente positiva per valori qualunque, purchè non tutti nulli, delle componenti di deformazione; ciò importa come condizione necessaria e sufficiente che sia positivo il discriminante della funzione e tutti i suoi minori. Ne derivano condizioni cui debbono soddisfare i coefficienti a e c, sulle quali non ci soffermiamo; ci limitiamo soltanto a notare che la supposta positività di φ implica, fra l'altro, che nelle due espressioni della φ siano positivi i coefficienti dei termini quadratici contraddistinti dalla medesima coppia di indici (del tipo $a_{ik,ik}$, $c_{ik,ik}$).

Dalla (63), derivando rispetto a ε_{pq}, si trae:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{pq}} = \frac{1}{2} \sum_{ik,jk} a_{ik,jh} \left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial \varepsilon_{pq}} \varepsilon_{jh} + \frac{\partial \varepsilon_{jh}}{\partial \varepsilon_{pq}} \varepsilon_{ik} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{jh} a_{pq,jh} \varepsilon_{jh} + \sum_{ik} a_{ik,pq} \varepsilon_{ik} \right),$$

e quindi, per le (54):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{pq}} = \sigma_{pq}. \tag{65}$$

Diremo pertanto che *la derivata dell'energia potenziale elastica espressa in funzione delle componenti di deformazione, rapporto ad una qualunque di queste componenti, è uguale alla corrispondente componente speciale di tensione.*

Similmente, derivando la (56) rispetto a σ_{pq}, si ottiene:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{pq}} = \varepsilon_{pq}: \tag{66}$$

vale quindi anche l'altro teorema: *la derivata dell'energia potenziale elastica espressa in funzione delle tensioni, rapporto ad una componente qualunque, è uguale alla corrispondente componente di deformazione.*

26 — Energia vincolata. Lavoro di deformazione.

Diremo *stato naturale* del corpo elastico lo stato in cui questo si trova quando non è soggetto all'azione di alcuna forza esterna. Diremo invece *stato non deformato* quello nel quale il solido si trova quando non è soggetto all'azione di forze esterne e sono anche nulle le componenti di deformazione in ogni punto.

Non sempre infatti allo stato naturale corrisponde l'assenza di deformazioni e di tensioni in tutti gli elementi del solido.

Per mostrare come ciò possa accadere immaginiamo di praticare in un corpo elastico un taglio e quindi di alterare in modo arbitrario una o entrambe le faccie di questo mediante aggiunte o sottrazioni di strati sottilissimi di materia, per modo che esse non risultino più combacianti. Forziamo poi l'una contro l'altra le due porzioni di solido separate dal taglio, in modo opportuno e quanto basta a produrre la deformazione elastica necessaria per rendere combacianti le faccie: diremo allora che il solido ha subito una *distorsione*. Se in queste condizioni immaginiamo di saldare fra loro le due faccie del taglio, potremo rimuovere le azioni — *forze distorcenti* — che avevamo applicate per provocarne la giustapposizione, liberando così il corpo da ogni forza esterna; ma resteranno in esso, mantenute dalla connessione creata con la saldatura, le deformazioni e quindi le tensioni che gli avevamo impresse con il forzamento.

Un solido in queste condizioni lo diremo in stato di *coazione elastica* o di *autotensione*; per riportarlo allo stato non deformato dovremmo sciogliere tutte le connessioni implicanti stati di mutua costrizione come quello della saldatura nell'esempio ora citato.

Stati di autotensione si possono anche produrre con variazioni disuniformi di temperatura. Se, per esempio, scaldiamo la corona periferica d'un disco, essa tenderà a dilatarsi, ma ne sarà trattenuta più o meno energicamente dalla presenza della zona centrale; nel pezzo si producono pertanto tensioni e deformazioni che non dipendono da alcuna forza esterna.

Esempi di coazioni nei solidi reali si hanno nelle tensioni dovute all'ineguale raffreddamento del materiale nei pezzi di metallo o di vetro ottenuti con fusione, in quelle che si generano nei processi di saldatura, di laminazione, di fucinazione e di tempera di metalli, negli stati di costrizione dovuti a disuniformità di ritiro del calcestruzzo nelle strutture di cemento armato. Ancora nell'ambito dei solidi reali accade talvolta che in qualche regione del corpo venga superato il limite d'elasticità, talchè non sia più trascurabile in essa la quota plastica di deformazione; si originano allora deformazioni e spostamenti in generale non compatibili con la configurazione indeformata dell'intero corpo; nondimeno la compatibilità sussiste in virtù dello stato di coazione cui dà luogo la plasticizzazione. Le deformazioni plastiche operano cioè sul corpo in modo perfettamente analogo alle distorsioni.

Dovuti per lo più a cause inevitabili, gli stati di coazione vengono talvolta creati ad arte per migliorare le distribuzioni di tensioni generate dalle forze: tali sono i casi dell'autoforzamento delle artiglierie e della precompressione del cemento armato.

Nello stato di coazione la continuità del corpo sussiste in virtù della deformazione inerente alla coazione stessa; segue da ciò che i *parametri della deformazione relativa ad uno stato di autotensione non soddisfano alle equazioni di congruenza.*

Negli esempi citati di sopra i legami imposti sono interni, ma ovviamente stati di coazione sussistono anche se al corpo s'impongono vincoli che esso non può rispettare senza deformarsi. In tal caso i vincoli reagiscono anche in assenza di forze esplicite e lo stato di costrizione è proprio quello dovuto alla presenza delle loro reazioni.

In generale può dunque affermarsi che *un sistema elastico è in stato di autotensione quando gli sono imposti legami, interni od esterni, non compatibili colla sua configurazione indeformata.*

Ciò premesso, e supposto che allo stato naturale esistano nel punto generico del solido le componenti di deformazione $(\varepsilon_{ik})_0$ nonchè, secondo le (54), le tensioni iniziali $(\sigma_{ik})_0$, l'energia potenziale elastica dell'elemento dV in corrispondenza d'uno stato generico di deformazione sarà la somma dell'energia relativa allo stato naturale e di quella dovuta all'ulteriore deformazione. Per tutto il corpo elastico avremo quindi:

$$(67) \qquad \Phi = \int_V \left[\varphi\,(\varepsilon_{ik})_0 + \varphi\,(\varepsilon_{ik}) \right] dV = \int_V \varphi\,(\varepsilon_{ik})_0\, dV + \int_V \varphi\,(\varepsilon_{ik})\, dV\,;$$

l'energia potrà cioè riguardarsi come somma di due termini distinti:

il primo:

$$(68) \qquad \Phi_0 = \int_V \varphi\,(\varepsilon_{ik})_0\, dV\,,$$

funzione soltanto delle componenti di deformazione preesistenti nello stato naturale;

il secondo:

$$(69) \qquad \Phi_1 = \int_V \varphi\,(\varepsilon_{ik})\, dV\,,$$

dipendente soltanto dalla variazione di stato che il corpo subisce nel passaggio dallo stato naturale a quello generico di deformazione.

Entrambi i termini risultando dalla somma di quantità essenzialmente positive, non possono annullarsi se non quando siano nulle le variabili in essi contenute.

Supposte le $(\varepsilon_{ik})_0 = 0$, si annulla il primo termine: lo stato naturale coincide cioè con lo stato non deformato. In tal caso, ed in questo soltanto, l'energia si riduce al secondo termine $\Phi = \Phi_1$.

Quando invece, e soltanto quando sia $\varepsilon_{ik} = 0$, l'energia si riduce al primo termine $\Phi = \Phi_0$.

Ne deriva che *fra tutti i valori che l'energia potenziale elastica può assumere in corrispondenza di tutti i possibili stati d'equilibrio del corpo, quello Φ_0, corrispondente allo stato naturale, è il minimo.* In particolare, se non è nulla allo stato naturale, l'energia non può essere nulla in nessun altro stato del corpo; non esiste cioè alcuna deformazione congruente e compatibile coi vincoli capace di annullare la deformazione propria dello stato naturale. Perchè ciò avvenisse occorrerebbe attribuire agli elementi del solido deformazioni non congruenti o non compatibili coi vincoli, occorrerebbe cioè distruggere la compagine del solido e liberarlo dai vincoli.

Le due parti che costituiscono l'energia potenziale elastica si differenziano dunque in quanto la prima, dipendente dallo stato di costrizione proprio dello stato naturale, non può essere restituita se non distruggendo la compagine del solido, la seconda, dovuta all'azione delle forze esterne, viene restituita sotto forma di lavoro al cessare dell'azione di queste forze.

Diremo perciò *energia vincolata* quella corrispondente allo stato naturale; alla differenza:

$$\Phi_1 = \Phi - \Phi_0 ,$$

che rappresenta il lavoro eseguito dalle forze esterne per deformare il solido, daremo il nome di *lavoro di deformazione.*

Salvo avviso in contrario riterremo sempre nulla l'energia vincolata, immagineremo cioè lo stato naturale coincidente con quello indeformato, e allora sarà:

$$\Phi = \Phi_1 .$$

27 — Equazioni dell' equilibrio elastico.

Il problema dell' equilibrio elastico è ordinariamente posto in questi termini: assegnato un solido elastico soggetto a dati vincoli e a date forze esplicite, determinare le componenti di spostamento, di tensione e di deformazione relative a tutti i punti del solido.

Per risolvere tale problema si possono, per esempio, assumere come incognite le componenti di spostamento v_i. In tal caso dovranno essere soddisfatte:

le equazioni indefinite di equilibrio, che sono di second'ordine nelle tre componenti di spostamento v_i. Sostituendo nella (54) gli spostamenti alle deformazioni mediante le (4), avremo infatti:

$$\sigma_{ik} = \sum_{jh} a_{ik,jh}\, \varepsilon_{jh} = \frac{1}{2} \sum_{jh} a_{ik,jh} \left(\frac{\partial v_j}{\partial y_h} + \frac{\partial v_h}{\partial y_j} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{jh} a_{ik,jh} \frac{\partial v_j}{\partial y_h} + \frac{1}{2} \sum_{jh} a_{ik,jh} \frac{\partial v_h}{\partial y_j} ,$$

e scambiando gl'indici j, h nell'ultima sommatoria tenute presenti le (55):

$$\sigma_{ik} = \sum_{jh} a_{ik,jh} \frac{\partial v_j}{\partial y_h} ; \tag{70}$$

sicchè, sostituendo nelle (28), queste prendono la forma:

$$\sum_{ijh} a_{ik,jh} \frac{\partial^2 v_j}{\partial y_i\, \partial y_h} + Y_k = 0 . \tag{71}$$

L'analisi insegna che tale sistema ammette una soluzione generale in cui figurano sei funzioni arbitrarie, le quali dovranno verificare:

le equazioni ai limiti, che sono di primo ordine nei parametri degli spostamenti v_i. Introducendo le espressioni (70) delle componenti di tensione nelle (32), queste divengono infatti:

$$\sum_{ijh} a_{ik,jh} \frac{\partial v_j}{\partial y_h} n_i = F_k + R_k . \tag{72}$$

Per determinare le componenti di spostamento, che ora sono note a meno di termini arbitrari, è infine necessario individuare la configurazione risolvente, al quale scopo dovranno essere soddisfatte:

le equazioni di vincolo.

Le equazioni di congruenza risulteranno anche verificate, perchè esse sono implicite nelle (4), già utilizzate per esprimere le equazioni indefinite ed ai limiti in funzione delle componenti di spostamento.

È ovvio il passaggio dalle (71) alle equazioni dell'equilibrio dinamico.

Si possono invece assumere come incognite le componenti di deformazione o di tensione.

Assumendo, per esempio, queste ultime, dovranno essere soddisfatte:

le equazioni indefinite d'equilibrio;

le equazioni ai limiti;

le equazioni di congruenza, nelle quali avremo introdotte le componenti di tensione per mezzo delle (56);

le equazioni di vincolo, nelle quali avremo sostituito alle componenti di spostamento quelle di deformazione mediante le (4), ed a queste i parametri della tensione per mezzo delle (56).

Poste così le equazioni dell'equilibrio elastico, ci domandiamo se esse ammettono sempre una soluzione, e se questa soluzione, dato che esista, è unica.

Sul primo quesito diremo soltanto che l'esistenza d'una soluzione può dirsi, in via generale, dimostrata. La questione d'altronde, ha interesse limitato per le applicazioni, perchè dell'esistenza d'una soluzione, dal punto di vista fisico noi siamo certi a priori nella generalità dei casi che potrà occorrere di considerare.

In ordine all'unicità della soluzione ci riserviamo di darne la dimostrazione più avanti.

28 — Sovrapposizione degli stati d'equilibrio.

Per un medesimo corpo elastico, soggetto a dati vincoli, siano:

$$Y_i' \quad , \quad F_i' \quad , \quad \lambda_s' \quad , \quad v_i' \; ;$$
$$Y_i'' \quad , \quad F_i'' \quad , \quad \lambda_s'' \quad , \quad v_i'' \; ;$$

due soluzioni distinte dell'equilibrio elastico.

Poichè le equazioni alle quali devono soddisfare le forze esplicite, le reazioni e gli spostamenti sono tutte lineari ed omogenee rispetto ai corrispondenti parametri Y_i, F_i, λ_s, v_i, una soluzione dell'equilibrio elastico per lo stesso corpo sarà pure quella:

$$Y_i = k' Y_i' + k'' Y_i'' \quad , \quad F_i = k' F_i' + k'' F_i'' \; ,$$
$$\lambda_s = k' \lambda_s' + k'' \lambda_s'' \quad , \quad v_i = k' v_i' + k'' v_i'' \; ,$$

ottenuta combinando linearmente le precedenti secondo i coefficienti numerici arbitrari k' e k''.

Dette poi ordinatamente:

$$R'_i \quad , \quad \varepsilon'_{ik} \quad , \quad \sigma'_{ik} \; ;$$
$$R''_i \quad , \quad \varepsilon''_{ik} \quad , \quad \sigma''_{ik} \; ;$$

le componenti secondo gli assi delle reazioni dei vincoli, i parametri della deformazione e quelli della tensione relativi alle prime due soluzioni, le analoghe componenti relative alla terza, avuto riguardo alle (52), (4) e (54), saranno:

$$R_i = k' R_i + k'' R''_i \; ;$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k} + \frac{\partial v_k}{\partial y_i}\right) = \frac{1}{2}\left(k' \frac{\partial v'_i}{\partial y_k} + k'' \frac{\partial v''_i}{\partial y_k} + k' \frac{\partial v'_k}{\partial y_i} + k'' \frac{\partial v''_k}{\partial y_i}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} k' \left(\frac{\partial v'_i}{\partial y_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial y_i}\right) + \frac{1}{2} k'' \left(\frac{\partial v''_i}{\partial y_k} + \frac{\partial v''_k}{\partial y_i}\right) = k' \varepsilon'_{ik} + k'' \varepsilon''_{ik} \; ;$$

$$\sigma_{ik} = k' \sigma'_{ik} + k'' \sigma''_{ik} \; ;$$

cioè anch'esse combinazioni lineari delle precedenti secondo gli stessi coefficienti k' e k''.

Naturalmente il principio è valido qualunque sia il numero di stati di equilibrio presi in considerazione; cosicchè in modo generale esso può essere così enunciato:

dati n sistemi di forze esplicite, se l'h^{mo} di essi, di componenti:

$$Y_i^{(h)} \quad , \quad F_i^{(h)} \, ,$$

applicato ad un dato solido elastico vi produce spostamenti di componenti:

$$v_i^{(h)} \, ,$$

nella deformazione dovuta al sistema di forze di componenti:

$$Y_i = \sum_{h=i}^{n} k^{(h)} Y_i^{(h)} \quad , \quad F_i = \sum_{h=i}^{n} k^{(h)} F_i^{(h)} \, ,$$

ove i $k^{(h)}$ sono coefficienti numerici arbitrari, si producono gli spostamenti di componenti:

$$v_i = \sum_{h=i}^{n} k^{(h)} v_i^{(h)} \, .$$

In particolare, ponendo:

$$k^{(1)} = k^{(2)} = \ldots = k^{(h)} = \ldots = k^{(n)} = 1 \, ,$$

alle forze:

$$Y_i = \sum_{h=1}^{n} Y_i^{(h)} \qquad , \qquad F_i = \sum_{h=1}^{n} F_i^{(h)} ,$$

corrispondono gli spostamenti:

$$v_i = \sum_{h=1}^{n} v_i^{(h)} ,$$

Si può dunque affermare che *applicando contemporaneamente ad uno stesso sistema elastico vari sistemi di forze, si producono spostamenti e quindi anche reazioni di vincoli, deformazioni e tensioni uguali alla somma di quelle prodotte separatamente da ciascun sistema.*

Questa proprietà, utilissima nello studio dei sistemi elastici in quanto permette spesso di scindere problemi complessi in altri di soluzione più semplice, è nota sotto il nome di *principio di sovrapposizione degli stati d'equilibrio* o *principio di sovrapposizione degli effetti.*

La sua validità cessa quando le deformazioni siano talmente grandi da alterare apprezzabilmente la configurazione delle forze esterne, ed anche quando non sussista il legame lineare postulato dalla (54).

29 — Teorema di Kirchhoff sull'unicità di soluzione dell'equilibrio elastico.

Si supponga che al medesimo sistema di forze:

$$Y_i' = Y_i'' \qquad , \qquad F_i' = F_i'' ,$$

agenti sopra un dato corpo elastico, possano corrispondere le due soluzioni distinte:

$$v_i' \neq v_i'' .$$

Combinando linearmente queste due soluzioni secondo i coefficienti $k' = 1$, $k'' = -1$, avremo:

$$Y_i = Y_i' - Y_i'' = 0 \qquad , \qquad F_i = F_i' - F_i'' = 0 ;$$

$$v_i = v_i' - v_i'' ,$$

ossia una soluzione dell'equilibrio elastico con forze esplicite nulle.

Ora se le forze sono nulle, è anche nullo il lavoro che esse producono durante la deformaziome, e quindi nulla anche quella parte della energia potenziale elastica, espressa dalla (69), che abbiamo chiamato lavoro di deformazione. Ma sappiamo già che questo lavoro non può annullarsi se non sono contemporaneamente nulle ovunque tutte le componenti del tensore di deformazione; pertanto sarà:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon'_{ik} - \varepsilon''_{ik} = 0$$

ossia:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon''_{ik} .$$

Ammesso dunque che per lo stesso sistema di forze esplicite esistano due soluzioni distinte dell'equilibrio elastico, esse sono caratterizzate dagli stessi parametri di deformazione in tutti i punti. In tali condizioni le due corrispondenti configurazioni del solido non possono differire che per un moto rigido di esso, e se il corpo, come qui supponiamo, è sufficientemente vincolato per escludere moti del genere, le due configurazioni, e quindi le due soluzioni, coincidono.

Se il solido, anzichè nello stato indeformato trovasi allo stato naturale, reazioni di vincolo, tensioni e deformazioni che si producono in esso sono la somma di quelle iniziali dovute allo stato di coazione elastica e di quelle che le forze produrrebbero agendo sul solido allo stato indeformato. Ciò si prova subito applicando il principio di sovrapposizione degli effetti allo stato naturale (soluzione dell'equilibrio elastico con forze esplicite nulle) ed allo stato corrispondente all'azione d'un generico sistema di forze.