

CAPITOLO XVI

CRITERI DI RESISTENZA E DI SICUREZZA

109 — Problema fondamentale della resistenza dei materiali.

Dato un sistema resistente assimilabile con sufficiente approssimazione ad un corpo elastico omogeneo ed isotropo, ed assegnate le forze esterne che dovranno agire su di esso, ci domandiamo quale criterio offra la resistenza dei materiali per giudicare se, agendo effettivamente quelle forze, il corpo resterà nel periodo elastico, oppure se questo verrà oltrepassato e, per conseguenza, si produrranno deformazioni permanenti o si perverrà alla rottura.

La teoria dell'elasticità può determinare in ciascun punto del corpo le caratteristiche della tensione e della deformazione, ma per risolvere il quesito propostoci sarebbe necessario conoscere per il materiale di cui si tratta, i limiti delle suddette caratteristiche in corrispondenza dei quali si esaurisce il periodo elastico o si produce la rottura. Noti questi limiti, basterebbe infatti controllare se in essi rientrano tutti gli stati di tensione o di deformazione relativi ai vari punti, ovvero se in qualche punto del corpo essi siano varcati.

Il problema consiste dunque nella determinazione degli stati limiti di tensione o di deformazione relativi ai diversi materiali; ma si tratta di un problema assai complesso.

Non si può intanto domandarne la soluzione alla teoria dell'elasticità, in quanto fuori del periodo di proporzionalità, o tutt'al più del periodo elastico convenzionale, essa non è più applicabile neanche come teoria limite; neppure grande aiuto si può per il momento sperare dalla

teoria della plasticità, tuttora incerta perfino nelle premesse. La soluzione del problema si deve quindi ricercare per via sperimentale.

Per gli stati di tensione *monoassiali*, dànno norma i risultati delle prove di trazione e di compressione. In tali esperienze infatti, sopra un elemento superficiale qualunque appartenente ad una sezione retta del provino non agisce che la tensione normale σ_x positiva o negativa, la quale è pertanto tensione principale, e l'unica tensione principale non nulla, essendo $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ⁽¹⁾.

Se dunque per un dato materiale furono determinate sperimentalmente la tensione limite d'elasticità (o di rottura) a trazione σ'_E , e l'analoga tensione limite a compressione σ''_E , per un solido elastico costituito di quel materiale e per il quale la teoria dell'elasticità abbia accertato uno stato di tensione monoassiale nonchè gli sforzi massimi di trazione σ' e di compressione σ'' , si potranno esprimere le *condizioni di resistenza* nella forma:

$$(378) \quad \sigma' \leq \sigma'_E \quad , \quad | \sigma'' | \leq \sigma''_E .$$

Assai più difficile è stabilire il criterio di resistenza per uno stato di tensione *pluriassiale*.

Ovviamente la presenza contemporanea di date trazioni o compressioni agenti secondo due direzioni ortogonali modifica il valore che deve assumere una terza trazione o compressione agente normalmente alle precedenti affinchè sia raggiunto il limite d'elasticità o si produca la rottura. Saranno in altri termini non più due soltanto, ma infiniti gli stati di tensione limiti della resistenza di un dato materiale.

Bisognerebbe ora potersi riferire a deduzioni sperimentali ottenute sottoponendo un provino a tensioni diverse secondo tre direzioni ortogonali, ma purtroppo esperienze di tal genere urtano contro ostacoli assai gravi; i risultati finora ottenuti in questo campo sembrano fra l'altro dipendere dal metodo di prova seguito.

Il mezzo con cui ordinariamente si cerca di superare queste difficoltà consiste nel ricondurre gli infiniti stati limiti di tensione che in generale competono a un dato materiale, ai due stati limiti relativi alla

⁽¹⁾ In realtà le condizioni accennate non sono mai soddisfatte rigorosamente. In accordo con il postulato di Saint-Venant, stati di tensione monoassiali possono praticamente ritenersi quelli che nelle prove suindicate si riscontrano nella zona centrale del saggio, ossia in punti sufficientemente lontani da quelli in corrispondenza dei quali la macchina trasmette lo sforzo.

sollecitazione monoassiale, vale a dire al caso particolare per il quale si possiedono risultati sperimentali attendibili.

Posto il problema in questi termini, si tratta di stabilire in quale modo debba essere operata la suddetta *riduzione*, con quale procedimento cioè, assegnate le tensioni principali s_1, s_2, s_3 , si possa dedurre la *tensione ideale* σ_{id} relativa ad uno stato di tensione monoassiale *ugualmente pericoloso*.

Le teorie ed ipotesi avanzate a questo proposito sono numerosissime, anche perchè è forse impossibile che la medesima teoria della rottura si adatti a materiali di tipo e di struttura troppo diversi. Riassumeremo qui appresso le più diffuse fra quelle proposte, riferendoci ad uno stato di tensione generico caratterizzato da tensioni principali soddisfacenti alle condizioni:

$$s_1 > s_2 > s_3.$$

Come tensione massima di cedimento del materiale intenderemo quella corrispondente al raggiungimento del limite elastico convenzionale se si tratta di corpi duttili, quella che si riferisce al raggiungimento della rottura se si tratta di corpi fragili; in entrambi i casi esprimeremo dette tensioni coi simboli σ'_E e σ''_E , rispettivamente per la trazione e per la compressione.

110 — Ipotesi della massima tensione.

L'ipotesi più antica, implicitamente già ammessa da Galileo nella trattazione del problema della mensola e poi adottata dal Navier, è quella della massima tensione.

Secondo essa la resistenza viene vinta quando la tensione principale massima in valore assoluto, indipendentemente dai valori delle altre due tensioni principali, raggiunge il limite σ'_E per la trazione semplice o quello σ''_E per la compressione semplice.

Supposto che s_1 e s_2 siano tensioni di segno opposto, le condizioni di resistenza si esprimono:

$$(379) \quad s_1 \leq \sigma'_E \quad , \quad |s_2| \leq \sigma''_E ;$$

il solido delle tensioni al limite dell'equilibrio elastico è un cubo di lato $\sigma'_E + \sigma''_E$.

Se si ricorre alla rappresentazione di Mohr, diviene evidente che le

sole distribuzioni per cui è garantita la resistenza sono quelle rappresentate da cerchi compresi nella striscia definita dalle rette $\sigma = \sigma'_E$ e $\sigma = -\sigma''_E$ (fig. 115). Il massimo cerchio delle tensioni ammissibili è quello tangente alle rette sopra indicate. La tensione tangenziale massima *non accompagnata da tensioni normali*, misurata dall'ordinata che il cerchio suddetto stacca sull'asse delle τ , vale:

$$(380) \quad \tau_E = \sqrt{\sigma'_E \sigma''_E},$$

e per materiali la cui resistenza a trazione uguagli quella a compressione ($\sigma'_E = \sigma''_E = \sigma_E$):

$$\tau_E = \sigma_E.$$

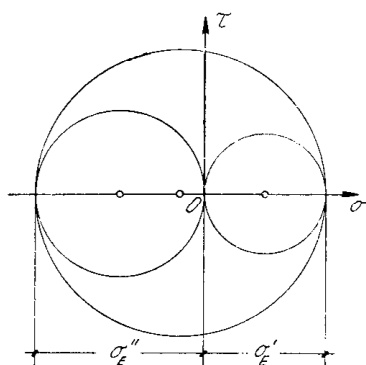


Fig. 115

Questo risultato non trova però riscontro nei risultati sperimentali: la tensione tangenziale critica assume ordinariamente valori alquanto minori.

L'ipotesi porterebbe ancora ad ammettere che la rottura debba verificarsi secondo superfici normali alla direzione della tensione principale che raggiunge il limite σ_E , ma neppure questa conclusione è sempre confortata dall'esperienza. Basti per esempio, ricordare che nelle prove a trazione dei materiali duttili la rottura avviene per scorrimento lungo piani inclinati di circa 45° alla direzione dello sforzo, ove notoriamente la tensione non ha il valore massimo.

Infine, che la resistenza a tensione normale secondo una direzione non sia indipendente dalle trazioni o compressioni che si esercitano nelle direzioni ortogonali, è provato dalle enormi pressioni idrostatiche che l'esperienza ha dimostrato possono sopportare senza soffrirne corpi di limitata resistenza a compressione. È d'altronde ben noto ai tecnici l'utile effetto che le fasciature esercitano nei solidi compressi, opponendosi alle dilatazioni trasversali.

Nonostante queste contraddizioni, la presente ipotesi pare possa applicarsi alle ghise ed ai materiali vetrosi in genere.

111 -- Teoria dell' attrito interno o di Coulomb.

Secondo questa teoria la rottura si produrrebbe sempre per scorrimento e dipenderebbe esclusivamente dalla grandezza delle tensioni normali σ e tangenziali τ agenti sulla superficie secondo cui avviene lo

scorrimento. Gli stati di tensione per i quali è garantita la resistenza sono quelli che soddisfano alla condizione:

$$(381) \quad |\tau| \leq (c - \sigma) \mu,$$

essendo c una costante, $\mu = \operatorname{tg} \varphi$ un coefficiente di attrito interno, variabili entrambi da materiale a materiale.

In uno stato di tensione generico il massimo valore di τ corrispondente ad un dato valore di σ (fig. 116) si verifica sull'elemento il cui punto rappresentativo E è situato sul maggior dei tre cerchi di Mohr.

La condizione di resistenza espressa dalla (381) porta quindi a considerare come distribuzioni non pericolose quelle il cui circolo di Mohr, *determinato dalle tensioni estreme* s_1 ed s_3 , è interno alla regione del piano delimitata da una coppia di rette uscenti dal punto di ascissa c dell'asse delle σ e formanti gli angoli $\pm \varphi$ con quest'asse. I cerchi tangenti a tali rette rappresentano le distribuzioni limiti.

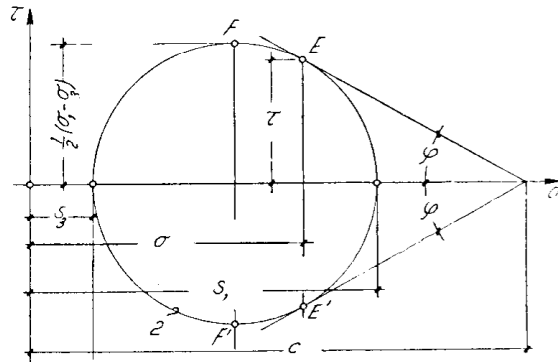


Fig. 116

Come si scorge dalla figura, per $|\varphi| > 0$ è sempre:

$$\tau > \frac{1}{2} (s_1 - s_3);$$

la tensione tangenziale risulta in conseguenza più grande di quella limite per tutti gli elementi superficiali i cui punti rappresentativi stanno sugli archi EF , $E'F'$, del cerchio limite.

112 — Teoria della tensione tangenziale massima o di Guest.

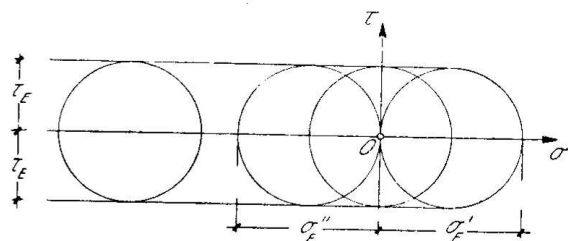
Supposto nella teoria di Coulomb $\mu = 0$, $c = \infty$, le rette limiti diventano parallele all'asse σ (fig. 117), e la condizione di resistenza si traduce nella:

$$(382) \quad |\tau| = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \tau_E.$$

Si passa così alla teoria di Guest, secondo la quale si perviene alla pla-

sticità o alla rottura allorquando sul piano di scorrimento o di rottura la tensione tangenziale raggiunge un certo valore limite τ_E , che è il medesimo, qualunque sia la tensione normale agente sul piano anzidetto.

Dai cerchi limiti relativi al caso d'una sola tensione principale diversa da zero si constata facilmente che dev'essere soddisfatta la condizione:



$$\sigma'_E = |\sigma''_E| = \sigma_E;$$

Fig. 117

alla teoria consegue cioè un'ugual resistenza a trazione ed a compressione semplice, risultato questo che in generale l'esperienza contraddice.

Si deduce inoltre:

$$(383) \quad \tau_E = \frac{\sigma_E}{2};$$

cioè la tensione tangenziale limite è uguale alla metà della tensione normale limite corrispondente allo stato di sollecitazione monoassiale. La condizione di resistenza può quindi anche scriversi:

$$(384) \quad s_t - s_c \leq \sigma_E.$$

Negli stati di tensione piani essendo una delle tensioni principali estreme sempre nulla, gli stati limiti sono rappresentati dagli stessi cerchi relativi alla trazione od alla compressione semplice. Ne risulterebbe, per esempio, che la resistenza per compressioni esercitate secondo due direzioni ortogonali non è diversa da quella a compressione semplice, ciò che concorda coi risultati sperimentali.

La presente teoria sembra applicabile con buona approssimazione a quei materiali duttili, quali per esempio l'acciaio, per i quali sono sensibilmente uguali in valore assoluto le resistenze a trazione ed a compressione semplice.

113 — Teoria di Mohr.

Questa teoria può ritenersi anch'essa derivare da quella di Coulomb, della quale costituisce anzi la generalizzazione. Essa è basata sui seguenti principi:

il limite d'elasticità o la rottura vengono raggiunti in dipendenza dei

valori che assumono sulla superficie di scorrimento la tensione normale e la tensione tangenziale.

Supposto noto e definito mediante i tre cerchi di Mohr lo stato di tensione limite che si produrrà in un certo punto M della superficie di scorrimento (fig. 118), e supposto anche conosciuto il valore della tensione normale limite, sembra logico ammettere che l'elemento piano per M appartenente alla detta superficie di scorrimento debba essere quello che a parità di tensione normale σ sopporta la massima tensione tangenziale τ . Il corrispondente punto rappresentativo E sarà pertanto situato sul cerchio 2 della rappresentazione di Mohr. Viene posto così l'altro fondamento teorico:

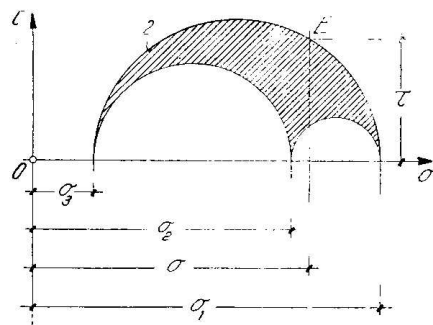


Fig. 118

tutte le superfici di scorrimento o di rottura contengono l'asse della tensione principale media s_2 , la quale non esercita alcuna influenza sul raggiungimento dello stato limite.

Fin qui v'è esatta concordanza con l'ipotesi di Coulomb; la teoria di Mohr ne riesce diversa in quanto suppone ancora:

che lo stato limite si raggiunga quando la tensione tangenziale sul piano di scorrimento o di rottura perviene ad un massimo, sempre dipendente dalle proprietà del materiale, non però legato alla tensione normale che agisce sul medesimo piano, dalla semplice relazione lineare espressa al limite dalla (381), ma da una legge più complessa.

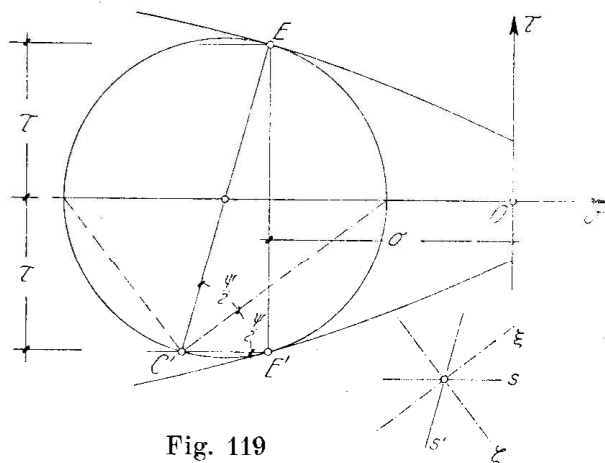


Fig. 119

di rette a suo tempo definita, ora involuppano una certa curva $f(\sigma, \tau)$, luogo geometrico dei punti EE' che a parità di ascissa σ hanno la massima ordinata τ (fig. 119). La curva è ovviamente simmetrica rispetto all'asse delle σ ; i punti di tangenza con essa del cerchio 2 corrispondente ad un qualsiasi stato limite individuano due giaciture di scorrimento s

s' , le quali passano per l'asse principale η e formano angoli uguali con le altre due direzioni principali.

La curva limite relativa ad un dato materiale potrebbe essere costruita per punti quando fosse noto un numero sufficientemente grande di

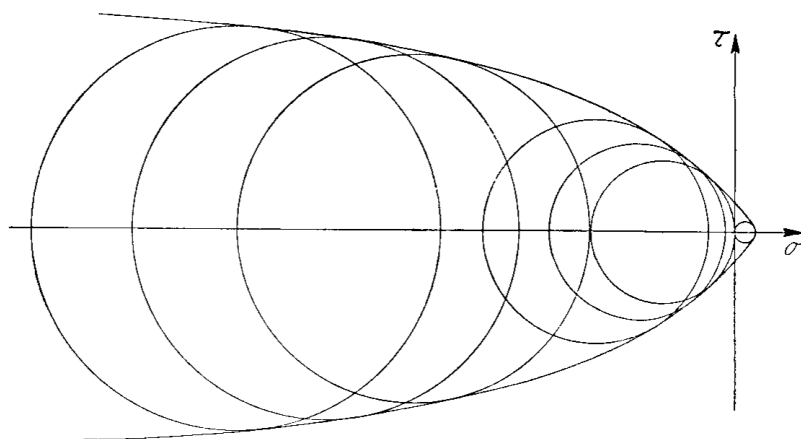


Fig. 120

stati di tensione limiti, ma purtroppo i dati che l'esperienza fornisce a questo riguardo, specie per gli stati limiti d'elasticità, sono pochi e non sempre di sicuro affidamento. Maggiori ragguagli si possiedono circa gli stati limiti di rottura di alcuni materia-

li fragili; la fig. 120 mostra ad esempio la curva limite del marmo, secondo le esperienze di Teodoro v. Kàrman.

Indipendentemente dal tipo di materiale, circa l'andamento della curva limite possono farsi le seguenti previsioni:

i due rami simmetrici della curva si raccordano dalla parte delle σ positive. Dove quest'asse è incontrato dalla curva, il circolo dello stato limite si riduce ad un punto in cui è $s_1 = s_2 = s_3$; la rottura ha luogo sotto trazioni uguali agenti secondo le tre direzioni principali. Naturalmente, data l'impossibilità di realizzare sperimentalmente un tale stato di tensione, rimane sconosciuta l'ascissa di detto punto d'intersezione;

è assai verosimile che la curva non incontri l'asse delle ascisse dalla parte delle σ negative, perchè, come appare provato da esperienze di Föppl, nessun corpo si rompe sotto una pressione uniforme;

in generale la resistenza a trazione è minore di quella a compressione semplice: pertanto almeno in vicinanza dell'origine, le ordinate della curva diminuiscono al crescere delle ascisse;

è poi anche verosimile che sotto pressioni elevate tutti i materiali assumano uno stato plastico in virtù del quale, al crescere della pressione normale sul piano di scorrimento, la tensione tangenziale tende a diventare costante ed indipendente dal valore della pressione. Se ne arguisce che la curva deve volgere la concavità verso l'asse delle ascisse e che crescendo

le tensioni negative, la direzione della tangente alla curva tende a divenire parallela all'asse delle ascisse.

* * *

Nella maggior parte dei casi nel tratto compreso tra i circoli corrispondenti agli stati limiti per trazione e per compressione semplice, si può con sufficiente approssimazione sostituire alla curva una coppia di rette: si ricade così nell'ipotesi di Coulomb.

È facile determinare in tal caso il valore massimo della tensione tangenziale τ_E non accompagnata da tensione normale. Dalla figura 121 si ha infatti:

$$\tau_E = \overline{CE} = \overline{ED} = \frac{1}{2} \overline{HB};$$

ma è

$$\overline{HB} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_E'' + \sigma_E'}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_E'' - \sigma_E'}{2}\right)^2},$$

quindi:

$$(385) \quad \tau_E = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_E' \sigma_E''}.$$

Risulta così un valore metà di quello corrispondente all'ipotesi di Navier, ciò che meglio si accorda coi risultati che si ottengono sperimentando su ferri e su materiali lapidei omogenei.

Gli angoli ψ e $\pi - \psi$ indicati in figura sono quelli compresi tra gli elementi superficiali del fascio di sostegno η secondo i quali tende a prodursi lo scorrimento rispettivamente per trazione e per compressione semplice; essi sono bisecati dai piani principali, sono costanti per un dato materiale e si scostano dall'angolo di 90° in misura tanto maggiore, quanto più la resistenza di compressione supera quella di trazione.

Quelle striature che in taluni casi si rendono evidenti sulla superficie laterale dei provini non appena superato il limite d'elasticità, che sono appunto simmetriche rispetto alla direzione dello sforzo e che si tagliano sotto un angolo costante, sono dunque spiegate dalla teoria di Mohr, che ne riceve notevole conferma.

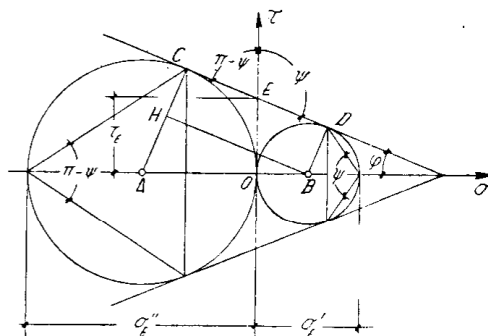


Fig. 121

Per i materiali duttili come l'acciaio, sembra che la curva limite si possa con sufficiente approssimazione sostituire con una coppia di rette parallele all'asse delle ascisse e tangenti al cerchio corrispondente allo stato limite per trazione semplice, il quale cerchio completerebbe la curva dalla parte delle σ positive (fig. 117).

Per tensioni inferiori a quella limite per trazione semplice gli stati limiti risultano indipendenti da σ : si ritorna così all'ipotesi di Guest, caratterizzata, secondo la (383), da una tensione tangenziale limite pari alla metà della tensione normale limite.

L'ipotesi di Mohr è quella meglio confortata dai risultati dell'esperienza; esistono tuttavia materiali, sul cui comportamento non è priva d'influenza la tensione principale intermedia, per i quali si ottengono risultati apertamente contrastanti con essa.

114 — Teoria della dilatazione massima.

Secondo questa teoria si perviene ad uno stato limite quando la dilatazione massima o quella minima raggiungono quegli stessi valori σ'_E/E , σ''_E/E , per i quali il fenomeno si produce rispettivamente per trazione o per compressione semplice. Le condizioni di resistenza sarebbero quindi:

$$\varepsilon_1 \leq \frac{\sigma'_E}{E} \quad , \quad |\varepsilon_3| \leq \frac{\sigma''_E}{E} \quad ,$$

oppure, avuto riguardo alle (91):

$$(386) \quad \sigma'_{id} = s_1 - \frac{s_2 + s_3}{m} \leq \sigma'_E \quad , \quad \sigma''_{id} = \left| s_3 - \frac{s_1 + s_2}{m} \right| \leq \sigma''_E .$$

Si ritenne in passato da vari Autori — tra questi il Navier e il De Saint-Venant — che il raggiungimento dello stato limite dipendesse *esclusivamente dalla dilatazione massima*, ma sotto questa forma la teoria era del tutto inaccettabile. Accogliendo infatti, il principio enunciato, lo stato limite per semplice compressione ($s_1 = s_2 = 0$, $s_3 < 0$) sarebbe raggiunto per la dilatazione $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\sigma''_E/mE$, mentre lo stato limite per semplice trazione ($s_2 = s_3 = 0$, $s_1 > 0$) corrisponderebbe alla dilatazione $\varepsilon_1 = \sigma'_E/E$. Dovendo il limite della dilatazione essere lo stesso in entrambi i casi, ne verrebbe:

$$\sigma'_E = \frac{\sigma''_E}{m} .$$

in altri termini la resistenza a trazione dovrebbe risultare $1/m$ (media-

mente $1/4$ di quella a compressione, mentre è noto che per molti corpi accade il fenomeno inverso e per altri le due resistenze non differiscono sensibilmente.

L'ipotesi è stata successivamente modificata da Grashof, il quale, oltre al limite già posto alle dilatazioni positive, ne pose un altro alle dilatazioni negative. Sotto questa forma essa è oggi accolta da quasi tutti gli AA. ed imposta dalla maggior parte dei regolamenti ufficiali europei.

115 — Teoria di Beltrami.

Il Beltrami ammette che allo stato limite di resistenza si pervenga quando l'energia potenziale elastica φ per unità di volume raggiunga un certo valore critico.

Ricordando la (94) e indicando con c^2 una costante opportuna, la condizione di resistenza può scriversi:

$$(387) \quad \varphi = \frac{1}{2E} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - \frac{1}{mE} (s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3) \leq c^2 .$$

Osservando che è:

$$\text{per } \sigma_1 = \sigma'_E, \sigma_2 = \sigma_3 = 0 :$$

$$\frac{\sigma'_E}{2E} = c^2 ;$$

$$\text{per } \sigma_1 = \sigma_2 = 0, |\sigma_3| = \sigma_E ,$$

$$\frac{\sigma''_E}{2E} = c^2 ,$$

si deduce:

$$\sigma'_E \equiv \sigma''_E = \sigma_E .$$

La teoria è dunque valida nel caso di uguale resistenza a trazione ed a compressione.

La condizione limite di resistenza è:

$$(388) \quad \varphi = \frac{\sigma_E^2}{2E} ,$$

mentre se fossero diverse da zero le sole tensioni tangenziali coniugate τ in due dei piani coordinati — naturalmente non più principali — sarebbe:

$$(389) \quad \varphi = \frac{\tau_E^2}{2E} ,$$

e pertanto uguagliando :

$$(390) \quad \tau_E = \sigma_E \sqrt{\frac{G}{E}} = \sigma_E \sqrt{\frac{m}{2(m+1)}} ,$$

e per $m = 10/3$:

$$(390') \quad \tau_E = \approx 0,62 \sigma_E .$$

116 — Teoria di Huber, Henchy, v. Mises, Schleicher.

Il concetto energetico del Beltrami venne in seguito riferito alla frazione di lavoro φ_w corrispondente al cambiamento di forma, con esclusione di quella φ_v relativa alla variazione di volume.

Questa ipotesi si basa sull'opinione, confortata dall'esperienza, che uno stato di tensione di tipo idrostatico non esercita alcuna influenza sul raggiungimento dello stato limite. Dallo stato di tensione s_1, s_2, s_3 , assegnato, viene perciò detratto uno stato di tensione omogeneo caratterizzato dalla tensione $\sigma_m = \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3)$; alle tensioni principali residue $s_1 - \sigma_m, s_2 - \sigma_m, s_3 - \sigma_m$, compete la quota di energia che corrisponde al mutamento di forma ⁽⁴⁾. Essa vale :

$$\varphi_w = \frac{1}{12G} [(s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2 + (s_1 - s_2)^2] ,$$

come si prova subito partendo dalla (94) scritta per lo stato di tensione residuo e sostituendo ad E in funzione dell'altro modulo.

Huber ammise che per $s_1 + s_2 + s_3 > 0$, ossia quando la deformazione implichi aumento di volume, si può conservare l'ipotesi di Beltrami; che se invece il volume diminuisce, si deve porre un limite alla sola energia φ_w . In tal caso, tenuto conto che per $s_2 = s_3 = 0$ la (389) al limite $s_1 = \sigma_E$ diviene $\varphi_w = \sigma_E^2/6G$, si deduce la condizione di resistenza :

$$(391) \quad \sqrt{\frac{1}{2} [(s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2 + (s_1 - s_2)^2]} \leq \sigma_E .$$

Neanche con queste modifiche il criterio energetico risponde sempre alla realtà del fenomeno. Propose perciò lo Schleicher di porre in luogo della

(4) - La somma delle tensioni essendo nulla, sarà tale anche quella delle dilatazioni; tale stato di tensione non genera perciò variazioni di volume, ma esclusivamente variazioni di forma.

costante c^2 della (387) una funzione delle tensioni principali estreme, diversa per i vari materiali, fondendo così l'ipotesi di Beltrami e quella di Mohr. Ne risulta una teoria assai complessa non confortata da un molto migliore accordo coi risultati sperimentali.

117 — Applicazione dei vari criteri di resistenza.

Può essere utile confrontare i risultati cui conduce l'applicazione dei criteri di resistenza sopra discussi.

Supposto per semplicità trattarsi d'un materiale per cui sia $\sigma'_E = \sigma''_E = \sigma_E$, riferiamoci dapprima allo stato di tensione corrispondente alla flessione e taglio, caratterizzato, come è noto, da due sole tensioni principali diverse da zero. Dalle (339) che, per le ipotesi fatte circa il modo con cui sono ordinate le tensioni principali, avremo:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \\ s_2 = 0, \\ s_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \end{array} \right.$$

e, con riguardo alle (91), si deducono le:

$$\left\{ \begin{array}{l} E\varepsilon_1 = \frac{m-1}{2m} \sigma + \frac{m-1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \\ E\varepsilon_2 = -\frac{\sigma}{m}, \\ E\varepsilon_3 = \frac{m-1}{2m} \sigma - \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \end{array} \right.$$

L'ipotesi della tensione normale massima, con le (379), porta alla condizione:

$$(392) \quad \sigma_{id} = \frac{1}{2} \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) \leq \sigma_E;$$

mentre con l'ipotesi di Guest, per la (384), si ottiene:

$$(393) \quad \sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_E;$$

con l'ipotesi della dilatazione massima, applicando le (386), abbiamo:

$$(394) \quad \sigma_{id} = \left| \frac{m-1}{2m} \sigma \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right| \leq \sigma_E.$$

e con $m = 10/3$, quale può ritenersi per l'acciaio :

$$(394') \quad \sigma_{id} = \left| 0,35 \sigma \pm 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \right| \leq \sigma_E.$$

Esprimendo l'energia corrispondente allo stato di tensione qui considerato :

$$\varphi = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau^2}{2G} = \frac{1}{2E} \left(\sigma^2 + 2 \frac{m+1}{m} \tau^2 \right),$$

e tenendo presente la (388), si ha, coll'ipotesi di Beltrami :

$$(395) \quad \sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 2 \frac{m+1}{m} \tau^2} \leq \sigma_E,$$

e per $m = 10/3$:

$$(395') \quad \sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 2,6 \tau^2} \leq \sigma_E.$$

Infine, sostituendo nella (391) per l'ipotesi di Huber i valori delle tensioni principali riguardanti il caso considerato e per deformazione con riduzione di volume, si ottiene :

$$(396) \quad \sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2} \leq \sigma_E.$$

Più evidenti riescono i risultati ora ottenuti traducendoli graficamente. Per esempio, per l'ipotesi della tensione normale massima porremo la (392) nella forma :

$$\frac{\sigma_{id}}{\sigma} = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + 4 \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)^2} \right],$$

e costruiremo la curva avente per ascisse i rapporti $\frac{\tau}{\sigma}$ fra tensione tangenziale e normale, per ordinate i corrispondenti rapporti fra tensione ideale e tensione normale. Similmente procederemo per le altre ipotesi.

L'esame delle curve corrispondenti alle diverse teorie, così ottenute (fig. 122), mostra che, per dati valori di σ e τ , la tensione ideale corrispondente al criterio della tensione normale massima (I) è la più piccola, quella relativa al criterio della tangenziale massima (II) la più grande di tutte; sono intermedie quelle corrispondenti al criterio della dilatazione massima (III), di Beltrami (IV) e di Huber (V).

Il suddetto confronto è più interessante nel caso di sollecitazione a torsione semplice; le condizioni di resistenza corrispondenti alle varie

ipotesi si ottengono da quelle relative al caso precedente annullandovi la tensione normale. Si ottiene così:

nell'ipotesi della tensione principale massima:

$$(397) \quad \tau \leq \sigma_E;$$

in quella della tangenziale massima:

$$(398) \quad \tau \leq 0,5 \sigma_E;$$

nell'ipotesi della dilatazione massima:

$$(399) \quad \tau \leq \frac{m}{m+1} \sigma_E,$$

e con $m = 10/3$:

$$(399') \quad \tau \leq 0,77 \sigma_E;$$

nell'ipotesi di Beltrami:

$$(400) \quad \tau \leq \sqrt{\frac{m}{2(m+1)}} \sigma_E,$$

e con $m = 10/3$:

$$(400') \quad \tau \leq 0,62 \sigma_E;$$

e nell'ipotesi di Huber:

$$(401) \quad \tau \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_E = \approx 0,58 \sigma_E.$$

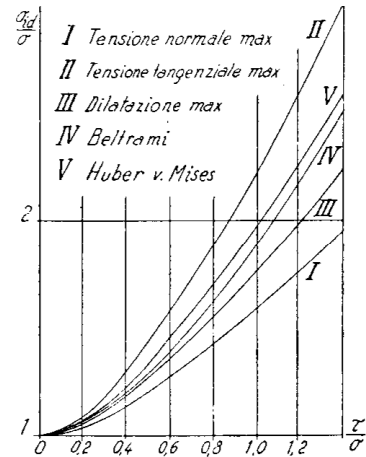


Fig. 122

Il confronto non può essere fatto per le teorie che, come quella di Mohr, fanno dipendere la resistenza dalle proprietà di ogni singolo materiale; ma già i risultati sopra riportati mostrano ben chiaramente che la scelta del carico di rottura è tutt'altro che indifferente per giudicare della sicurezza d'uno stato di tensione non monoassiale.

Nella tabella seguente sono riassunte le condizioni di resistenza corrispondenti ai diversi criteri, relativamente:

agli stati biassiali, soddisfacenti alla condizione:

$$\sigma_x = \tau_{\alpha x} = \tau_{y x} = 0,$$

propri dei sistemi piani;

agli stati di tensione pure biassiali, soddisfacenti alla condizione:

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0,$$

propri della sollecitazione di taglio, flessione ed eventualmente forza normale;

agli stati di tensione ancora biassiali, soddisfacenti alla condizione:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 ,$$

propri della sollecitazione di torsione ;

agli stati di tensione caratterizzati da tensioni principali tutte diverse da zero.

Il prospetto non richiede spiegazioni ove si ricordi che per gli stati di tensione biassiali considerati per primi le tensioni principali in funzione dei parametri non nulli hanno le espressioni (46).

Nei calcoli e nelle applicazioni seguiremo sempre la teoria della dilatazione massima, che è quella imposta dai nostri regolamenti.

118 — Il carico di sicurezza.

Stabilito il criterio di resistenza di cui si vuole far uso e calcolate, con riferimento ad esso, le tensioni ideali nei singoli punti, si tratta di conferire un conveniente margine di sicurezza alla struttura in progetto ponendo opportuni limiti alle massime tensioni σ'_{id} e σ''_{id} .

Potrebbe pensarsi di far coincidere tali limiti con quelli σ'_E e σ''_E d'elasticità o di rottura, ma a parte il fatto che la sicurezza verrebbe in tal caso conseguita senza alcun margine, un simile riferimento richiederebbe la conoscenza precisa sia delle azioni esterne e dello stato di tensione, sia delle caratteristiche del materiale che si impiega.

È ben noto invece che talune azioni non sono suscettibili di valutazione rigorosa e che, d'altra parte, i metodi della teoria dell'elasticità di deduzione dello stato di tensione per date azioni esterne si basano sopra ipotesi che in pratica sono verificate più o meno approssimativamente, sicchè lo stato di tensione reale differisce sempre, più o meno sensibilmente, da quello calcolato. Altre circostanze contribuiscono ad accrescere tale incertezza: le tensioni iniziali corrispondenti allo stato di autotensione in cui si trovano parecchi materiali, gli inevitabili scostamenti delle dimensioni reali da quelle di progetto, ecc.

Quanto alle caratteristiche dei materiali, l'esperienza dimostra che esse possono variare in modo ragguardevole per uno stesso materiale; i valori numerici che le riassumono non sono che dati medi desunti dall'esperienza, rispetto ai quali possono verificarsi scostamenti anche notevoli. Nè un collaudo rigoroso e sistematico, per quanto utile, può escludere

Criterio	Tensioni ideali	STATI BIASIALI		STATI TRIASSIALI
		caratterizzati da due tensioni normali (σ_x, σ_y) e una tensione tangenziale (τ_{xy}) diverse da zero (sistemi piani)	caratterizzati da una tensione normale (σ) e una tensione tangenziale (τ) diverse da zero (flessione e taglio)	
I) tensione principale massima	$\left. \begin{matrix} \sigma'_{id} \\ \sigma''_{id} \end{matrix} \right\} =$ $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{I}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$	$\frac{\sigma}{2} \pm \frac{I}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$	$\pm \tau$	s_1 s_2
II) tensione tangenziale massima	$\left. \begin{matrix} \sigma'_{id} \\ \sigma''_{id} \end{matrix} \right\} =$ $\pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$	$\pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$	$\pm 2\tau$	$s_1 - s_3$
III) dilatazione massima	$\left. \begin{matrix} \sigma'_{id} \\ \sigma''_{id} \end{matrix} \right\} =$ $\frac{m-1}{2m} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$	$\frac{m-1}{2m} \sigma \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$	$\pm \frac{m+1}{m} \tau$	$s_1 - (s_2 + s_3) : m$ $s_3 - (s_1 + s_2) : m$
IV) ipotesi di Beltrami	$\left. \begin{matrix} \sigma'_{id} \\ \sigma''_{id} \end{matrix} \right\} =$ $\pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2 \frac{m+1}{2m} \tau_{xy}^2}$	$\pm \sqrt{\sigma^2 + 2 \frac{m+1}{m} \tau^2}$	$\pm \sqrt{\frac{2(m+1)}{m}} \tau$	$\pm \left[(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - \frac{2}{m} (s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3) \right]^{1/2}$
V) ipotesi di Huber	$\left. \begin{matrix} \sigma'_{id} \\ \sigma''_{id} \end{matrix} \right\} =$ $\pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$	$\pm \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$	$\pm \sqrt{3} \tau$	$\pm \left\{ \frac{I}{2} \left[(s_1 - s_3)^2 + (s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 \right]^{1/2} \right\}$

il pericolo che il materiale in opera presenti resistenza inferiore a quella riscontrata nei saggi sperimentati.

Tutti questi motivi giustificano ampiamente il criterio prudenziale di esigere che le tensioni ideali non superino certe frazioni delle tensioni al limite d'elasticità o di rottura.

Scelto un certo coefficiente $\nu > 1$, detto *coefficiente o grado di sicurezza*, si pongono perciò alle massime tensioni ideali i limiti:

$$(402) \quad k' = \frac{1}{\nu} \sigma'_E \quad , \quad k'' = \frac{1}{\nu} \sigma''_E$$

i quali prendono rispettivamente i nomi di *carico di sicurezza a trazione* ed a *compressione*.

Il coefficiente di sicurezza ν , stabilito il più delle volte da norme ufficiali con riferimento alle tensioni di snervamento o di rottura, si assume tanto minore quanto più precisi sono i metodi di calcolo prescritti e più rigorose le norme di accettazione dei materiali e di collaudo delle opere: esso è compreso ordinariamente fra 2 e 10.

119 — Condizioni di sicurezza.

Il problema di verificare la sicurezza di un sistema resistente soggetto a date azioni esterne si risolve in definitiva attraverso le seguenti operazioni:

determinazione dello stato di tensione corrispondente alle azioni assegnate;

calcolo delle tensioni ideali nei punti del sistema che si presumono più cimentati;

verifica che la massima *fra tutte* queste tensioni ideali positive e la massima fra tutte le negative (minima algebrica) non superino rispettivamente il carico di sicurezza a trazione ed a compressione, o in altri termini che siano soddisfatte le *condizioni di sicurezza*:

$$(403) \quad \max \sigma_{id} \leq k' \quad , \quad | \max \sigma''_{id} | \leq k'' .$$

Con l'avvertenza che fra le tensioni ideali di confronto intendiamo sempre indicare la *massima* e la *minima fra tutte*, riassumiamo qui appresso le condizioni di sicurezza corrispondenti al criterio della dilatazione massima per i casi che ricorrono più frequentemente.