

CAPITOLO XIII

FORZA NORMALE ECCENTRICA

90 — Espressione della tensione normale.

Supponiamo che le azioni applicate alla base libera del cilindro equivalgano staticamente a una forza N parallela all'asse z (fig. 82), la cui linea d'azione incontri le sezioni rette in un certo punto X , che conveniamo di chiamare *centro di sollecitazione*. Le caratteristiche della sollecitazione relative ad una sezione qualunque sono allora una forza normale N ed un momento flettente M il cui asse di sollecitazione s coincide con la baricentrica XO ; il cilindro è cioè cimentato a forza normale ed a flessione, in generale deviata.

In virtù del principio di sovrapposizione degli effetti, tenendo presenti le (155) e (173), essendo notoriamente x *l'asse neutro della flessione*, coniugato all'asse s nell'ellisse centrale d'inerzia della sezione, M_x il *momento flettente attivo nel piano di flessione*, la tensione normale ha l'espressione :

$$(342) \quad \sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_x y}{J_x},$$

ovvero, con riguardo alla (178), l'altra :

$$(343) \quad \sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M \eta}{J},$$

dove M è il *momento della coppia flettente totale*.

Osservando che quest'ultimo è uguale al prodotto della N per la sua eccentricità e rispetto al baricentro, e che, detto ρ il raggio d'inerzia del-

l'ellisse centrale disteso sull'asse di sollecitazione, è $J = A \rho^2$, la (342) prende la forma :

$$(343') \quad \sigma_x = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e\eta}{\rho^2} \right).$$

La sezione di ascissa z ruota nella flessione dell'angolo $\alpha_x = \frac{M_x}{E J_x} z$, mentre per effetto della forza assiale subisce parallelamente all'asse z la traslazione $w_x = \frac{Nz}{EA}$ (fig. 82, a). Il moto risultante nella sollecitazione composta è pertanto una rotazione di ampiezza uguale alla precedente,

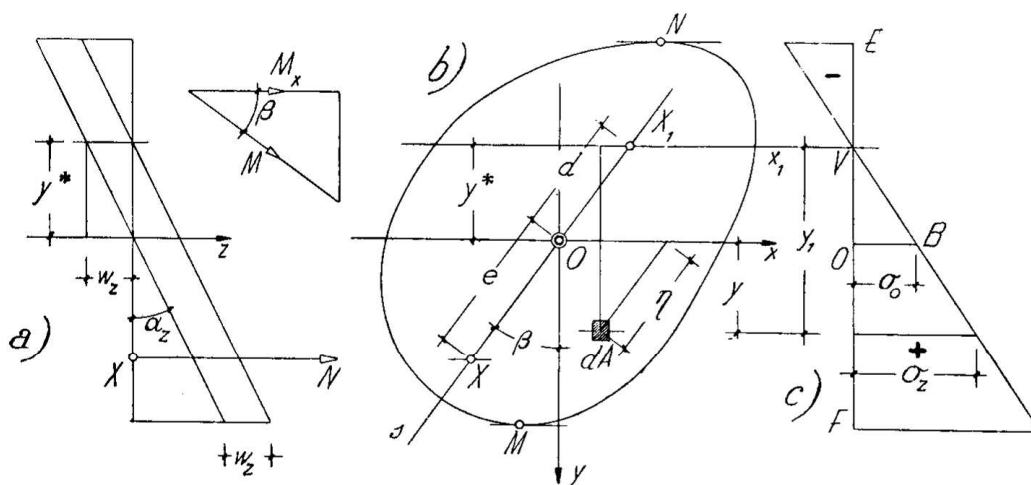


Fig. 82

ma che avviene intorno ad un asse x_1 , parallelo all'asse x e situato ad una distanza da questo individuata dal rapporto :

$$(344) \quad y^* = - \frac{w_x}{\alpha_x} = - \frac{\frac{N}{A}}{\frac{M_x}{J_x}} = - \frac{\rho^2}{e} \cos \beta,$$

dove β esprime la deviazione.

La (343') per $\sigma_x = 0$ prova che il luogo dei punti di tensione nulla è lo stesso asse x_1 ; siccome poi con $\sigma_x = 0$ è $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 0$, lo stesso asse x_1 si riconosce per l'asse neutro relativo alla sollecitazione composta a forza normale eccentrica. All'asse x , che sarebbe l'asse neutro in assenza della forza normale, per una coppia flettente agente con asse di sollecitazione s , daremo ora il nome di *asse neutro di flessione pura*.

91 — Corrispondenza fra centro di sollecitazione ed asse neutro.

La (344), che può anche scriversi :

$$(345) \quad d = \frac{y^*}{\cos \beta} = -\frac{\rho^2}{e},$$

dimostra che l'asse neutro è situato dalla parte opposta del centro di sollecitazione rispetto al baricentro della sezione, e che il centro di sollecitazione X ed il punto X' in cui l'asse di sollecitazione è tagliato dall'asse neutro (fig. 82, *b*), sono coniugati nella involuzione che la polarità d'inerzia subordina sull'asse di sollecitazione: l'asse neutro x_1 , che essendo parallelo all'asse x ha, come questo, direzione coniugata a quella dell'asse di sollecitazione, è perciò l'antipolare del punto X rispetto all'ellisse centrale d'inerzia.

A questo medesimo risultato si perviene per via sintetica, in base alle seguenti considerazioni.

La σ_x , espressa dalla (342) come funzione lineare di y che si annulla sull'asse x_1 , varia proporzionalmente alle distanze y_1 degli elementi superficiali della sezione dell'asse suddetto (fig. 82, *c*). La forza $\sigma_x dA$ agente sopra un dato elemento superficiale dA , è perciò proporzionale al momento statico dell'elemento stesso rispetto all'asse neutro. La risultante di tutte le tensioni normali deve passare di conseguenza per il centro dei suddetti momenti statici, ossia per l'antipolo dell'asse x rispetto all'ellisse centrale d'inerzia. D'altra parte, per l'equilibrio, oltrechè essere uguale ed opposta alla forza eccentrica N , deve averne la medesima linea d'azione; si conclude perciò che il centro di sollecitazione è proprio l'antipolo dell'asse x .

Sono note dalla geometria proiettiva le costruzioni atte a determinare l'antipolare (asse neutro) di un dato centro (centro di sollecitazione), nota l'ellisse centrale d'inerzia o, ciò che equivale, una sua coppia qualunque di diametri coniugati, in particolare gli assi. Se è data l'ellisse (fig. 83, *a*), si traccia l'asse di sollecitazione XO , si ribalta il raggio ρ dell'ellisse disteso su questo asse, in OR , sulla direzione normale, e si congiunge X con R : come

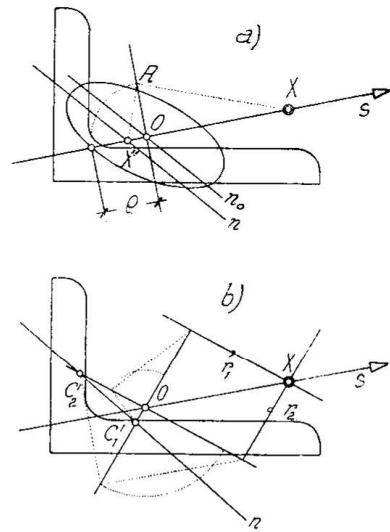


Fig. 83

prova la (345), la normale per R a questa congiungente, incontra l'asse s nel punto X' . La retta per X' avente direzione coniugata all'asse s è l'asse neutro cercato. Se l'ellisse è invece individuata per mezzo degli assi (fig. 83, b), l'asse neutro si ottiene congiungendo i centri C'_1 e C'_2 relativi alle rette r_1 ed r_2 per X , parallele agli assi principali d'inerzia.

92 — Diagramma delle tensioni.

Se nella (342) si pone $y = 0$, si ottiene:

$$\sigma_x = \sigma_o = \frac{N}{A},$$

la quale prova che *la tensione in corrispondenza della baricentrica x parallela all'asse neutro x_i è indipendente dalla posizione del centro di sollecitazione ed uguaglia la tensione media*, quella cioè che produrrebbe nella sezione una forza normale centrata.

Sappiamo poi che la tensione σ_x varia linearmente con l'ordinata y e che è nulla in corrispondenza dell'asse neutro x_i (fig. 82 c). Se quindi, a partire da una fondamentale EF arbitraria, portiamo in $\overline{O'B}$ la tensione N/A sull'asse x , la congiungente il punto B col punto V in cui l'asse x_i taglia la fondamentale, rappresenta la legge di variazione delle tensioni. Le ordinate comprese tra questa retta e la fondamentale, da valutarsi parallelamente all'asse neutro, misurano le tensioni σ_x sugli elementi della sezione.

Dato il centro di sollecitazione, si può riconoscere subito se l'asse neutro taglia o meno la sezione, ricordando che il luogo dei centri relativi agli assi che non tagliano la figura è il nocciolo centrale d'inerzia della sezione stessa. Se dunque il centro di sollecitazione è esterno al nocciolo, l'asse neutro x_i taglia la sezione e le parti di questa da esso separate sono allora soggette a tensioni di segno opposto (dello stesso segno di N le tensioni nella parte ove si trova il centro di sollecitazione) (fig. 84); se invece il centro di sollecitazione è interno o sul contorno del nocciolo, l'asse neutro non taglia la sezione e questa è cimentata tutta da tensioni del medesimo segno di N .

Le sollecitazioni a forza normale e a flessione possono riguardarsi come casi limiti della sollecitazione a forza normale eccentrica. Il primo caso corrisponde ad una eccentricità nulla: centro di sollecitazione X coincidente con il baricentro, asse neutro coincidente con la retta al-

l'infinito del piano; si ha il secondo caso per $e = \infty$ ed N infinitesima (perchè resti finito il momento $M = Ne$): centro di sollecitazione improprio, asse neutro baricentrico.

93 — Tensioni massime.

La tensione normale variando proporzionalmente alla distanza degli elementi superficiali dell'asse neutro, raggiunge i valori massimi sugli elementi situati alla massima distanza da quest'asse. Si avranno in generale due valori in grado di estremo (fig 84): uno massimo positivo σ' , corrispondente all'elemento M maggiormente teso, uno massimo negativo σ'' , (minimo algebrico), corrispondente all'elemento N maggiormente compresso.

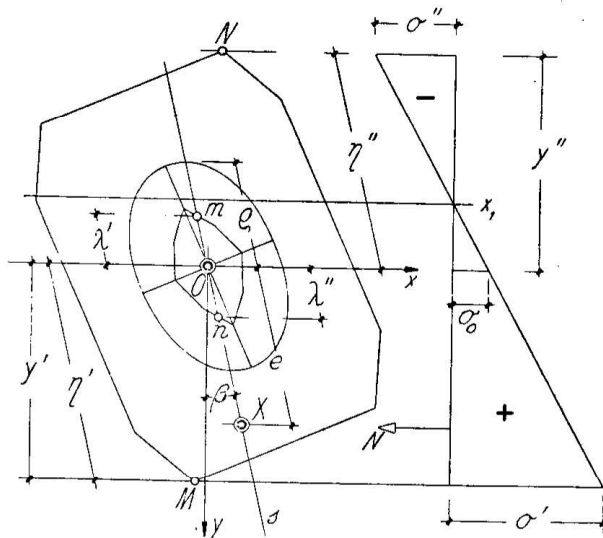


Fig. 84

Le ordinate che il diagramma delle tensioni stacca sulle tangenti al contorno della sezione parallele all'asse neutro, misurano queste tensioni massime.

Per via analitica, applicando la (342), si ottiene:

$$(346) \quad \begin{cases} \sigma' = \frac{N}{A} + \frac{M_x y'}{J_x}, \\ \sigma'' = \frac{N}{A} + \frac{M_x y''}{J_x}; \end{cases}$$

ovvero, dalla (343):

$$(347) \quad \begin{cases} \sigma' = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e r_1'}{\rho^2} \right), \\ \sigma'' = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e r_1''}{\rho^2} \right); \end{cases}$$

le quali ultime, tenendo presenti le (188) della sollecitazione a flessione, si trasformano nelle *formule di Ritter*:

$$(348) \quad \begin{cases} \sigma' = \frac{N}{A} \left(1 - \frac{e}{\lambda'} \right), \\ \sigma'' = \frac{N}{A} \left(1 - \frac{e}{\lambda''} \right), \end{cases}$$

di comoda applicazione quando sia disegnato il nocciolo centrale di inerzia. In assenza di questo occorre determinare i punti M ed N di tensione massima e minima per poterne introdurre le coordinate nelle formule, ciò che richiede in generale la conoscenza dell'asse neutro ⁽¹⁾.

La ricerca di quest'asse può peraltro essere risparmiata nei casi già riscontrati trattando della flessione, e cioè quando esistano punti della sezione che a priori si riconoscono come i più lontani da qualsiasi asse baricentrico. In questi casi, poichè quei punti sono anche i più lontani da ciascuno degli assi principali d'inerzia, le tensioni massime possono esprimersi in funzione dei moduli di resistenza della sezione, e cioè con riguardo alle (187):

$$(349) \quad \begin{cases} \sigma' = \frac{N}{A} + \frac{M_{x_0}}{W'_{x_0}} + \frac{M_{y_0}}{W'_{y_0}}, \\ \sigma'' = \frac{N}{A} - \frac{M_{x_0}}{W''_{x_0}} - \frac{M_{y_0}}{W''_{y_0}}. \end{cases}$$

94 — Momenti di nocciolo.

Supponiamo trasportata la forza eccentrica N dal centro di sollecitazione X ad uno dei punti in cui il contorno del nocciolo centrale incontra l'asse di sollecitazione s , per esempio m (fig. 84), e consideriamo, simultaneo alla forza N applicata in questo punto, il momento flettente:

$$(350) \quad M_m = N(e - \lambda'),$$

derivante dal trasporto effettuato.

Per il principio di sovrapposizione degli effetti potremo calcolare la tensione σ prodotta dalla forza normale N agente in X , in corrispondenza dell'elemento generico della sezione, come somma delle tensioni ivi generate:

dalla forza N agente in m ,
dal momento flettente M_m .

⁽¹⁾ In tutte le espressioni delle tensioni unitarie massime, le caratteristiche della sollecitazione, le coordinate degli elementi più cimentati, i raggi di nocciolo e l'eccentricità vanno sempre introdotti in valore e segno.

In particolare potremo applicare detta sovrapposizione per calcolare la tensione massima σ' , ossia quella attiva *sull'elemento più lontano dall'asse di flessione, che è situato dalla parte opposta di m rispetto al baricentro*. Ma per la prima sollecitazione l'asse neutro, antipolare del punto di nocciolo m , coincide con la tangente al contorno della sezione nel punto M ; la forza eccentrica N agente nel punto di nocciolo m produce dunque sforzo nullo in M . La tensione σ' in questo è allora dovuta integralmente alla rimanente sollecitazione, cioè alla flessione semplice di momento M_m , e, secondo la prima delle (346), detta $\bar{M}_m = M_m \cos \beta$ la componente di M_m attiva nel piano di flessione, vale:

$$(351) \quad \sigma' = \frac{\bar{M}_m y'}{J_x}.$$

Con analogo ragionamento, trasportando la forza N nel punto di nocciolo n e ponendo:

$$(350') \quad M_n = N(e - \lambda'),$$

$\bar{M}_n = M_n \cos \beta$, troviamo per la tensione minima l'espressione:

$$(351') \quad \sigma'' = \frac{\bar{M}_n y''}{J_x}.$$

Introducendo infine i moduli di resistenza, le tensioni estreme risultano espresse dalle:

$$(352) \quad \sigma' = \frac{\bar{M}_m}{W_x'} \quad , \quad \sigma'' = -\frac{\bar{M}_n}{W_x''}.$$

I momenti \bar{M}_m ed \bar{M}_n vengono detti *momenti di nocciolo*: essi hanno segno contrario ovvero segno concorde, secondo che X sia interno od esterno al nocciolo. L'impiego di questi momenti *permette dunque di calcolare le tensioni massime dovute alla forza normale eccentrica mediante le formule monomie relative alla flessione semplice*.

95 — Applicazioni alla sezione rettangolare.

La sezione retta del prisma sia rettangolare (fig. 85) e il centro di sollecitazione appartenga ad una delle mediane. Detti b e h i lati del rettangolo rispettivamente normale e parallelo all'asse di sollecitazione, e

ricordando che i raggi di nocciolo distesi su quest'asse valgono :

$$\lambda' = -\frac{1}{6}h \quad , \quad \lambda'' = \frac{1}{6}h \quad ,$$

le (348) possono scriversi :

$$(353) \quad \sigma' = \frac{N}{bh} \left(1 + \frac{6e}{h} \right) \quad , \quad \sigma'' = \frac{N}{bh} \left(1 - \frac{6e}{h} \right) .$$

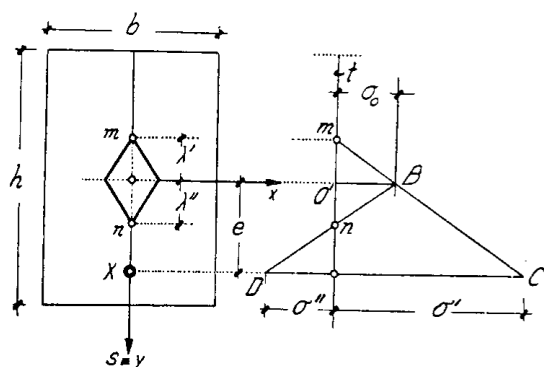


Fig. 85

Il modulo di resistenza relativo all'asse x , unico perchè è $y' = -y'' = \frac{h}{2}$, vale poi :

$$W_x = 2 \frac{J_x}{h} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{\frac{1}{2}h} = \frac{1}{6}bh^2 ;$$

le (352) divengono allora :

$$(354) \quad \sigma' = \frac{6M_m}{bh^2} \quad , \quad \sigma'' = -\frac{6M_n}{bh^2} .$$

Le tensioni massime si possono anche determinare in funzione della tensione normale media con una facile costruzione grafica che si giustifica introducendo nelle (353) la tensione $\sigma_0 = N:bh$, ponendole cioè nella forma :

$$\sigma' = \sigma_0 \frac{\frac{h}{6} + e}{\frac{h}{6}} \quad , \quad \sigma'' = \sigma_0 \frac{\frac{h}{6} - e}{\frac{h}{6}} .$$

Segnata la traccia t della sezione, si porti normalmente ad essa, in \overline{OB} , la misura della tensione σ_0 , indi si proietti il punto B dai punti di nocciolo m ed n ; si ottengono così sulla normale per X alla traccia suddetta i punti C, D , le cui ascisse, contate dalla traccia stessa, misurano in valore (nella scala scelta per σ_0) e segno (definito dal senso scelto come positivo nel portare σ_0) le tensioni massime σ' e σ'' .

96 — Solidi non resistenti a trazione.

Alcuni materiali d'impiego estesissimo nelle costruzioni, quali le murature ed i calcestruzzi, si ritengono idonei a sopportare esclusiva-

mente tensioni normali negative, ossia sforzi di compressione ⁽¹⁾.

Affinchè la teoria precedentemente esposta sia senz'altro applicabile ai prismi costituiti di questi materiali, è necessario non soltanto che la forza N sia di compressione, ma occorre pure che il *centro di pressione* X non cada fuori del nocciolo centrale d'inerzia della sezione retta. Sono queste infatti le condizioni necessarie e sufficienti perchè l'asse neutro non tagli la sezione e questa sia compressa su tutti i suoi elementi.

Se il centro X è esterno al nocciolo, non potendosi ammettere sforzi di trazione, una parte della sezione rimane *inerte* e si deve quindi riguardare come inesistente; la rimanente parte, detta *reagente*, è compressa. Le due porzioni sono separate dalla retta antipolare del centro X rispetto all'ellisse d'inerzia *della sola zona reagente*, e questa *retta separatrice* è necessariamente diversa dall'asse neutro corrispondente al caso della sezione omogenea, reagente cioè anche a trazione, che notoriamente è invece l'antipolare del centro X rispetto all'ellisse d'inerzia di *tutta la sezione* ⁽²⁾. Il diagramma delle tensioni si riduce ad un triangolo con ordinata nulla sull'asse di separazione (fig. 86).

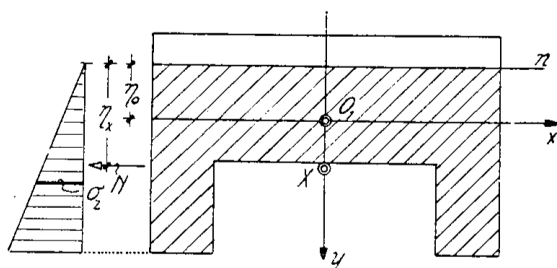


Fig. 86

Se indichiamo con η_{ix} ed η_{io} le ordinate valutate dalla retta separatrice n rispettivamente del centro di sollecitazione X e del baricentro O , della sezione parzializzata di area A_r , con S_r il momento statico, J_r il momento d'inerzia di A_r rispetto all'asse n , può scriversi:

$$J_r = A_r \eta_{io} \eta_{ix} = S_r \eta_{io} .$$

Da questa si trae la relazione:

$$(355) \quad \eta_{ix} = \frac{J_r}{S_r} ,$$

(1) Murature e calcestruzzi hanno resistenza a trazione debole ed incerta, sia perchè i costituenti stessi, pietre e mattoni, mal resistono a sforzi di trazione, sia perchè i vari elementi sono semplicemente sovrapposti od accostati gli uni agli altri (*murature a secco*), oppure cementati con malta essa pure di resistenza a trazione assai limitata (*muratura ordinaria, calcestruzzi*).

(2) È facile dimostrare che la retta separatrice è situata sempre fra il centro di pressione e l'asse neutro corrispondente all'ipotesi della coesistenza degli sforzi di trazione; in altri termini la zona compressa è sempre più piccola nel caso in cui la sezione sia parzializzata.

la quale determina la retta separatrice fra zona reagente e zona inerte.

* * *

Se la sezione presenta un asse di simmetria s ortogonale od obliqua e il centro di sollecitazione X (sempre esterno al nocciolo centrale d'inerzia di tutta la sezione) giace su quest'asse, la direzione della retta separatrice n è quella delle corde della sezione bisecate dall'asse s . Le due porzioni in cui la sezione viene divisa da un certo asse n parallelo alle corde suddette sono infatti ancora simmetriche rispetto ad s , e perciò

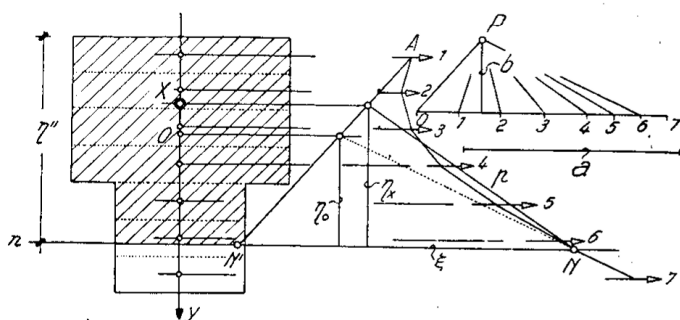


Fig. 87

l'antipolo X di n rispetto all'ellisse centrale di una qualunque delle due porzioni (nel problema di cui si tratta interessa naturalmente la porzione che contiene il centro X) è certamente situato su s . È vera allora anche la reciproca: l'antipolare n di un qualunque centro X su s rispetto

all'ellisse centrale di quella parte A_r della sezione che è separata dalla stessa retta n e che contiene X , è parallela alle corde bisecate dall'asse di simmetria s .

L'asse di separazione n si può determinare in tal caso mediante la seguente costruzione grafica.

Si divida la figura in striscie parallele alle corde bisecate dall'asse di simmetria (fig. 87), si riducano le aree di queste striscie ad una comune base a e si applichino come forze, parallelamente alle dividenti, nei baricentri delle rispettive striscie. Si costruisca la retta delle forze, portando queste nello stesso ordine con cui si succedono le striscie a partire dal lembo maggiormente compresso, e si tracci il poligono funicolare p connettente tali forze con distanza polare arbitraria b . Si proietti quindi, parallelamente alle forze, il centro X in X' , sul primo lato AN' del poligono, e per tentativi si conduca da X' una retta $X'N$, tale che la spezzata $AX'N$ riesca di compenso per il tratto AN del poligono, che risulti cioè nulla l'area intrecciata compresa fra la retta $X'N$ ed il poligono p . È facile dimostrare che la parallela n alle dividenti per il punto N è la retta separatrice cercata.

Infatti, con le notazioni della figura e detta A^* l'area compresa fra il poligono e la retta n , l'area parziale A_r , che l'asse n lascia dalla medesima parte del centro X (tratteggiata in figura) ha, rispetto allo stesso

asse n , il momento statico $S_r = ab\xi$, e, per un noto teorema di Mohr, il momento d'inerzia $J_r = 2abA^*$. D'altra parte è per costruzione $2A^* = \xi\eta_x$. Sostituendo in quest'ultima ξ ed A^* quali si traggono dalle precedenti espressioni di S_r ed J_r , si ritrova la (355), la quale esprime che n è appunto l'antipolare del centro X rispetto all'ellisse centrale d'inerzia dell'area A_r .

Nota la posizione della retta separatrice, con l'ausilio del poligono p si determina la risultante delle forze che misura l'area A_r , la cui linea d'azione incontra l'asse di simmetria nel baricentro O di A_r . La pressione media vale $\sigma_o = N/A_r$; dette pertanto η_o ed η'' le distanze dell'asse di separazione rispettivamente dal baricentro O e dall'elemento maggiormente compresso, avremo la pressione massima:

$$(356) \quad \sigma'' = \frac{N}{A_r} \frac{\eta''}{\eta_o} .$$

* * *

Particolarmente semplice è lo studio della sezione rettangolare cimentata in un punto di una sua mediana situato fuori del nocciolo centrale d'inerzia, cioè esternamente al terzo medio della mediana stessa.

Poichè, per ragioni di simmetria, la retta separatrice dev'essere normale alla mediana coincidente con l'asse di sollecitazione, la sezione parzializzata è essa pure rettangolare.

Indicandone con b la larghezza, con h_i l'altezza, detta inoltre $u = h_i - \eta_x$ la distanza del centro X dal lembo compresso, avremo il momento d'inerzia e quello statico (fig. 88):

$$J_r = \frac{1}{3} b h_i^3 \quad , \quad S_r = \frac{1}{2} b h_i^2 ,$$

e quindi, applicando la (355):

$$\eta_x = h_i - u = \frac{2}{3} h_i .$$

Da questa si trae l'altezza della zona reagente:

$$h_i = 3u .$$

Il baricentro del triangolo delle pressioni cade sulla linea d'azione della forza N , come infatti richiede l'equilibrio. La tensione *numerica-*

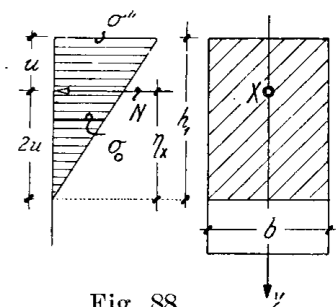


Fig. 88

mente massima vale ovviamente il doppio della media $\sigma_0 = N/3bu$, cioè:

$$(357) \quad \sigma'' = \frac{2}{3} \frac{N}{bu}.$$

* * *

Quando la direzione della retta separatrice non sia nota a priori, lo studio si conduce per tentativi o col metodo di falsa posizione.

Si assegni all'asse di separazione una direzione arbitraria 1 (fig. 89), e se ne determini la posizione n_1 col procedimento indicato per il caso del-

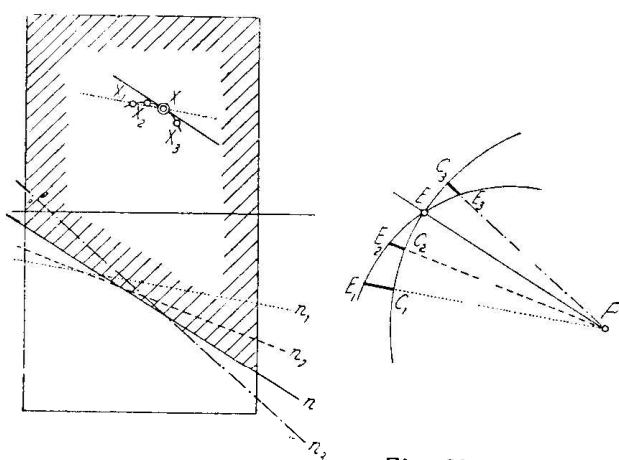


Fig. 89

la sezione cimentata in un punto di un suo asse di simmetria.

Se la retta così determinata avesse per antipolo rispetto all'ellisse della porzione A_{r1} da essa limitata il centro di sollecitazione X , n_1 sarebbe senz'altro l'asse di separazione cercato. In generale invece l'antipolo suddetto sarà un punto X_1 diverso dal centro X , e situato sulla parallela per questo centro alla retta n_1 . Si ese-

guiscano allora altri tentativi partendo da altre direzioni 2, 3, ..., e si determinino le rette n_2, n_3, \dots , ed i centri X_2, X_3, \dots , corrispondenti. Il luogo di questi centri X_i è una linea continua alla quale appartiene il centro di sollecitazione X : la direzione della tangente a tale linea in X è quella stessa dell'asse di separazione cercato.

Convien naturalmente determinare la tangente suddetta, o per dir meglio la sua direzione, col metodo della curva d'errore.

Costruiamo cioè una circonferenza C di raggio arbitrario, ed a partire da essa portiamo in grandezza e segno, su raggi aventi le direzioni 1, 2, 3, ... ordinatamente i segmenti:

$$\overline{C_1 E_1} = \overline{X X_1} \quad , \quad \overline{C_2 E_2} = \overline{X X_2} \quad , \quad \overline{C_3 E_3} = \overline{X X_3} \dots$$

Il luogo dei punti E_i è la curva d'errore del problema: essa taglia la circonferenza in un punto E tale che il raggio PE ha la direzione della tangente in X alla curva luogo dei punti X_i , ossia la direzione della retta separatrice. Questa retta può quindi essere individuata senza difficoltà.