

FLESSIONE COMPOSTA

76 — Verifica delle equazioni del problema.

Abbiamo il sistema di componenti di spostamento :

$$(257) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = -\frac{c}{m} xy - c'z \left(\frac{xy}{m} - a \right), \\ v = -\frac{c}{2} \left(z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m} \right) - c'z \left(\frac{z^2}{6} - \frac{x^2 - y^2}{2m} - b \right), \\ w = cyz - c' \left[yx^2 - y \frac{z^2}{2} + ax + by - \psi(x, y) \right], \end{array} \right.$$

con c e c' costanti piccolissime, $\psi(x, y)$ funzione monodroma, finita, continua e determinata in tutti i punti della sezione del cilindro, a e b costanti positive da determinarsi. Poniamo inoltre :

$$u = u' + u'' \quad , \quad v = v' + v'' \quad , \quad w = w' + w'' ,$$

con :

$$(258) \quad \left\{ \begin{array}{l} u' = -\frac{c}{m} xy \quad , \quad v' = -\frac{c}{2} \left(z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m} \right) \quad , \quad w' = cyz , \\ u'' = -c'z \left(\frac{xy}{m} - a \right), \\ v'' = -c'z \left(\frac{z^2}{6} - \frac{x^2 - y^2}{2m} - b \right), \\ w'' = -c' \left[yx^2 - \frac{yz^2}{2} + ax + by - \psi(x, y) \right]. \end{array} \right.$$

Le equazioni di condizione del problema sono tutte soddisfatte dalle u', v', w' , che si riconoscono identiche alle (160) considerate nella flessione; basterà dunque verificare che vi soddisfino anche le u'', v'', w'' .

Derivando ordinatamente le (258) rispetto ad x, y, z , si ha:

$$\frac{\partial u''}{\partial x} = \frac{\partial v''}{\partial y} = -\frac{1}{m} \frac{\partial w''}{\partial z} = -\frac{c' y z}{m};$$

derivando la prima rispetto ad y e la seconda rispetto ad x :

$$\frac{\partial u''}{\partial y} = -\frac{\partial v''}{\partial x} = -\frac{c' x z}{m};$$

sono perciò soddisfatte le prime tre condizioni della sestupla (136). Sono inoltre nulle le derivate seconde di u'' e v'' rispetto a z , e quelle miste di w'' rispetto a x, z , ed y, z ; risultano pertanto verificate anche la quarta e la quinta condizione. L'ultima della detta sestupla si traduce anche qui nell'equazione di Laplace $\Delta^2 \psi = 0$. Le condizioni di vincolo sono poi tutte soddisfatte, purchè sia:

$$(259) \quad \phi_0 = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_0 = a \quad , \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_0 = b .$$

Finalmente la condizione ai limiti sulla superficie laterale del cilindro si riduce alla forma:

$$m^* \left[-xy \left(\frac{1}{m} + 2 \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + n^* \left[\frac{x^2 - y^2}{2m} - x^2 + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] = 0 ,$$

o anche, tenuto conto che è:

$$m^* = \frac{dx}{dv} \quad , \quad n^* = \frac{dy}{dv} ,$$

alla:

$$(260) \quad \frac{d\psi}{dv} = m^* xy \frac{2m+1}{m} + n^* \left[x^2 \frac{2m-1}{2m} + \frac{y^2}{2m} \right] .$$

Ammissa l'esistenza della funzione armonica $\psi(x, y)$ soddisfacente alle (259) e (260), il sistema di spostamenti (257) costituisce una soluzione del problema di Saint-Venant, purchè si applichino alla base libera le forze che si ottengono dalle (142):

$$(261) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_x = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = G c' \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{2m+1}{m} xy \right), \\ F_y = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = G c' \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{2m-1}{2m} x^2 - \frac{1}{2m} y^2 \right), \\ F_x = E \frac{\partial w}{\partial z} = E(c + c'l)y. \end{array} \right.$$

Imporremo alle costanti c e c' la condizione:

$$(262) \quad c + c'l = 0,$$

con che risulta:

$$F_x = 0.$$

Le caratteristiche della sollecitazione relative alla base libera valgono allora:

$$(263) \quad \left\{ \begin{array}{l} N^* = 0, \\ T_x^* = G c' \left(\int_A \frac{\partial \psi}{\partial x} dA - \frac{2m+1}{m} \int_A xy dA \right), \\ T_y^* = G c' \left(\int_A \frac{\partial \psi}{\partial y} dA - \frac{2m-1}{m} \int_A x^2 dA - \frac{1}{2m} \int_A y^2 dA \right), \\ M_o^* = G c' \left[\int_A \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} x - \frac{\partial \psi}{\partial x} y \right) dA - \frac{2m-1}{2m} \int_A x^3 dA + \frac{m+1}{2m} \int_A xy^2 dA \right], \\ M_x^* = M_y^* = 0. \end{array} \right.$$

Il momento $M_o^* = M_o$ dipende dalla funzione $\psi(x, y)$, mentre è facile che ne sono indipendenti i moduli dei due tagli e quindi il modulo e la direzione del taglio risultante $T^* = T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2}$.

Infatti i momenti flettenti nella sezione generica possono esprimersi applicando le (147):

$$(264) \quad M_x = -T_y(l-z) \quad , \quad M_y = T_x(l-z),$$

oppure in funzione delle tensioni σ_x nella sezione considerata:

$$\begin{aligned} M_x &= E(c + c'z) \int_A y^2 dA = E(c + c'z) J_x, \\ M_y &= -E(c + c'z) \int_A xy dA = -E(c + c') J_{yx}; \end{aligned}$$

uguagliandone le espressioni e tenendo presente la (262), si ottiene perciò :

$$(265) \quad T_y = T_y^* = E c' J_x \quad , \quad T_x = T_x^* = E c' J_{xy} ,$$

d'onde :

$$(266) \quad T = T^* = E c' \sqrt{J_x^2 + J_{xy}^2} .$$

In generale è $M_o = M_o^* \neq 0$, sicchè il taglio risultante T è di regola eccentrico, essendone l'eccentricità $\delta = M_o : T$.

Poichè sono sempre nulle la prima e le due ultime delle caratteristiche (263), in conclusione, oltre ad un momento M_o la cui determinazione è legata alla conoscenza della ψ , le funzioni (257) scelte a rappresentare gli spostamenti implicano per la sezione generica del cilindro le seguenti sollecitazioni :

il taglio risultante $T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2}$, in generale eccentrico,
il momento flettente risultante $M = T(l - z)$;

la prima, indipendente da z , resta immutata per tutte le sezioni del cilindro; la seconda cresce proporzionalmente alle ascisse $l - z$ contate dalla base libera (fig. 57). Il sistema delle forze applicate a quest'ultima equi-

vale perciò staticamente ad una forza $T^* = T$ agente con l'eccentricità δ nel piano della base stessa.

Poichè secondo le (264) e (265), tagli e momenti flettenti debbono rispettare le condizioni :

$$(267) \quad \frac{T_y}{T_x} = - \frac{M_x}{M_y} = \frac{J_x}{J_{yx}} ,$$

assegnati direzione e verso della forza T^* , restano individuati il momento flettente M e di conseguenza, come nella flessione semplice, l'asse neutro x , quello di flessione y e la deviazione β .

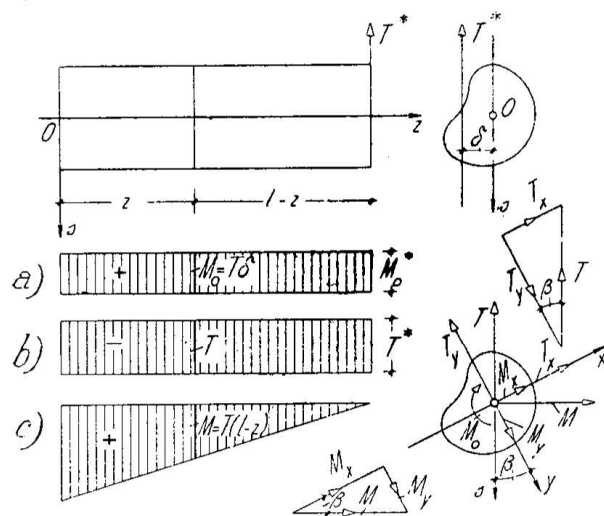


Fig. 57

77 — Analisi della deformazione.

Supponiamo dunque assegnati la direzione ed il verso della forza T^*

agente sulla base libera del cilindro (restandone ancora arbitraria la retta d'azione che risulterà poi individuata dal valore e dal segno di M_0) e conseguentemente determinati il piano di sollecitazione (s, z) , gli assi x, y , nonchè la funzione $\psi(x, y)$ ed il momento $M_0^* = M_0$.

Potranno con ciò riguardarsi come dati del problema il taglio T_y e la rigidezza flessionale EJ_x e dedurne, secondo la prima delle (265), la costante $c' = T_y : EJ_x$. Posto ancora, secondo la (262), $c = -c'l$, le (257) divengono:

$$(268) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = c' \left[\frac{xy}{m} (l - z) + az \right], \\ v = c' \left[\frac{z^2}{2} \left(l - \frac{z}{3} \right) - \frac{x^2 - y^2}{2m} (l - z) + bz \right], \\ w = -c' \left[yz \left(l - \frac{z}{2} \right) + yx^2 + ax + by - \psi(x, y) \right]. \end{array} \right.$$

Le componenti della deformazione corrispondenti a questo sistema di spostamenti valgono intanto:

$$(269) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \varepsilon_y = c' \frac{y}{m} (l - z) \quad , \quad \varepsilon_x = -c' y (l - z) \quad , \quad \gamma_{xy} = 0 \quad , \\ \gamma_{xx} = c' \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{2m + 1}{m} xy \right) \quad , \\ \gamma_{xy} = c' \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{2m - 1}{2m} x^2 - \frac{y^2}{2m} \right) \quad . \end{array} \right.$$

Scelto poi un punto generico M , di coordinate x, y, z , il quale in seguito alla deformazione passi nel punto M' di coordinate:

$$x' = x + u \quad , \quad y' = y + v \quad , \quad z' = z + w \quad ,$$

potremo ottenere l'equazione della trasformata d'una retta r inizialmente parallela all'asse z , scrivendo le espressioni di x' e y' per $x = x_r$ ed $y = y_r$ costanti, ed eliminandovi la z per mezzo dell'espressione di z' . Se conveniamo anche qui di trascurare i termini contenenti le potenze di c' superiori alla prima, la sostituzione equivale a porre z' in luogo di z ; avremo così:

$$(270) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = x_r + c' \left[\frac{x_r y_r}{m} (l - z') + az' \right] \quad , \\ y' = y_r + c' \left[\frac{z'^2}{2} \left(l - \frac{z'}{3} \right) - \frac{x_r^2 - y_r^2}{2m} (l - z') + bz' \right] \quad . \end{array} \right.$$

La prima di queste — l'equazione d'un piano — avverte che la trasformata della retta r è contenuta in un piano; inoltre che tale piano:

è parallelo all'asse y , perchè manca nell'equazione la y' ;
taglia il piano xy secondo una retta situata alla distanza dall'origine:

$$(271) \quad x'_r = x_r + c' \frac{x_r y_r}{m} l,$$

che risulta dall'equazione ponendovi $z' = 0$;

incontra l'asse z in un punto che dista dall'origine di:

$$(272) \quad z'_r = \frac{\frac{1}{c'} + \frac{l}{m} y_r}{\frac{x_r y_r}{m} - a} x_r,$$

che si ottiene ponendo nell'equazione $x' = 0$.

La seconda delle (270) dichiara poi che la trasformata è una parabola cubica; mentre le due equazioni insieme, posto $x_r = y_r = 0$, per cui sarà pure $w = 0$ e di conseguenza $z' = z$, individuano la linea elastica del cilindro. Quest'ultima ha dunque le equazioni (fig. 58):

$$(273) \quad \begin{cases} \xi = c' a z, \\ \eta = c' \left[\frac{z^2}{2} \left(l - \frac{z}{2} \right) + b z \right], \end{cases}$$

e la tangente:

$$tg \alpha = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{dz} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2} = c' \sqrt{a^2 + \left[z \left(l - \frac{z}{2} \right) + b \right]^2}.$$

Le inclinazioni all'asse z delle tangenti all'origine ed all'estremo libero sono pertanto rispettivamente:

$$(274) \quad \begin{cases} tg \alpha_0 = c' \sqrt{a^2 + b^2}, \\ tg \alpha_l = c' \sqrt{a^2 + \left(\frac{l^2}{2} + b \right)^2}. \end{cases}$$

Potendo infine $z = l$ nelle (273), otteniamo le *freccie* del cilindro nei piani xz ed yz :

$$\begin{aligned} f_x &= c' a l, \\ f_y &= c' \left(\frac{l^2}{2} + b \right) l, \end{aligned}$$

coi corrisponde la freccia risultante :

$$(275) \quad f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = c' l \sqrt{a^2 + \left(\frac{l^2}{3} + b\right)^2}.$$

Se si esprime f_y in funzione degli angoli $\alpha_{oy} = \sim \left(\frac{d\eta}{dz}\right)_{z=0} = c'b$ ed $\alpha_{iy} = \sim \left(\frac{d\eta}{dz}\right)_{z=l} = c'\left(\frac{l^2}{2} + b\right)$, si ottiene :

$$f_y = f_{y1} + f_{y2} = c'\left(\frac{l^2}{3} + b\right)l = \left[\frac{2}{3}(\alpha_{iy} - \alpha_{oy}) + \alpha_{oy}\right]l;$$

la tangente estrema incontra dunque quella per l'origine all'ascissa $z^* = l/3$, ciò che conferma una nota proprietà della parabola cubica.

Dalle (269) per $x = y = 0$ si traggono gli scorrimenti nei punti dell'asse del cilindro :

$$\gamma_{xx} = c' \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0 = c'a,$$

$$\gamma_{xy} = c' \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0 = c'b;$$

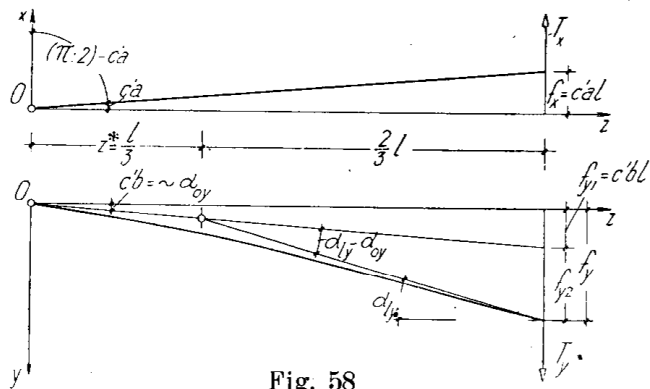


Fig. 58

la curva elastica incontra pertanto tutte le sezioni, compresa la base vincolata, sotto un angolo costante ed uguale a $\frac{\pi}{2} - c'b$ nel piano di flessione, sotto un angolo pure costante ed uguale a $\frac{\pi}{2} - c'a$ nel piano neutro.

* * *

La componente secondo l'asse z del *vettore rotazione* definito dalle (268):

$$r = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -c'x(l-z)$$

caratterizza le deformazioni proiettate nel piano xy . Scritta per una data ascissa z , conferma quanto già esprimono le prime due delle (269), che la sezione generica del cilindro si deforma nel proprio piano. È tuttavia nulla la *rotazione media* della sezione intorno all'asse z :

$$\vartheta_m = -c'(l-z) \frac{\int_A x dA}{A},$$

dato che y è asse baricentrico. In particolare la base libera del cilindro ha rotazione nulla in tutti i suoi punti, sicchè essa resta indeformata nel proprio piano e non ruota intorno all'asse z .

Poichè d'altra parte, il fenomeno caratteristico della torsione consiste proprio nella rotazione nelle sezioni del cilindro, limitando ancora le nostre considerazioni agli spostamenti nel piano xy , rimane acquisito che *pur essendo in generale diverso da zero il momento torcente, gli spostamenti (268) non comportano globalmente una deformazione torsionale del cilindro.* Ne consegue che la deformazione corrispondente alla sollecitazione che si otterrebbe trasportando nel piano della base libera la forza T parallelamente a sè stessa fino a renderla baricentrica, annullando così il momento torcente, comporta rotazioni medie delle sezioni intorno all'asse z uguali ed opposte a quelle rigide spettanti alla torsione pura di momento M_o . Soltanto a tale condizione è infatti possibile che nella sollecitazione effettiva, quale risulta sovrapponendo nel cilindro le azioni della forza T centrata e del momento M_o , svanisca l'effetto torsionale medio sulla deformazione.

* * *

Sebbene sia fisicamente inammissibile l'esistenza d'un momento flettente $M(M_x)$ variabile da sezione a sezione in assenza del taglio $T(T_y)$, torna tuttavia vantaggioso considerare separatamente le due sollecitazioni, talchè la soluzione dell'equilibrio elastico corrispondente alla sollecitazione effettiva possa ottenersi per sovrapposizione delle soluzioni, naturalmente non equilibrate, relative alle sollecitazioni ideali di flessione variabile in assenza di taglio e di taglio eccentrico senza flessione.

Prendiamo pertanto in esame separatamente dal taglio la coppia flettente $M_x = -T_y(l-z)$ attiva nel piano di flessione e calcoliamo le componenti di spostamento u_f, v_f, w_f , corrispondenti ad essa, supponendo il cilindro costituito da una successione di tronchi elementari idealmente cimentati esclusivamente dal momento flettente variabile secondo la nota legge lineare. Dovremo per questo anzitutto derivare le (163) rapporto a z quanto occorre per eliminarvi questa variabile; avremo così:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_f}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial v_f}{\partial z} &= -\frac{M_x}{EJ_x} z, \quad \frac{\partial^2 v_f}{\partial z^2} = -\frac{M_x}{EJ_x}, \\ \frac{\partial w_f}{\partial z} &= \frac{M_x}{EJ_x} y; \end{aligned}$$

sostituendo poi ad M_x la sua espressione in funzione di z e ricordando che è $c' = T_y/EJ_x$, otterremo:

$$\frac{\partial u_f}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 v_f}{\partial z^2} = \frac{T_y(l-z)}{EJ_x} = c'(l-z) ,$$

$$\frac{\partial w_f}{\partial z} = - \frac{T_y(l-z)}{EJ_x} y = - c' y (l-z) ;$$

infine integrando lungo z , avremo:

$$u_f = C_1 \quad , \quad \frac{\partial v_f}{\partial z} = c' z \left(l - \frac{z}{2} \right) + C_2' ,$$

$$v_f = \frac{c' z^2}{2} \left(l - \frac{z}{3} \right) + C_2' z + C_2 ,$$

$$w_f = - c' y z \left(l - \frac{z}{2} \right) + C_3 .$$

Le costanti d'integrazione C_1, C_2, C_3 , si ottengono scrivendo le (163) per $z = 0$ e ponendovi:

$$\frac{M_x}{EJ_x} = - \frac{T_y(l-z)}{EJ_x} = - c'(l-z) ;$$

valgono cioè:

$$C_1 = \frac{c' xy}{m} (l-z) \quad , \quad C_2 = - c' \frac{x^2 - y^2}{2m} (l-z) \quad , \quad C_3 = 0 ;$$

è inoltre:

$$C_2' = \left(\frac{\partial v_f}{\partial z} \right)_0 = 0 ,$$

perchè nella flessione pura le sezioni rette rimangono piane e perciò gli elementi lineari normali alla base vincolata conservano direzione immutata in adiacenza ad essa.

Potremo in conclusione scrivere le componenti cercate nel modo seguente:

$$(276) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_f = c' \frac{xy}{m} (l-z) , \\ v_f = c' \left[\frac{z^2}{2} \left(l - \frac{z}{3} \right) - \frac{x^2 - y^2}{2m} (l-z) \right] , \\ w_f = - c' y z \left(l - \frac{z}{2} \right) . \end{array} \right.$$

La seconda di queste, scritta per $x = y = 0$, fornisce la seguente equazione della linea elastica :

$$(277) \quad \eta = c' \frac{z^2}{2} \left(l - \frac{z}{3} \right),$$

che è una parabola cubica come quella rappresentata dalla (273), ma contenuta nel piano yz e tangente all'asse z nell'origine, data l'assenza dei termini lineari $c'az$ e $c'bz$.

La curvatura della linea elastica nel punto generico è data dalla nota formula :

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2 \eta}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}};$$

se vi trascuriamo il quadrato della derivata di η , molto piccolo rispetto all'unità, otteniamo l'espressione approssimata :

$$(278) \quad \frac{1}{r} = \approx \frac{d^2 \eta}{dz^2}.$$

Introducendo in questa la derivata seconda della (277) rispetto a z , si ottiene :

$$\frac{1}{r} = c' (l - z),$$

o con riguardo alla espressione di c' ed alla prima delle (264) ancora :

$$(279) \quad \frac{1}{r} = - \frac{M_x}{EJ_x}.$$

A questo stesso risultato si perverrebbe introducendo nella (278) la derivata seconda della η espressa dalle (273): resta così dimostrato che *la curvatura della linea elastica è la stessa, sia per la sollecitazione effettiva di flessione composta, sia per la sollecitazione ideale di flessione variabile.*

I coefficienti di dilatazione relativi agli assi di riferimento e lo scorrimento γ_{xy} , che si traggono dalle (276), sono gli stessi forniti dalle (269); gli altri due scorrimenti invece ne differiscono essendo ora :

$$(280) \quad (\gamma_{xx})_f = - c' \frac{xy}{m} \quad , \quad (\gamma_{yy})_f = c' \frac{x^2 - y^2}{2m}.$$

Se ne deduce intanto che *le deformazioni delle sezioni rette proiettate nel piano xy sono le stesse per la flessione variabile semplice oppure composta.*

La terza delle (276), che possiamo porre nella forma :

$$z' = z - c' y z \left(l - \frac{z}{2} \right),$$

definisce una rotazione rigida della sezione generica attorno al suo asse neutro $y = 0$; scritta per $z = z_r = \text{costante}$, fornisce l'equazione :

$$z' = z_r \left[1 - c' y \left(l - \frac{z_r}{2} \right) \right]$$

del piano nel quale si porta la sezione di ascissa z_r . Detto piano taglia il piano xy secondo la retta di equazione :

$$y = \frac{1}{c' \left(l - \frac{z_r}{2} \right)}$$

e forma col piano stesso l'angolo :

$$\alpha = c' z_r \left(l - \frac{z_r}{2} \right).$$

Esaminiamo gli spostamenti che si ottengono sottraendo dalle (268) le (276) relative alla sola flessione :

$$(281) \quad u_t = c' a z \quad , \quad v_t = c' b z \quad , \quad w_t = -c' [y x^2 + a x + b y - \psi(x, y)],$$

Le corrispondenti componenti della deformazione non identicamente nulle quali possono ottenersi indifferentemente per derivazione degli spostamenti o per differenza tra le (269) e le (280), sono gli scorrimenti :

$$(282) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\gamma_{xx})_t = c' \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - 2xy \right), \\ (\gamma_{yy})_t = c' \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x^2 \right). \end{array} \right.$$

La prima e la seconda delle (281), indipendenti da x e da y , caratterizzano scorrimenti nelle direzioni x ed y che le sezioni subiscono nel loro piano, proporzionalmente a z ; le rette inizialmente parallele a z si

trasformerebbero di conseguenza in rette inclinate di $c'a$ e $c'b$ sulla direzione primitiva. La terza, dipendente esclusivamente da x e da y , definisce un ingobbamento identico per tutte le sezioni del cilindro.

Riguarderemo come dovute alla sola flessione variabile le caratteristiche della deformazione che abbiamo riscontrate comuni alla sollecitazione effettiva ed a quella ideale; attribuiremo perciò alla flessione suddetta:

l'incurvamento della linea elastica,
le deformazioni delle sezioni rette, proiettate nel piano xy ,
gli scorrimenti $(\gamma_{xx})_f$ e $(\gamma_{xy})_f$.

Attribuiremo invece esclusivamente al taglio eccentrico le deformazioni riscontrate nella sollecitazione effettiva, ma non in quella di flessione pura con momento variabile, e cioè:

gli scorrimenti $(\gamma_{xx})_t, (\gamma_{xy})_t$, ed in particolare
le inclinazioni $c'a$ e $c'b$ della tangente alla linea elastica in corrispondenza dell'origine, coi conseguenti contributi $c'az$ e $c'bz$ alle inflessioni, l'ingobbamento delle sezioni trasversali.

78 — Stato di tensione.

Le componenti speciali di tensione, con riguardo alle (269) ed alle (137), valgono:

$$\sigma_x = -\frac{T_y}{J_x} (l - z) y,$$

$$\tau_{xx} = G \frac{T_y}{EJ_x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{2m+1}{m} xy \right), \quad \tau_{xy} = G \frac{T_y}{EJ_x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{2m-1}{2m} x^2 - \frac{y^2}{2m} \right),$$

e tenute presenti le (98) nonchè la prima delle (264), si possono anche scrivere:

$$(283) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{M_x y}{J_x}, \\ \tau_{xx} = \frac{T_y}{2(m+1)J_x} \left(m \frac{\partial \psi}{\partial x} - (2m+1) xy \right), \\ \tau_{xy} = \frac{T_y}{2(m+1)J_x} \left(m \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{2m-1}{2} x^2 - \frac{y^2}{2} \right). \end{array} \right.$$

La tensione normale σ_x dipende pertanto dal solo momento flettente con la stessa legge lineare espressa dalla formula di Navier della flessione pura.

Le tensioni tangenziali, indipendenti da z , derivano invece:
dalla flessione variabile, per le quote (1):

$$(284) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\tau_{xx})_f = G (\gamma_{xx})_f = - \frac{G}{E} \frac{T_y}{J_x} \frac{xy}{m} = - \frac{T_y}{2(m+1)J_x} xy, \\ (\tau_{xy})_f = G (\gamma_{xy})_f = \frac{G}{E} \frac{T_y}{J_x} \frac{x^2 - y^2}{2m} = \frac{T_y}{2(m+1)J_x} \frac{x^2 - y^2}{2}; \end{array} \right.$$

dal taglio eccentrico per le quote complementari:

$$(285) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\tau_{xx})_t = G (\gamma_{xy})_t = \frac{G}{E} \frac{T_y}{J_x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - 2xy \right) = \frac{m}{2(m+1)} \frac{T_y}{J_x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - 2xy \right), \\ (\tau_{xy})_t = G (\gamma_{xy})_t = \frac{G}{E} \frac{T_y}{J_x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x^2 \right) = \frac{m}{2(m+1)} \frac{T_y}{J_x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x^2 \right). \end{array} \right.$$

Mentre dunque le tensioni normali e le quote (284) delle tensioni tangenziali sono indipendenti dalla funzione armonica $\psi(x, y)$, (2) la valutazione del contributo di tensione dovuto al taglio eccentrico, espresso dalle (285) richiede la conoscenza di tale funzione.

La determinazione di quest'ultima presenta però difficoltà ancora maggiori di quelle che si riscontrano nel caso della torsione. Soluzioni relativamente semplici si hanno per le sezioni ellittiche, in particolare per quella circolare; la sezione rettangolare può esser trattata ricorrendo ad uno sviluppo in serie doppia di Fourier analogo a quello usato per la torsione.

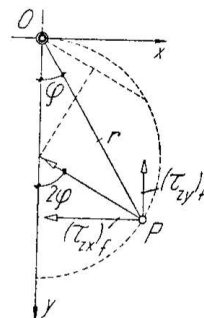


Fig. 59

È notevole che la distribuzione effettiva delle tensioni tangenziali di-

(1) - Sostanzialmente anche queste dipendono dal taglio, in assenza del quale la flessione sarebbe costante e non vi sarebbero tensioni tangenziali.

(2) - La tensione tangenziale risultante dovuta alla flessione variabile, posto $k = T_y : (2m + 1) J_x$, ha l'espressione (fig. 59);

$$(\tau)_f = \frac{k}{2} \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2 y^2} = \frac{k}{2} \sqrt{(x^2 + y^2)^2} = \frac{k}{2} r^2:$$

dal valore zero nel baricentro, cresce cioè con legge quadratica nel raggio vettore procedendo verso il contorno. La sua direzione nel punto $P(r, \varphi)$ è individuata dal rapporto:

$$\frac{(\tau_{xy})_f}{(\tau_{xx})_f} = - \frac{x^2 - y^2}{2xy} = - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\varphi},$$

espressione che permetterebbe di tracciarne agevolmente le traiettorie.

penda dal coefficiente di contrazione laterale, circostanza che si riscontra esclusivamente in questo caso di sollecitazione. Per m tendente al limite teorico -1 dette tensioni crescono oltre ogni limite.

79 — Centro di taglio.

È chiaro che se, per una data direzione della forza T^* agente sulla base libera, il momento torcente simultaneo fosse diverso da quello espresso dalla quarta delle (263), non avrebbe più luogo il noto compenso fra le rotazioni medie delle sezioni dovute alla sollecitazione della forza T^* centrata e le rotazioni dovute al momento torcente puro. In altri termini l'occultamento dell'effetto torsionale nella deformazione è legato ad una ben determinata eccentricità δ della forza sollecitante (fig. 60).

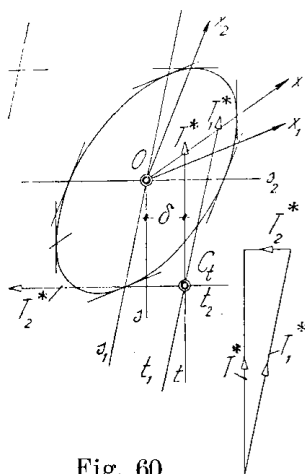


Fig. 60

Se ora scriviamo le (263) per due direzioni x_1 ed x_2 distinte, valutiamo i corrispondenti momenti M_{o_1} ed M_{o_2} e determiniamo le corrispondenti rette d'azione dei tagli T_1^* e T_2^* , l'equilibrio elastico per l'azione simultanea di tali due forze eccentriche potrà ottenersi per sovrapposizione di quelli che corrispondono separatamente alle singole due forze. Ma nella deformazione relativa a

ciascuna di queste è nullo l'effetto torsionale medio; di conseguenza è anche nullo tale effetto quando il cilindro sia cimentato da entrambe le forze, ovverosia dalla loro risultante T^* .

D'altra parte al variare tra $-\infty$ e $+\infty$ del rapporto $T_1^* : T_2^*$, la retta d'azione della T^* esaurisce tutto il fascio avente il centro nel punto di concorso C_t delle rette d'azione di T_1^* e T_2^* ; si conclude pertanto che *le rette dei tagli per la cui azione è nullo l'effetto torsionale medio sulla deformazione, passano per un medesimo punto C_t .*

Tale punto prende il nome di *centro di taglio* della sezione; il luogo dei punti C_t vien detto *asse di taglio*.

* * *

Poichè il centro di taglio è individuato dall'intersezione delle rette dei tagli corrispondenti a due assi neutri distinti, il problema di determi-

narlo potrà dirsi risolto quando per la sezione assegnata si sappia individuare la retta d'azione t del taglio T^* corrispondente ad un dato asse x ; ciò che richiede la conoscenza d'un solo parametro, essendo già nota la direzione della t , coniugata ad x nell'ellisse centrale d'inerzia.

All'uopo determineremo il braccio di leva d_t della T^* rispetto al centro di torsione O_t , misurato nella direzione dell'asse neutro x (fig. 61), scrivendo il lavoro mutuo esterno della sollecitazione corrispondente alle (268) combinata con una torsione pura di momento \bar{M}_0 arbitrario.

Calcoliamo dapprima tale lavoro come dovuto alle forze corrispondenti alle (268) per gli spostamenti dovuti alla torsione di momento \bar{M}_0 .

Sulla base libera, ricordando che per la (240) la rotazione torsionale vale $\vartheta = \bar{M}_0 l : 2GV$, il lavoro sarà:

$$L_{t,t} = T_y d_t \vartheta = \frac{T_y \bar{M}_0 l d_t}{2GV};$$

sulla base vincolata, dove agiscono la T eccentrica mutata di segno ed il momento flettente $M = -Tl$, lavora esclusivamente quest'ultimo in conseguenza degli spostamenti \bar{w} della torsione semplice \bar{M}_0 , dato che in quest'ultima la base suddetta s'ingobba senza ruotare. In accordo con la prima delle (283) scritta per $z = 0$, all'elemento generico della base compete la forza $-\sigma_x dA = T_y l y : J_x$ ed il lavoro $T_y l y \bar{w} dA : J_x$, sicchè per la intera base sarà:

$$L_{t,o} = \frac{T_y l}{J_x} \int_A y \bar{w} dA,$$

dove l'integrale esprime ovviamente il momento statico rispetto al piano xz del solido generato dalla base nell'ingobbamento. Indicando con \bar{W} il volume di tale solido moltiplicato per l'inverso dell'angolo di torsione $1 : \bar{c} = 2GV : \bar{M}_0$ (4), e con y_w la distanza del suo baricentro dal piano xz , potremo scrivere anche:

$$L_{t,o} = \frac{T_y l}{J_x} \frac{\bar{M}_0}{2GV} \bar{W} y_w.$$

(4) - Ricordando ancora la (240) e la terza delle (189), sarà in definitiva:

$$W = \int_A \left[\bar{a}x + \bar{b}y - \bar{\psi}(x,y) \right] dA = - \int_A \psi(x,y) dA.$$

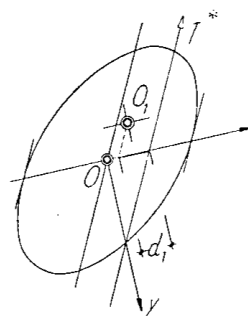


Fig. 61

Complessivamente il lavoro cercato vale dunque:

$$L_i = L_{i,l} + L_{i,o} = \frac{T_y \bar{M}_o l}{2 G V} \left(d_i + \frac{W}{J_x} y_u \right).$$

Calcoliamo ora lo stesso lavoro come dovuto al momento torcente puro \bar{M}_o , per gli spostamenti (268).

Sulla base libera il lavoro è nullo, perchè nulla è la rotazione; sulla base vincolata lavorano le tensioni tangenziali $-\bar{\tau}_{xx}$ e $-\bar{\tau}_{xy}$, in ragione degli spostamenti u e v . Riferendoci per esempio alle (238), tenendo presente al solito la (240) e calcolando gli spostamenti u e v per $z=0$, avremo:

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{\bar{M}_o}{2V} \int_A \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{T_y l}{E J_x} \frac{xy}{m} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{T_y}{E J_x} \frac{x^2 - y^2}{2m} l \right) dA = \\ &= \frac{\bar{M}_o T_y l}{2 V m E J_x} \int_A \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} xy \right) dA. \end{aligned}$$

L'integrale che figura in quest'ultima espressione è uguale al doppio del momento statico del diagramma spaziale di volume V della $f(x, y)$ rispetto al piano yz (4); indicando con x_v la distanza del baricentro di tale diagramma dal piano suddetto, il lavoro può dunque esprimersi nella forma:

$$L_2 = \frac{\bar{M}_o T_y l x_v}{E J_x}.$$

(4) - Indicando con \mathcal{H} la funzione integranda e posto $g(x, y) = \frac{1}{6} (x^3 - 3xy^2)$,
dove $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{2}$, $\frac{\partial g}{\partial y} = -xy$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x$, si ottiene:

$$\int_A \mathcal{H} dA = \int_A \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} \right) dA.$$

Integrando per parti ed osservando che $\Delta^2 g = 2x$, avremo:

$$\int_A \mathcal{H} dA = \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(f \frac{\partial g}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(f \frac{\partial g}{\partial y} \right) \right] dA - 2 \int_A f(x, y) x dA;$$

ma il primo integrale a secondo membro, trasformato in integrale di linea:

$$\int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(f \frac{\partial g}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(f \frac{\partial g}{\partial y} \right) \right] dA = - \int_s f \left[\frac{\partial g}{\partial x} m^* - \frac{\partial g}{\partial y} n^* \right] ds,$$

si riconosce uguale a zero per essere $f(x, y)$ nulla sul contorno; come si era asserito è dunque:

$$\int_A \mathcal{H} dA = - 2 \int_A f(x, y) x dA.$$

Da ultimo, posto per il teorema di reciprocità $L_1 = L_2$, e semplificando, si trae:

$$(286) \quad d_1 = \frac{1}{J_x} \left(\frac{V}{m+1} x_v - W y_w \right).$$

La distanza d_1 ora determinata, che intercorre fra la retta d'azione del taglio risultante T ed il centro di torsione O , della sezione del cilindro, distanza valutata nella direzione dell'asse neutro x , risulta dipendere unicamente dall'asse y stesso, notoriamente coniugato alla direzione del taglio T . Al variare di queste e quindi di x , varia il momento di inerzia J_x , ma restano immutati i diagrammi spaziali delle $f(x, y)$ e $w(x, y)$, e di conseguenza i rispettivi volumi V e W e baricentri G_v e G_w , nonchè le proiezioni ortogonali G'_v e G''_w di questi ultimi sul piano della sezione ⁽¹⁾.

Posto ancora $J_{x_0} = \max J_x$ ed introdotte le costanti:

$$k_1 = V : (m+1) J_{x_0} \quad , \quad k_2 = W : J_{x_0},$$

la (286) prende la forma:

$$d_1 = \frac{J_{x_0}}{J_x} (k_1 x_v - k_2 y_w);$$

se poi contiamo le anomalie φ degli assi x per esempio a partire dall'asse principale x_0 , può ancora scriversi (fig. 62):

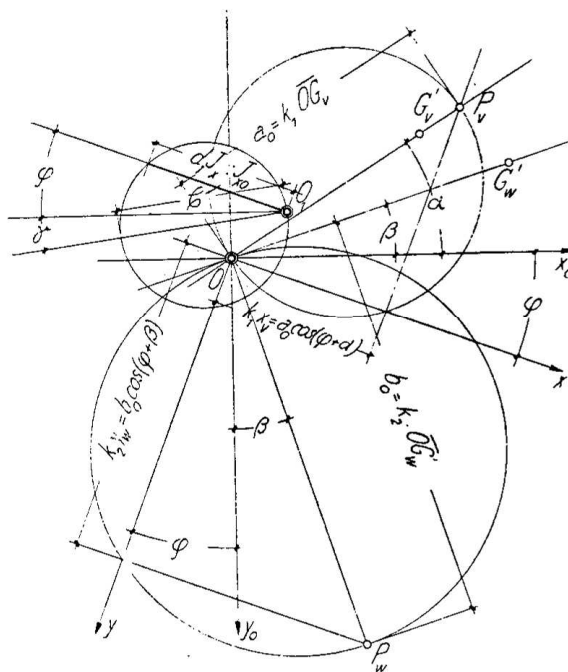


Fig. 62

$$d_1 = \frac{J_{x_0}}{J_x} [\alpha_0 \cos(\varphi + \alpha) - b_0 \cos(\varphi + \beta)] = \frac{J_{x_0}}{J_x} C \cos(\varphi + \gamma) \text{ } ^{(2)},$$

⁽¹⁾ - Il diagramma della $f(x, y)$ è affine a quello della $\zeta(x, y)$ compreso tra la membrana di Prandtl ed il suo contorno indeformato; pertanto esso dipende dalla forma e dalle dimensioni della sezione, ma è invariante per differenti coppie di riferimento x, y . Altrettanto dicasi del diagramma di ordinate $\bar{w} : \bar{c}$, il quale caratterizza l'ingobbamento della sezione per torsione pura.

⁽²⁾ - I termini $a = k_1 x_v$ e $b = k_2 y_w$ variano ciascuno secondo un diagramma polare costituito da una circonferenza passante per il polo (P_v sulla OG'_v , tale che $\overline{OP}_v = a_0 =$

purchè C e γ soddisfino alle condizioni:

$$C^2 = (a_0 \cos \alpha - b_0 \cos \beta)^2 + (a_0 \sin \alpha - b_0 \sin \beta)^2,$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a_0 \sin \alpha - b_0 \sin \beta}{a_0 \cos \alpha - b_0 \cos \beta}.$$

Resta così dimostrato che la distanza d_t si ottiene moltiplicando per la variabile $J_{x_0} : J_x$ il raggio vettore, parallelo all'asse x considerato, di un diagramma polare circolare passante per il polo, ossia per il centro di torsione.

Da ultimo, esprimendo J_x in funzione dei momenti principali di inerzia, si ottiene:

$$(287) \quad d_t = \frac{J_{x_0} C \cos(\varphi + \gamma)}{J_{x_0} \cos^2 \varphi + J_{y_0} \sin^2 \varphi},$$

la quale prova che il diagramma polare che fornisce direttamente la distanza d_t (fig. 63) è l'ellisse omotetica a quella principale d'inerzia della sezione, passante per il centro di torsione O_t , avente il

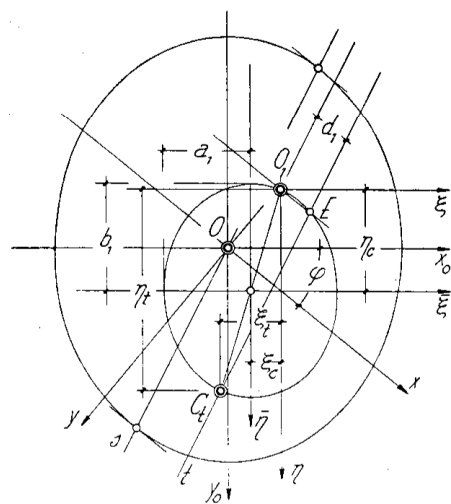


Fig. 63

centro nel punto di coordinate (per assi ξ ed η con origine nel centro di torsione O_t , paralleli ed equiversi a quelli x_0 ed y_0):

$$(288) \quad \xi_c = \frac{C \cos \gamma}{2}, \quad \eta_c = -\frac{J_{x_0} C \sin \gamma}{J_{y_0} 2},$$

$= k_1 \overline{OG'_r}$; P_w sulla normale per O alla OG_w , tale che $\overline{OP_w} = b_0 = k_2 \overline{OG'_w}$). Essendo perciò:

$$a = a_0 \cos(\varphi + \alpha) = a_0 \cos \varphi \cos \alpha - a_0 \sin \varphi \sin \alpha,$$

$$b = b_0 \cos(\varphi + \beta) = b_0 \cos \varphi \cos \beta - b_0 \sin \varphi \sin \beta,$$

alla differenza:

$$a - b = (a_0 \cos \alpha - b_0 \cos \beta) \cos \varphi - (a_0 \sin \alpha - b_0 \sin \beta) \sin \varphi$$

può darsi la forma:

$$C \cos \gamma \cos \varphi - C \sin \gamma \sin \varphi,$$

ove si ponga:

$$C \cos \gamma = a_0 \cos \alpha - b_0 \cos \beta, \quad C \sin \gamma = a_0 \sin \alpha - b_0 \sin \beta.$$

Da queste ultime si traggono le espressioni di C^2 e $\operatorname{tg} \gamma$.

i semiassi :

$$a_t = \frac{C J_{x_0}}{2 J_{x_0}} \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma}{J_{x_0}} + \frac{\sin^2 \gamma}{J_{y_0}}},$$

$$b_t = \frac{C J_{x_0}}{2 J_{y_0}} \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma}{J_{x_0}} + \frac{\sin^2 \gamma}{J_{y_0}}}.$$

ed il rapporto di omotetia :

$$(289) \quad K = \frac{C}{2} \sqrt{\frac{A}{J_{y_0}} \left(\cos^2 \gamma + \frac{J_{x_0}}{J_{y_0}} \sin^2 \gamma \right)}, \quad (1)$$

dove A esprime l'area della sezione.

Nota l'ellisse diagramma polare dei raggi d_t , la determinazione della retta d'azione t della T corrispondente ad un dato asse x è immediata. Basta all'uopo individuare il punto E in cui la parallela ad x per il polo O_t incontra l'ellisse e condurre per esso la retta t avente direzione coniugata ad x nell'ellisse medesima e quindi anche in quella centrale d'inerzia.

La retta t così individuata passa necessariamente per il punto C_t ,

(1) - Introdotte le coordinate $\xi = d_t \cos \varphi$, $\eta = d_t \sin \varphi$, la (287), ridotta a forma intera, diviene :

$$(a) \quad J_{x_0} \xi^2 + J_{y_0} \eta^2 - J_{x_0} \xi C \cos \gamma + J_{x_0} \eta C \sin \gamma = 0,$$

che si riconosce per l'equazione d'una ellisse passante per l'origine O_t degli assi ξ ed η di riferimento, avente assi paralleli a questi, cioè gli assi principali d'inerzia.

Le coordinate del centro, espresse dalle (288), hanno valori metà di quelli che si ottengono dall'equazione ponendovi successivamente $\eta = 0$, $\xi = 0$.

Riferita l'ellisse ai suoi assi $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, posto cioè :

$$\xi = \bar{\xi} + \xi_c = \bar{\xi} + \frac{C \cos \gamma}{2}, \quad \eta = \bar{\eta} + \eta_c = \bar{\eta} - \frac{J_{x_0} C \sin \gamma}{J_{y_0} 2},$$

e semplificando, la (a) diviene :

$$(b) \quad J_{x_0} \bar{\xi} + J_{y_0} \bar{\eta}^2 - \left(\frac{J_{x_0} C}{2} \right)^2 \left(\frac{\cos^2 \gamma}{J_{x_0}} + \frac{\sin^2 \gamma}{J_{y_0}} \right) = 0.$$

Dividendo il termine noto di quest'ultima per la costante K^2 quale si ottiene dalla (289), e sostituendo le coordinate x_0, y_0 , alle $\bar{\xi}, \bar{\eta}$, si ottiene l'equazione agli assi dell'ellisse centrale d'inerzia :

$$J_{x_0} x_0^2 + J_{y_0} y_0^2 - \frac{J_{x_0} J_{y_0}}{A} = 0,$$

ciò che prova sussistere la dichiarata omotetia.

I semiassi a_t e b_t della (b) si ottengono ovviamente moltiplicando per K i corrispondenti semiassi $\sqrt{J_{x_0} : A}$, $\sqrt{J_{y_0} : A}$, dell'ellisse centrale d'inerzia.

estremo opposto ad O_i del diametro passante per O_i ⁽⁴⁾. Il punto C_i è pertanto il centro di taglio della sezione. Le sue coordinate sono ovviamente:

$$(290) \quad \xi_t = 2\xi_c = \frac{CJ_{x_0} \cos \gamma}{J_{x_0}} \quad , \quad \eta_t = 2\eta_c = -\frac{CJ_{x_0} \sin \gamma}{J_{y_0}} \quad ,$$

e possono anche esprimersi, applicando la (286) successivamente per $x = x_0$ ed $x = y_0$, nel modo seguente:

$$(291) \quad \xi_t = \frac{1}{J_{x_0}} \left(\frac{V}{m+1} x_{ov} - W y_{ov} \right) \quad , \quad \eta_t = \frac{1}{J_{y_0}} \left(\frac{V}{m+1} y_{ov} - W x_{ov} \right) \quad .$$

Per l'asse x^* coniugato al diametro $O_i C_i$ risulta $d_i = 0$, ciò che, avuto riguardo alla (286), importa:

$$\frac{y_w^*}{x_v^*} = \frac{V}{(m+1)W} \quad .$$

Ponendo infine la (289) nella forma:

$$(292) \quad K^2 = \frac{(CJ_{x_0})^2}{4} \frac{A}{J_{x_0} J_{y_0}} \left(\frac{\cos^2 \gamma}{J_{x_0}} + \frac{\sin^2 \gamma}{J_{y_0}} \right) \quad ,$$

si constata che il fattore per cui è moltiplicata la quantità $(CJ_{x_0})^2$ al secondo membro è in generale molto piccolo, in quanto dell'ordine di grandezza dell'area della sezione divisa per i prodotti $J_{x_0}^2 J_{y_0}$, $J_{x_0} J_{y_0}^2$. Ne deriva che anche il rapporto di omotetia K è in generale molto piccolo. Di conseguenza, per sezioni aventi momenti principali d'inerzia dello stesso ordine di grandezza, è relativamente piccolo il diagramma polare del braccio d_i e perciò *il centro di taglio relativamente vicino al centro di torsione*.

I due centri cadono nello stesso punto, nel quale perciò si condensa l'ellisse dei bracci d_i , per $\xi_t = \eta_t = 0$, ciò che, per le (291), importa le condizioni (fig. 64):

$$\frac{y_{ov}}{x_{ov}} = \frac{x_{ow}}{y_{ow}} = \frac{r_w}{r_v} = \frac{V}{(m+1)W} \quad ,$$

le quali impongono la mutua ortogonalità dei raggi vettori $r = \overline{OG}'_w$,

(4) - Le direzioni che dal punto generico d'una conica proiettano gli estremi d'un diametro, hanno direzioni coniugate rispetto alla conica.

$r_v = \overline{OG_v}$ ed il loro rapporto. Parimenti i due centri sono coincidenti per $m = \infty$ ($1/m = 0$) ⁽⁴⁾.

Se la sezione possiede un asse di simmetria per esempio l'asse y_o , la funzione ψ è dispari in x_o , e ne risulta $W = 0$. Cadono sull'asse y_o il centro di torsione ($\xi_t = x_{ot}$), il punto G'_v ($x_{ov} = 0$) e conseguentemente, in base alla prima delle (291), il centro di taglio ($\xi_t = x_{ot} = 0$). L'unico parametro che individua quest'ultimo è allora:

$$\eta_{it} = y_{ot} = \frac{V}{m+1} \frac{y_{ov}}{J_{y_o}}.$$

Se anche x_o è asse di simmetria, la condizione $y_{ov} = 0$ importa $\eta_{it} = 0$, nel qual caso il centro di taglio, come quello di torsione, coincide col baricentro della sezione.

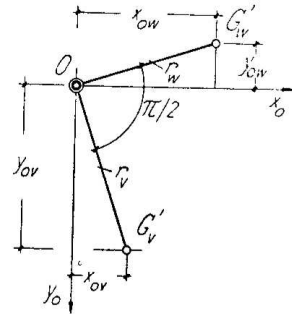


Fig. 64

80 — La funzione degli sforzi. Analogia di Meinesz.

Introduciamo la funzione $f(x, y)$ soddisfacente alle condizioni:

$$(293) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{2m+1}{m} xy, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{2m-1}{2m} x^2 - \frac{2m+1}{2m} y^2 + \varphi(x) \end{cases}$$

essendo la φ funzione della sola x .

Avuto riguardo a queste posizioni ed alle (283), le tensioni tangenziali assumono le espressioni:

$$(294) \quad \tau_{xx} = -Gc' \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = Gc' \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{m+1}{m} y^2 + \varphi(x) \right).$$

(4) - Se nella determinazione del lavoro mutuo che porta a stabilire la (286) si prescindesse dal contributo relativo alla base vincolata, come dovrebbe ammettersi se il vincolo fosse esteso all'intera base anzichè localizzato nell'elemento baricentrico, risulterebbe sempre $d_t = 0$, ciò che proverebbe sussistere generalmente la coincidenza $C_t = O_t$ (Maillart e Weber). Tale dimostrazione sarebbe allora rigorosa, purchè riferita all'asse di torsione corrispondente alle mutate condizioni di vincolo, che è in generale distinto da quello corrispondente al vincolo teorico.

L'equazione ai limiti sulla superficie laterale, tenute presenti le (232):

$$-\frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} = -\frac{dx}{ds} \frac{m+1}{m} y^2 + \frac{dx}{ds} \varphi(x)$$

si traduce nella condizione:

$$(295) \quad \frac{df}{ds} = \frac{dx}{ds} \left(\frac{m+1}{m} y^2 - \varphi(x) \right),$$

la quale permette di calcolare i valori al contorno della $f(x, y)$ una volta definita la funzione $\varphi(x)$.

Derivando poi le (293) ordinatamente rapporto ad y e ad x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{2m+1}{m} x, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{2m-1}{m} x + \frac{d\varphi}{dx}, \end{aligned}$$

e sottraendo la prima dalla seconda, si ottiene la condizione cui la $f(x, y)$ deve soddisfare nell'interno:

$$(296) \quad \Delta^2 f = \frac{2x}{m} - \frac{d\varphi}{dx}.$$

La ricerca della distribuzione delle tensioni tangenziali è così ridotta alla determinazione della funzione degli sforzi $f(x, y)$ soddisfacente alle (295) e (296).

Posto $\varphi(x) = x^2/m$, quest'ultima diviene:

$$(297) \quad \Delta^2 f = 0,$$

che si riconosce per l'equazione differenziale d'una membrana di Prandtl con carico nullo e tensione superficiale costante.

Al contorno dev'essere:

$$\frac{df}{ds} = \frac{1}{m} \left((m+1) y^2 - x^2 \right) \frac{dx}{ds},$$

e pertanto:

$$(298) \quad f(x, y) = \frac{m+1}{m} \int_s y^2 dx - \frac{1}{m} \frac{x^2}{3} + C.$$

Se si portano in scala opportuna ortogonalmente al piano della sezione, i valori della $f(x, y)$ dati dalla (298) si ottiene una curva chiusa Γ , in quanto per l'integrale esteso a tutto il contorno si annulla il termine $\int_s y^2 dx$, esprime il doppio del momento statico della sezione rispetto all'asse baricentrico x (fig. 65).

Le ordinate $\zeta(x, y)$ dei punti d'una membrana tesa sulla curva Γ soddisfano alla (297) nell'interno ed alla (298) sul contorno, e quindi rappresentano la funzione degli sforzi in tutti i punti della sezione, nella scala stessa scelta a rappresentare la $f(x, y)$ sul contorno.

Questa analogia può essere utilizzata con procedimenti analoghi a quelli indicati a proposito dell'analogia di Prandtl nel problema della torsione. Anche qui le componenti τ_{xx} e τ_{xy} possono determinarsi in ciascun punto della sezione previa misura delle pendenze $\partial f / \partial y$ e $\partial f / \partial x$ della membrana nelle direzioni y ed x . L'analogia vale a rigore soltanto per ordinate $\zeta(x, y)$ infinitesime; praticamente occorre che dette ordinate non superino 1/10 della massima dimensione della sezione. Ove tale condizione non sia soddisfatta, conviene introdurre in luogo della $f(x, y)$ una nuova funzione $f_1(x, y)$ soddisfacente alla :

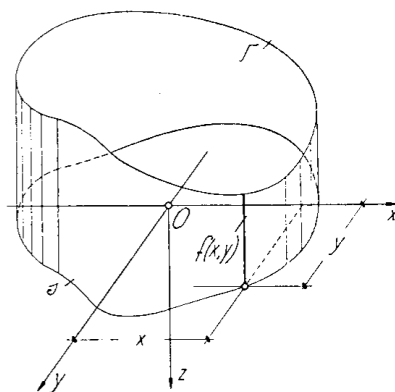


Fig. 65

$$f(x, y) = f_1(x, y) + C_1 x + C_2 y ,$$

disponendo delle costanti arbitrarie C_1 e C_2 per ottenere le riduzioni necessarie. È facile verificare che la $f(x, y)$ rispetta ancora la (297).

81 — Lavoro di deformazione.

Il lavoro di deformazione, ricordando la (94), vale :

$$\Phi_i = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_z^2 dV + \frac{1}{2G} \int_V (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) dV .$$

Potremo riguardare Φ_i come somma dei lavori corrispondenti ai due stati ideali di sollecitazione già considerati, ossia del lavoro :

$$\Phi_M = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_z^2 dV ,$$

dovuto al solo momento flettente $M = -T(l-z)$, e di quello:

$$(299) \quad \Phi_T = \frac{1}{2G} \int_V (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) dV,$$

attribuibile al taglio.

La prima quota di lavoro, ricordando l'espressione di J_x , vale:

$$\Phi_M = \frac{1}{2EJ_x} \int_A y^2 dA \int_0^l M_x^2 dz = \frac{1}{2EJ_x} \int_0^l M_x^2 dz,$$

e sostituendo ad M_x il suo valore e integrando:

$$\Phi_M = \frac{T_y^2 l^3}{6EJ_x};$$

il quale valore, in accordo col teorema di Clapeyron, è uguale al semiprodotto della forza esterna T_y per la freccia $f_l = T_y l^3 / 3EJ_x$, dovuta all'azione del solo momento flettente.

La seconda quota, avuto riguardo alle due ultime delle (283), può esprimersi nel modo seguente:

$$\Phi_T = \left(\frac{m}{m+1}\right)^2 \frac{T_y^2 l}{8GJ_x} \int_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{2m+1}{m} yx\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{2m-1}{2m} x^2 - \frac{y^2}{2m}\right)^2 \right] dA.$$

Nei calcoli tecnici torna invece comoda la seguente forma, analoga a quella relativa agli altri casi fondamentali di sollecitazione:

$$(300) \quad \Phi_T = \chi \frac{T_y^2 l}{2GA},$$

per cui si pone:

$$\chi = \left(\frac{m}{m+1}\right)^2 \frac{1}{4A\rho_x^2} \int_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{2m+1}{m} xy\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{2m-1}{2m} x^2 - \frac{y^2}{2m}\right)^2 \right] dA.$$

ovvero, con riguardo alle (293):

$$\chi = \left(\frac{m}{m+1}\right)^2 \frac{1}{4A\rho_x^2} \int_A \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{m+1}{m} y^2 + \varphi(x)\right)^2 \right] dA.$$

Il coefficiente adimensionale χ , che dipende esclusivamente dalla forma della sezione oltrechè da m , prende il nome di *fattore di taglio*.

Tenute presenti le (299) e (300), possiamo infine scrivere il lavoro totale di deformazione per la sollecitazione di flessione composta con effetto torsionale medio nullo nella forma:

$$(301) \quad \Phi_t = \Phi_M + \Phi_T = \frac{T_y^2 l^3}{6 E J_x} + \chi \frac{T_y^2 l}{2 G A} .$$

82 — Espressioni approssimate delle tensioni tangenziali.

a) Tensione τ_{xy} .

Immaginiamo isolata la porzione di cilindro di lunghezza dz , ulteriormente limitata dal piano $y=y_r$, e consideriamone l'equilibrio alla traslazione secondo l'asse z (figura 66).

Intervengono in tale equilibrio le tensioni σ_x sulle faccie di area finita A_r e le tensioni τ_{yx} sulla faccia di area infinitesima $b_r dz$. Tenuto conto che le prime agiscono con la stessa legge di distribuzione sulle due basi del prisma elementare, ma con intensità diversa

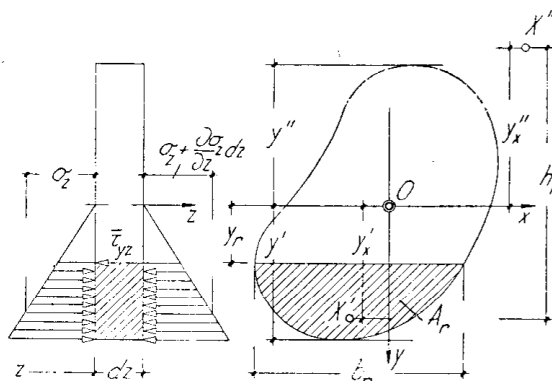


Fig. 66

essendo variabile con z il momento flettente cui sono dovute, e posto:

$$\bar{\tau}_{yx} b_r = \int_{b_r} \tau_{yx} dx ,$$

dove $\bar{\tau}_{yx}$ indica il valore medio delle τ_{yx} sulla corda b_r della sezione, il suddetto equilibrio importa:

$$\bar{\tau}_{yx} b_r dz = \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_{A_r} \sigma_x dA \right) dz = dz \int_{A_r} \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} dA .$$

Questa condizione, avuto riguardo alla prima delle (283), diviene:

$$\bar{\tau}_{yx} b_r = \frac{T_y}{J_x} \int_{A_r} y dA ,$$

da cui, detto S_r il momento statico rispetto all'asse neutro della parte

di sezione che la corda b_r lascia dalla parte delle y positive :

$$(302) \quad \bar{\tau}_{yx} = \frac{T_y S_r}{J_x b_r} .$$

Siccome è $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, sarà pure $\bar{\tau}_{yx} = \bar{\tau}_{xy}$, cioè la (302) esprime anche la media delle tensioni τ_{xy} che si esercitano in una qualunque sezione retta del cilindro al livello della corda b_r parallela all'asse neutro. Tale media è dunque proporzionale alla forza di taglio T_y ed al momento statico S_r rispetto all'asse neutro della porzione di sezione che la corda b_r lascia dalla parte delle y positive, inversamente al momento d'inerzia J_x di tutta la sezione rispetto all'asse neutro ed alla lunghezza b_r della corda.

Supposti noti gli antipoli X' e X'' dell'asse x rispetto alle ellissi centrali d'inerzia delle porzioni in cui la corda b_r divide la sezione, il momento d'inerzia J_x , somma di quelli rispetto allo stesso asse x spettanti a tali porzioni, può scriversi :

$$J_x = S_r (y'_x + y''_x) = S_r h_r .$$

In virtù di tale espressione la (302) prende la forma :

$$(303) \quad \bar{\tau}_{yx} = \frac{T_y}{b_r h_r} ,$$

di più comodo impiego in talune applicazioni. Essa esprime che la tensione media sopra una data corda è uguale a quella che si avrebbe nell'ipotesi d'una ripartizione uniforme della componente T_y sopra un'area rettangolare avente per dimensioni la lunghezza b_r della corda e la distanza h_r , misurata normalmente all'asse x , fra gli antipoli sopra definiti.

Al variare della corda b_r con l'ordinata y_r , nella (302) varia il rapporto S_r/b_r . Quando la corda b_r si avvicina infinitamente alla tangente al contorno della sezione $y = y'$, ovvero all'altra $y = -y''$ (fig. 66), il momento statico S_r tende a zero: nel primo caso perchè tende anche a zero l'area A_r di cui S_r è il momento statico rispetto all'asse neutro x , nel secondo caso perchè A_r tende ad includere l'area A di tutta la sezione, per la quale l'asse neutro è baricentrico. Nei punti della sezione più distanti dall'asse neutro è dunque nulla la tensione tangenziale media $\bar{\tau}_{yx}$ perchè vi è nullo S_r ; e ciò anche quando b_r tenda a zero, perchè S_r diviene infinitesimo di ordine superiore (4).

(4) - Queste conclusioni sono conseguenza delle ipotesi fatte nella posizione del problema di Saint-Venant. Poichè infatti sul contorno la tensione tangenziale ha componen-

La τ_{yz} diviene massima per quel valore di y che rende massimo il rapporto S_r/b_r , cioè per il valore che rispetta la condizione:

$$b_r \frac{\partial S_r}{\partial y} = S_r \frac{\partial b_r}{\partial y}.$$

La $\frac{\partial S_r}{\partial y}$ è sempre nulla per $y=0$, perchè S_r raggiunge il suo valore massimo quando la corda b_r coincide con l'asse neutro; se poi, come si verifica molto frequentemente nelle applicazioni, la larghezza della sezione è costante oppure è in grado di estremo al livello dell'asse neutro, risulta anche $\partial b_r/\partial y = 0$, e allora la tensione tangenziale $\bar{\tau}_{yz}$ raggiunge il suo massimo:

$$(303') \quad \max \bar{\tau}_{yz} = \frac{T_y S_o}{J_x b_o}$$

proprio sull'asse neutro. In generale, poichè la lunghezza b_r può variare in modo affatto arbitrario, non si può dire che la $\bar{\tau}_{xy}$ sia sempre crescente dai lembi della sezione verso l'asse neutro; ciò può invece affermarsi per la $\tau_{xy} b_r$; la quale rappresenta la totalità delle tensioni τ_{xy} che si esercitano sul rettangolo avente per dimensioni la lunghezza b_r della corda e l'unità lineare nel senso dell'asse z ; questo complesso di tensioni è infatti proporzionale a S_r .

Il ragionamento seguito per dedurre la (302) sta anche quando la corda della sezione anzichè parallela all'asse neutro abbia una direzione arbitraria r . La formula fornisce in tal caso la tensione tangenziale media:

$$(302') \quad \bar{\tau}_{rs} = \frac{T_y S_r}{J_x b_r}$$

nella direzione s ortogonale alla corda, sempre esprimendovi b_r la lunghezza della corda, S_r il momento statico *rispetto all'asse neutro* di una delle *parti indipendenti* in cui la sezione resta separata secondo b_r , J_x il momento d'inerzia dell'intera sezione *rispetto allo stesso asse neutro* (1).

te normale al contorno costantemente nulla, nei punti di contatto delle tangenti parallele ad x , sarà sempre $\tau_{zy} = 0$. Se la tangente ha in comune col contorno un sol punto, la $\bar{\tau}_{zy}$ (media) coincide con la τ_{zy} e si annulla con essa; se invece la tangente ha in comune col contorno un tratto finito di lunghezza b_r , la τ_{zy} è nulla in tutti i punti di b_r , e per conseguenza è anche nullo il suo valore medio.

(1) - Ancora più generalmente la corda, traccia sul piano xy d'una certa superficie cilindrica con generatrici parallele all'asse z secondo la quale il cilindro s'immagini se-