

\* \* \*

Il metodo ora indicato è perfettamente legittimo finchè la  $\bar{\tau}_{xs}$  (in particolare la  $\bar{\tau}_{xy}$ ) conservi il significato di media delle tensioni  $\tau_{xs}$  valutate ortogonalmente alla corda generica  $b_r$  passante per un dato punto  $M$  della sezione; perde invece di rigore, per diventare più o meno approssimato, quando, come è d'uso nelle applicazioni, si identifica tale tensione media con la tensione totale effettiva in  $M$ :

$$(304) \quad \bar{\tau}_x = \tau_{xs} = \sqrt{\tau_{zs}^2 + \tau_{zr}^2}.$$

Ciò equivale ad ammettere costante la  $\tau_{xs}$  e nulla la  $\tau_{xr}$  in tutti i punti della corda.

La prima di queste ipotesi è ammissibile sempre che  $b_r$  sia relativamente piccolo, talchè i valori effettivi della  $\tau_{xs}$  alle estremità della corda siano tra loro poco diversi; la seconda può ritenersi praticamente giustificata quando le tangenti al contorno alle estremità della corda siano ortogonali alla corda medesima, nel qual caso la  $\tau_{xr}$ , rigorosamente nulla alle estremità, può ritenersi trascurabile lungo la corda.

Al variare della corda  $b_r$  passante per un dato punto  $M$  della sezione, la (302') porta a risultati più o meno lontani dalla tensione effettiva  $\tau_x$  nel punto; ma tra le corde del fascio di centro  $M$  è spesso possibile individuarne una, non necessariamente parallela all'asse neutro, per cui meglio che per le altre siano soddisfatte le dette condizioni di relativa piccolezza di  $b_r$  e di ortogonalità delle tangenti al contorno nei punti estremi.

È chiaro che il metodo dev'essere applicato proprio per tale corda onde trarne la migliore approssimazione.

\* \* \*

b) *Tensione*  $\bar{\tau}_{xs}$ .

Quando la sezione, per la sua forma e per le particolarità del contorno, non consenta di individuare una corda per cui possa presumersi sufficientemente approssimata la tensione tangenziale valutata con il metodo precedente, risultati più attendibili possono ottenersi riferendosi alla corda parallela all'asse neutro e determinando la tensione tangenziale nel

---

parato longitudinalmente in parti indipendenti, può essere poligonale o curvilinea. Conservando ai simboli della (302) i noti significati, è chiaro che  $b_r$  può constare della somma di vari tratti, quando la sezione presenti rientranze o sporgenze ovvero sia a connessione multipla.

punto che interessa, come risultante della  $\bar{\tau}_{xy}$  calcolata mediante la (302) e della  $\bar{\tau}_{xx}$  quale risulta dalla seguente valutazione approssimata.

Supposta sostituita in via di approssimazione la  $\bar{\tau}_{xy}$  alla  $\tau_{xy}$ , la  $\tau_{xx}$  alle due estremità della corda  $b_r$  può dedursi imponendo la condizione che tale tensione totale, somma vettoriale delle componenti tangenziali secondo gli assi  $y$  ed  $x$ , riesca tangente al contorno della sezione, come dev'essere in virtù della (139). Se indichiamo con  $\alpha''$  l'angolo che la tangente al contorno in uno degli estremi della corda forma con l'asse di sollecitazione, avremo (fig. 67):

$$\bar{\tau}_{zx}'' = -\bar{\tau}_{xy} \operatorname{tg} \alpha'' .$$

Per dedurre poi la legge di variazione lungo la corda di questa  $\bar{\tau}_{xx}$  approssimata, basterà richiamare la terza delle equazioni indefinite di equilibrio:

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} = 0 ,$$

e osservare che, in virtù delle:

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{T_y S_r}{J_x b_r} \quad , \quad \sigma_x = -\frac{T_y (l-z) l}{J_x} ,$$

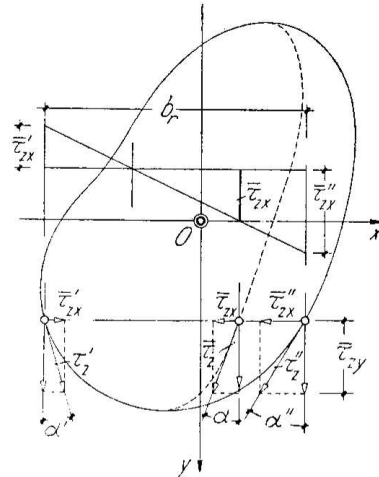


Fig. 67

tanto la  $\partial \tau_x / \partial y$  come la  $\partial \sigma_x / \partial z$  dipendono esclusivamente da  $y$ . Anche la terza derivata  $\partial \bar{\tau}_{xx} / \partial x$ , che compare nella suddetta equazione, dovrà pertanto dipendere soltanto dalla variabile  $y$ ; vale a dire che la  $\bar{\tau}_{xx}$  non può variare che in funzione lineare della sola  $x$ .

Ne consegue che le tensioni risultanti  $\bar{\tau}_x$  nei vari punti d'una data corda  $b_r$  convergono tutte nel punto d'incontro  $N$  delle due tangenti al contorno nei punti di estremità della corda medesima; per la tensione  $\bar{\tau}_{xx}$  in un punto  $M$  qualunque della corda suddetta è allora valida l'espressione:

$$\bar{\tau}_{xx} = -\bar{\tau}_{xy} \operatorname{tg} \alpha ,$$

essendo  $\alpha$  l'angolo che il raggio  $NM$  forma con l'asse  $y$ .

\* \* \*

Supposta determinata in ciascun punto della sezione la direzione del-

la tensione tangenziale totale, il complesso di tali direzioni inviluppa una congruenza di linee, *traiettorie delle tensioni*. La tangente alla traiettoria in un punto qualunque della corda  $b_r$  concorre nel punto d'intersezione delle tangenti al contorno agli estremi della corda (fig. 67).

Dalla supposta indipendenza della  $\tau_{xy}$  da  $x$  deriva poi che una stessa traiettoria suddivide tutte le corde della sezione parallele ad  $x$  in un rapporto costante, ciò che ne rende facilissima la costruzione.

La trattazione del taglio ora indicata permette in conclusione di sostituire alle due ultime delle (283) le espressioni approssimate:

$$(305) \quad \bar{\tau}_{xx} = \frac{T_y S_r}{J_x b_r}, \quad \tau_{xy} = -\bar{\tau}_{xy} \operatorname{tg} \alpha;$$

e non sarebbe difficile provare che la distribuzione di sforzi corrispondenti soddisfa l'equilibrio alla traslazione secondo gli assi  $x$  ed  $y$ , e pertanto rispetta le (265).

Per il principio di sovrapposizione degli effetti la tensione risultante  $\bar{\tau}_x = \sqrt{\bar{\tau}_{xx}^2 + \bar{\tau}_{xy}^2}$  dovrebbe potersi ottenere anche componendo le tensioni dovute separatamente alle componenti  $T_\xi$  e  $T_\eta$  del taglio  $T$  secondo due direzioni arbitrarie distinte  $\xi, \eta$ , ma per l'approssimazione del metodo, diversa, come si è detto, a seconda della direzione considerata per le corde della sezione, il risultato della sovrapposizione è sempre sensibilmente diverso da quello cui conduce l'applicazione diretta delle (305) per corde parallele all'asse  $x$ , coniugato alla direzione del taglio totale nell'ellisse centrale d'inerzia della sezione.

Il criterio che è opportuno seguire, come quello atto a condurre a valori della tensione tangenziale in generale più prossimi al vero, consiste nell'applicare la sovrapposizione degli effetti, *considerando però le componenti di taglio dirette secondo due assi di sollecitazione  $\xi, \eta$  — non necessariamente coincidenti con gli assi o con due diametri coniugati nell'ellisse centrale — tali che, per le singolarità del contorno, si debba ritenere per essi più che non per altri applicabile la teoria approssimata.*

È infine degno di nota che in base alle espressioni approssimate, la distribuzione delle tensioni tangenziali riesce ora indipendente dal coefficiente  $m$ , contrariamente a quanto si riscontra nella trattazione rigorosa.

### 83 — Il fattore di taglio. Ellisse degli spostamenti.

Possiamo ora procedere ad una valutazione approssimata del lavoro di deformazione dovuto alla forza tagliante.

Introducendo le (305) nella (299) e ponendo:

$$\Theta b_r = \int_{b_r} \operatorname{tg}^2 \alpha \, dx,$$

dove  $\Theta$  esprime la media dei valori che  $\operatorname{tg}^2 \alpha$  assume sulla corda  $b_r$ , avremo:

$$\Phi_T = \frac{l}{2G} \int_{y'}^{y''} \bar{\tau}_{yz}^2 (1 + \Theta) b_r \, dy = \frac{T_y^2 l}{2GJ_x^2} \int_{y'}^{y''} \frac{S_r^2}{b_r} (1 + \Theta) \, dy,$$

essendo  $y'$  e  $y''$  le ordinate dei punti più distanti dall'asse neutro. Osservando ancora che è (fig. 68):

$$\int_{b_r} \operatorname{tg}^2 \alpha \, dx = k \int_{\alpha'}^{\alpha''} \operatorname{tg}^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \, d\alpha = \frac{k}{3} (\operatorname{tg}^3 \alpha'' - \operatorname{tg}^3 \alpha'),$$

$$b_r = k (\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'),$$

può scriversi:

$$\Theta = \frac{1}{3} (\operatorname{tg}^2 \alpha' + \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha'' + \operatorname{tg}^2 \alpha'').$$

Essendo inoltre:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \left( \frac{dx}{dy} \right)_{x=x'}, \quad \operatorname{tg} \alpha'' = \left( \frac{dx}{dy} \right)_{x=x''},$$

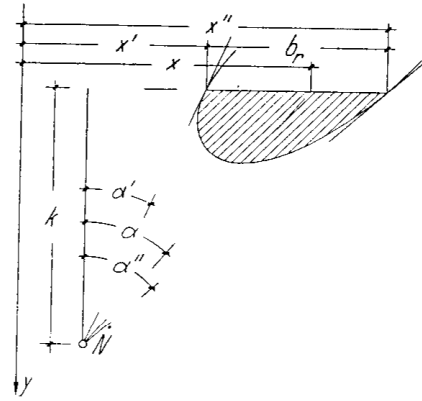


Fig. 68

$x'' - x' = b_r$ , e posto  $x'' + x' = 2\xi$  ( $\xi$  ascissa del punto medio della corda), sta il sistema:

$$\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha' = \frac{d}{dy} (x'' - x') = \frac{db_r}{dy},$$

$$\operatorname{tg} \alpha'' + \operatorname{tg} \alpha' = \frac{d}{dy} (x'' + x') = 2 \frac{d\xi}{dy},$$

la cui soluzione:

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{d\xi}{dy} + \frac{1}{2} \frac{db_r}{dy}, \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{d\xi}{dy} - \frac{1}{2} \frac{db_r}{dy},$$

permette di porre  $\Theta$  nella forma:

$$\Theta = \left( \frac{d\xi}{dy} \right)^2 + \frac{1}{12} \left( \frac{db_r}{dy} \right)^2.$$

Sostituendo questa nella espressione di  $\Phi_T$  e ricordando che è  $J_x = A \rho_x^2$ ,



con  $\rho_x$  raggio d'inerzia dell'area  $A$  rispetto all'asse  $x$ , avremo :

$$(306) \quad \Phi_T = \frac{T_y^2 l}{2GA} \frac{1}{A \rho_x^4} \int_{y'}^{y''} \frac{S_r^2}{b_r} \left[ 1 + \left( \frac{d\xi}{dy} \right)^2 + \frac{1}{12} \left( \frac{db_r}{dy} \right)^2 \right] dy .$$

In base alla (300) risulta così per il fattore di taglio l'espressione approssimata :

$$(307) \quad \chi = \frac{1}{A \rho_x^4} \int_{y'}^{y''} \frac{S_r^2}{b_r} \left[ 1 + \left( \frac{d\xi}{dy} \right)^2 + \frac{1}{12} \left( \frac{db_r}{dy} \right)^2 \right] dy ,$$

che permette di calcolarlo una volta assegnata la forma della sezione e determinata con essa la funzione della  $y$  da integrare.

Talora è lecito trascurare i termini che seguono l'unità nella parentesi sotto il segno d'integrazione, nel qual caso vale l'espressione :

$$(308) \quad \chi = \frac{1}{A \rho_x^4} \int_{.1} \left( \frac{S_r}{b_r} \right)^2 dA .$$

Per sezioni di forma complessa il fattore di forma si calcola sostituendo all'integrale una sommatoria oppure ricorrendo ai metodi grafici.

È facile verificare che quando sia accettabile la (308), il fattore di taglio resta inalterato per due figure deducibili l'una dall'altra mediante trasformazione affine.

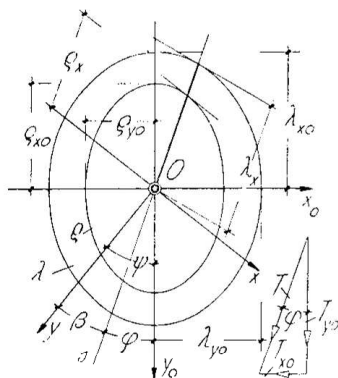


Fig. 69

\* \* \*

È interessante mettere in evidenza la legge di variazione del fattore di taglio al variare dell'asse di sollecitazione  $s$  ovvero dell'asse neutro  $x$  corrispondente.

Detta  $\varphi$  l'anomalia di  $s$  contata dall'asse principale d'inerzia  $y_0$ , le componenti secondo gli assi principali d'inerzia del taglio totale, spirante parallelamente ad  $s$ , sono (fig. 69) :

$$(309) \quad T_{x_0} = T \sin \varphi \quad , \quad T_{y_0} = T \cos \varphi .$$

Poniamo la (300), relativa al lavoro di deformazione al taglio, nella forma :

$$(310) \quad \Phi_T = \chi_x \frac{T^2 l}{2GA} ,$$

introducendovi tutto il taglio  $T$  in luogo della componente  $T_y = T \cos \beta$  e corrispondentemente il nuovo fattore di taglio, relativo all'asse  $s$ :

$$(311) \quad \lambda_x = \lambda \cos^2 \beta,$$

Valutiamo quindi lo stesso lavoro di deformazione  $\Phi_T$  supponendo agire successivamente le due componenti  $T_{x_0}$  e  $T_{y_0}$  della  $T$ . Trascurando il lavoro mutuo, cioè quello che la componente già applicata compie durante l'applicazione dell'altra <sup>(4)</sup>, ed osservando che per gli assi principali d'inerzia è  $\beta = 0$ , sicchè i fattori  $\lambda$  e  $\lambda_x$  coincidono, avremo:

$$(312) \quad \Phi_T = \frac{l}{2GA} (\lambda_{x_0} T_{y_0}^2 + \lambda_{y_0} T_{x_0}^2).$$

Dalle (310) e (312), si trae:

$$(313) \quad \lambda_x = \lambda_{x_0} \cos^2 \varphi + \lambda_{y_0} \sin^2 \varphi,$$

la quale esprime la legge di variazione cercata.

Se ora, a partire dal baricentro  $O$ , si porta sul generico asse  $s$  in una data scala il raggio vettore:

$$(314) \quad |M - O| = \lambda_x = 1 : \sqrt{\lambda_x},$$

si ottiene come luogo del punto  $M$  l'ellisse dei fattori di taglio (fig. 70, a):

$$(315) \quad \frac{1}{\lambda_x^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{\lambda_{x_0}^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\lambda_{y_0}^2},$$

avente i semiassi  $\lambda_{x_0} = 1 : \sqrt{\lambda_{x_0}}$  e  $\lambda_{y_0} = 1 : \sqrt{\lambda_{y_0}}$ . Nota tale ellisse, il fattore di taglio  $\lambda_x = \lambda \cos^2 \beta$  relativo al generico asse  $s$  vale l'inverso del quadrato del semidiametro  $\lambda_x$  disteso su quell'asse.

\* \* \*

Nelle applicazioni si riguarda come *spostamento complessivo* della base libera del cilindro imputabile al taglio, quello spostamento che, attri-

---

(4) - Tale lavoro è rigorosamente nullo se la sezione è simmetrica rispetto ad entrambi gli assi principali, perchè allora tensioni tangenziali e scorrimenti sono funzioni dispari nella coordinata secondo l'asse neutro, funzioni pari secondo l'asse di sollecitazione. Per sezioni asimmetriche si può provare direttamente che detto lavoro mutuo è molto piccolo, sicchè si può ritenere nullo commettendo un errore trascurabile.

buito ad un punto ideale d'applicazione del taglio  $T$ , dà luogo, secondo il teorema di Clapeyron, ad un lavoro di deformazione uguale a quello effettivo.

Se ammettiamo che per un taglio spirante secondo un asse principale centrale d'inerzia lo spostamento avvenga nella direzione dell'asse stesso,

ipotesi certo lecita quando la sezione sia simmetrica rispetto all'asse ed accettabile con grande approssimazione in assenza di tale simmetria, ricordando l'osservazione fatta a proposito del lavoro mutuo, le componenti secondo gli assi  $x_0$  ed  $y_0$

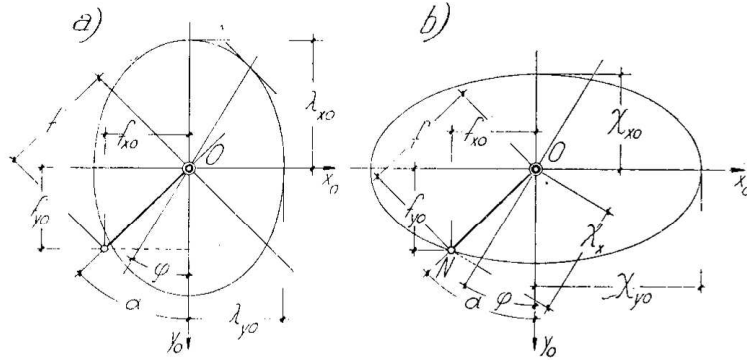


Fig. 70

dello spostamento attribuibile all'azione del taglio  $T$  spirante parallelamente al generico asse  $s$  debbono trarsi dalle relazioni:

$$\frac{1}{2} T_{x_0} f_{x_0} = \frac{T_{x_0}^2 l}{2 GA \lambda_{y_0}^2} \quad , \quad \frac{1}{2} T_{y_0} f_{y_0} = \frac{T_{y_0}^2 l}{2 GA \lambda_{x_0}^2} \quad ,$$

e valgono quindi:

$$(316) \quad f_{x_0} = \frac{T_{x_0} l}{GA \lambda_{y_0}^2} \quad , \quad f_{y_0} = \frac{T_{y_0} l}{GA \lambda_{x_0}^2} \quad .$$

Sicchè per lo spostamento risultante, avuto riguardo alle (309), si ottiene il modulo:

$$(317) \quad f = \frac{Tl}{GA} \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{\lambda_{x_0}^4} + \frac{\sin^2 \varphi}{\lambda_{y_0}^4}} \quad ,$$

mentre la direzione ne è individuata dalla:

$$(318) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{f_{x_0}}{f_{y_0}} = \frac{T_{x_0}}{T_{y_0}} \left( \frac{\lambda_{x_0}}{\lambda_{y_0}} \right)^2 = \left( \frac{\lambda_{x_0}}{\lambda_{y_0}} \right)^2 \operatorname{tg} \varphi \quad ,$$

condizione in tutto analoga alla (176), la quale dimostra che *lo spostamento avviene normalmente alla direzione coniugata all'asse  $s$  nell'ellisse dei fattori di taglio.*

Il punto in cui la baricentrica parallela allo spostamento incontra la ellisse di equazione (fig. 70 b):

$$\left( \frac{\frac{\cos \varphi}{\lambda_{x_0}^2}}{\frac{1}{\lambda_{x_0}^2}} \right)^2 + \left( \frac{\frac{\sin \varphi}{\lambda_{y_0}^2}}{\frac{1}{\lambda_{y_0}^2}} \right)^2 = \left( \frac{\frac{\cos \varphi}{\lambda_{x_0}^2}}{\lambda_{x_0}} \right)^2 + \left( \frac{\frac{\sin \varphi}{\lambda_{y_0}^2}}{\lambda_{y_0}} \right)^2 = 1,$$

avente cioè sugli assi  $x_0$  ed  $y_0$  semiassi proporzionali rispettivamente a  $\lambda_{y_0}$  e  $\lambda_{x_0}$ , ha coordinate proporzionali alle componenti  $f_{x_0}$  ed  $f_{y_0}$  di  $f$ , essendo  $Tl/GA$  il fattore di proporzionalità. Ne consegue che l'ellisse ora definita può riguardarsi come *il diagramma polare degli spostamenti medi dovuti al taglio*.

La proiezione del semidiametro  $ON$ , misura dello spostamento sull'asse di sollecitazione:

$$\lambda_x = \frac{1}{\lambda_x^2} = \cos(\alpha - \varphi) \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{\lambda_{x_0}^4} + \frac{\sin^2 \varphi}{\lambda_{y_0}^4}}$$

fornisce notoriamente, come è facile verificare mediante le (313), (317) e (318), il fattore di taglio  $\lambda_x = 1/\lambda_x^2$  relativo a quest'asse.

#### 84 — Sezione circolare.

Effettuate le sostituzioni (fig. 71):

$$T_y = T, \quad b_r = 2x_r = 2r \sin \beta_r,$$

$$S_r = \int_{A_r} y dA = 2r^3 \int_{\beta_r} \sin^2 \beta \cos \beta d\beta = \frac{2}{3} r^3 \sin^3 \beta_r,$$

$$J_w = \frac{\pi r^4}{4},$$

la prima delle (305) diviene:

$$(319) \quad \bar{\tau}_{yx} = \frac{4}{3} \frac{T \sin^2 \beta_r}{\pi r^2} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^2} (r^2 - y^2).$$

Conseguentemente, per gli estremi della corda, si ha dalla seconda:

$$\bar{\tau}_{zx} = -\bar{\tau}'_{zx} = -\frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^2} \sin \beta_r \cos \beta_r,$$

e per un punto intermedio, data la proporzionalità in  $x$ :

$$(320) \quad \bar{\tau}_{zx} = -\frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^2} \frac{x}{r} \cos \beta_r = -\frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^2} xy.$$

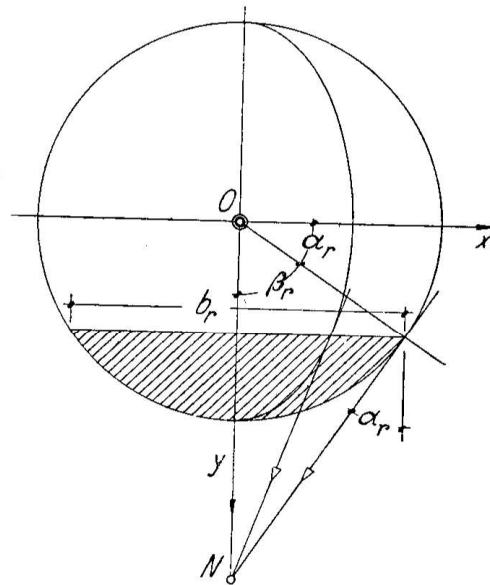


Fig. 71

La tensione totale è pertanto :

$$(321) \quad \bar{\tau}_x = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^2} \sqrt{\text{sen}^2 \beta_r + \left(\frac{x}{r}\right)^2 \text{cos}^2 \beta_r} ;$$

in valore assoluto per una data corda essa cresce cioè dal valore zero sull'asse  $y$ , a quello :

$$(322) \quad |\tau'_z| = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^2} \sqrt{\text{sen}^2 \beta_r + \text{sen}^2 \beta_r \text{cos}^2 \beta_r} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^2} \text{sen} \beta \sqrt{1 + \text{cos}^2 \beta_r}$$

agli estremi della corda.

Le traiettorie delle  $\bar{\tau}_x$  sono ellissi aventi l'asse maggiore uguale al diametro della sezione disteso sull'asse  $y$ .

La tensione raggiunge il massimo valore assoluto agli estremi della corda sull'asse neutro, dove è nullo il contributo della  $\bar{\tau}_{xx}$  :

$$(323) \quad \max \bar{\tau}_x = \max \bar{\tau}_{xy} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^2} ,$$

massimo pari a  $4/3$  della tensione media. Poichè il valore massimo dedotto dalla trattazione rigorosa per  $m = 4$  vale  $7/5$  della tensione media, l'errore cui conduce la trattazione approssimata è circa del  $4,78\%$  in difetto.

Il fattore di taglio dedotto della (307) applicata per  $\frac{d\xi}{dy} = 0$ ,  $\frac{db_r}{dy} = 2 \text{ctg} \beta$ ,  $dy = -r \text{sen} \beta d\beta$ , vale :

$$(324) \quad \lambda = \frac{32}{27} = 1,1852$$

ed è appena del  $0,7\%$  in eccesso rispetto a quello  $\lambda = 1,1733$  cui, in base alla (300), perviene la trattazione rigorosa ancora per  $m = 4$ . Trascurando i termini che seguono l'unità entro parentesi nell'integrale della (307), applicando cioè la (308), ciò che equivale notoriamente a trascurare la  $\tau_{xx}$ , si ottiene invece :

$$(324') \quad \lambda = \frac{10}{9} ,$$

con un errore in difetto del  $6,25\%$  circa rispetto a quello esatto per  $m = 4$ .

### 85 — Sezione ellittica.

Detti  $a$  e  $b$  i semiassi supposti coincidenti rispettivamente con l'asse di sollecitazione  $y = y_0$  e con l'asse neutro  $x = x_0$ , si può trattare la se-

zione ellittica considerandola come trasformata affine del cerchio di raggio  $a$ , essendo  $y$  l'asse,  $K = a/b = a/r$  il rapporto affinità (fig. 72).

È facile verificare le relazioni:

$$\left( \frac{S_r}{J_x b_r} \right)_e = \frac{1}{K} \left( \frac{S_r}{J_x b_r} \right)_c$$

$$(\operatorname{tg} \alpha')_e = K (\operatorname{tg} \alpha')_c \quad , \quad (\operatorname{tg} \alpha'')_e = K (\operatorname{tg} \alpha'')_c ;$$

in base a queste, ricordando le (319) e (320) ove sia posto  $r = b$ , avremo per la sezione ellittica:

$$(325) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\tau}_{yx} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi b^4} (b^2 - y^2) \frac{b}{a} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi a b^3} (b^2 - y^2) , \\ \bar{\tau}_{xy} = -\frac{4}{3} \frac{T}{\pi a b^3} xy . \end{array} \right.$$

Le traiettorie delle  $\bar{\tau}_x$  risultanti sono ancora ellissi aventi l'asse maggiore  $2b = 2r$  disteso sull'asse  $y$ .

Se il fattore di taglio dato dalla (307) si riguarda come somma del contributo relativo al primo termine — la unità — dell'espressione entro parentesi sotto il segno d'integrazione ( $\bar{\tau}_{xy} = 0$ ), e di quello relativo ai rimanenti termini ( $\bar{\tau}_{yx} = 0$ ), la (324) riferentesi alla sezione circolare può scriversi:

$$(326) \quad \chi_c = \frac{10}{9} + \frac{2}{27} .$$

Ponendo in questa stessa forma il fattore di taglio della sezione ellittica, si constata facilmente che il primo termine è quello stesso della sezione circolare (di conseguenza il fattore di taglio di prima approssimazione, per  $\bar{\tau}_{xy} = 0$ , è lo stesso per le due sezioni) <sup>(1)</sup>, mentre il secondo

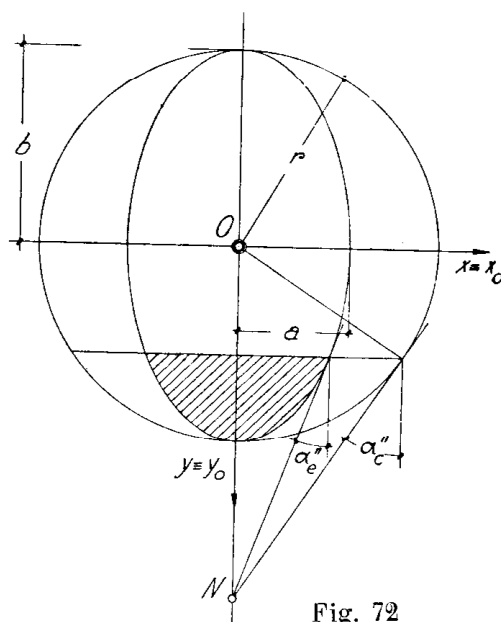


Fig. 72

<sup>(1)</sup> - Questa proprietà vale generalmente per due sezioni qualsiasi deducibili per trasformazione affine l'una dall'altra, beninteso per forze taglienti che spirino secondo l'asse di affinità.

termine si ottiene dal corrispondente della sezione circolare moltiplicandolo per  $K^2$ . Avremo quindi:

$$(327) \quad \chi_e = \frac{10}{9} + \frac{2}{9} K^2. \quad 17$$

Se nella trattazione precedente si scambiano i semiassi  $a, b$ , e si pone  $1/K$  in luogo di  $K$ , si ottengono ovviamente le formule per la sezione cimentata secondo l'asse  $x$ .

\* \* \*

L'ellisse della figura 73, b) può essere ottenuta facendo ruotare di un opportuno angolo  $\psi$  intorno al baricentro  $O$  l'asse  $2b$  dell'altra ellisse

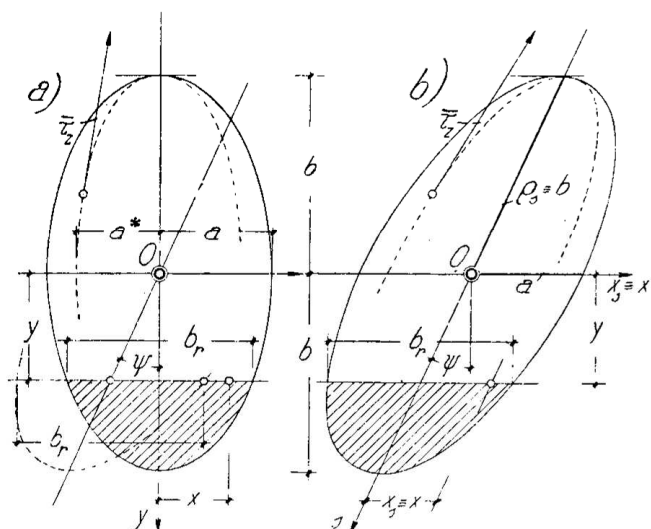


Fig. 73

rappresenta in figura 73, a), nell'ipotesi che in tale rotazione l'asse suddetto conservi lunghezza immutata e trascini le corde ortogonali ad esso lasciandone inalterate l'ordinata  $y$ , la direzione e la lunghezza  $b_r$ .

Tale deduzione persuade che le (325) sono ancora valide per la sezione ellittica *sollecitata secondo un asse generico s* coniugato ad  $x$  (fig. 73, b), purchè alle coordinate ortogonali  $x, y$ , si sostituiscano quelle oblique

$x_s, y_s$ , quando cioè si valutino le ascisse a partire dall'asse  $s$  e si riguardino le  $\bar{\tau}_{xy}$  come  $\bar{\tau}_{x_s}$ .

Poichè inoltre nella suddetta deduzione le ellissi di semiassi  $a^*$  e  $b$ , traiettorie della  $\bar{\tau}_x$  della prima sezione sollecitata secondo  $y$ , divengono ellissi aventi  $a^*$  e  $\rho_s = b$  come semidiametri coniugati, si riconosce che le analoghe traiettorie della seconda sezione sollecitata secondo l'asse  $s$  sono ellissi affini al contorno, con asse di affinità  $s$  e direzione  $x_s = x$ .

Nella (307) si altera soltanto il termine  $\left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2$ , il quale è nullo per la prima sezione, costante ed uguale a  $\text{tg}^2\psi$  per la seconda. Il fattore di ta-

glio relativo a quest'ultima è dunque:

$$(328) \quad \chi = \frac{10}{9} (1 + \operatorname{tg}^2 \psi) + \frac{2}{27} K^2 = \frac{10}{9} \frac{1}{\cos^2 \psi} + \frac{2}{27} K^2.$$

Resta immutato il valore di prima approssimazione ( $\bar{\tau}_{xx} = 0$ )  $\chi = \frac{10}{9}$ .

### 86 — Sezione rettangolare.

Supposto l'asse di sollecitazione coincidente con una delle mediane, dovremo porre (fig. 74):

$$b_r = b \text{ costante}, \quad J_w = \frac{1}{12} b h^3,$$

$$S_r = \frac{b}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) \left( \frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right), \quad T = T_y,$$

e di conseguenza:

$$(329) \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{T_y S_r}{J_x b_r} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{b h} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right).$$

Essendo poi  $\alpha' = \alpha'' = 0$  per gli estremi delle corde  $b_r$ , è  $\alpha = 0$  per qualunque punto intermedio; pertanto è ovunque nulla la  $\bar{\tau}_{xx}$  e le traiettorie della  $\bar{\tau}_x$  sono rette parallele all'asse  $y$ .

La tensione  $\bar{\tau}_x \equiv \bar{\tau}_{xy}$ , variando con la legge parabolica espressa dalla (329) raggiunge al livello dell'asse neutro ( $y = 0$ ) il valore massimo:

$$(330) \quad \max \bar{\tau}_x = \frac{3}{2} \frac{T_y}{b h}$$

uguale ai  $3/2$  della tensione media.

Il fattore di taglio si ottiene direttamente dalla (308), giacchè sono nulli entrambi i termini che seguono l'unità entro la parentesi quadra della (307). Osservando che è:

$$\int_A \left( \frac{S_r}{b_r} \right)^2 dA = \frac{b}{2} \int_0^{\frac{h}{2}} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dy = \frac{b h^5}{120}, \quad A \varphi_x^t = b h \left( \frac{1}{12} h^3 \right)^2 = \frac{b h^5}{144},$$

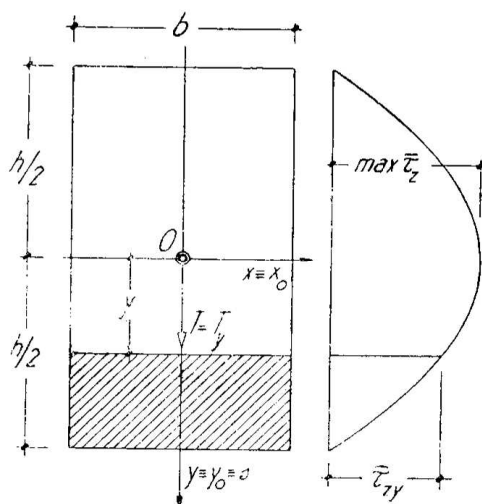


Fig. 74



si deduce :

$$(331) \quad \chi = \frac{6}{5} .$$

Siccome scambiando gli assi  $y$  ed  $x$  (sezione sollecitata secondo l'altra mediana) il valore di  $\chi$  resta immutato, l'ellisse dei fattori di taglio si riduce al cerchio di raggio  $\lambda = \sqrt{5/6}$ , e così un cerchio di raggio  $\lambda = 6/5$  è il diagramma polare degli spostamenti. In altri termini il fattore di taglio è lo stesso per qualunque asse di sollecitazione e lo spostamento avviene nella direzione dell'asse stesso.

\* \* \*

Una sollecitazione  $T_x$  che agisca simultaneamente alla  $T_y$  importa :

$$\bar{\tau}_{xx} = \frac{3}{2} \frac{T_x}{bh} \left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right) \quad , \quad \bar{\tau}_{xy} = 0 \quad , \quad \max \tau_x = \frac{3}{2} \frac{T_x}{bh} .$$

Segue da ciò che per l'asse generico  $s$ , secondo il quale per un opportuno rapporto  $T_y : T_x$  può ritenersi cimentata la sezione dal taglio risultante  $T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2}$ , la tensione è massima nel baricentro e vale :

$$(332) \quad \max \bar{\tau}_x = \frac{3}{2} \frac{T}{bh} .$$

La distribuzione delle tensioni, quale risulta dalla sovrapposizione degli effetti separati delle componenti  $T_x$  e  $T_y$  della  $T$ , è caratterizzata da traiettorie soddisfacenti all'equazione differenziale :

$$(333) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\bar{\tau}_{xy}}{\bar{\tau}_{xx}} = \frac{T_y}{T_x} \frac{1 - 4 \frac{y^2}{h^2}}{1 - 4 \frac{x^2}{b^2}} ,$$

la cui integrazione porta alla configurazione del flusso di tensione rappresentata in figura 75 a) (1).

(1) - L'equazione in termini finiti della linea di flusso passante per il punto di coordinate  $x_m, y_m$ , è riducibile alla forma:

$$\frac{1 - \eta_m}{1 + \eta_m} \frac{1 + \eta}{1 - \eta} = \left( \frac{1 - \xi_m}{1 + \xi_m} \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right)^k ,$$

avendo posto  $k = (b : h) (T_y : T_x)$  ed introdotte le coordinate  $\xi = 2x : b, \eta = 2y : h$ .

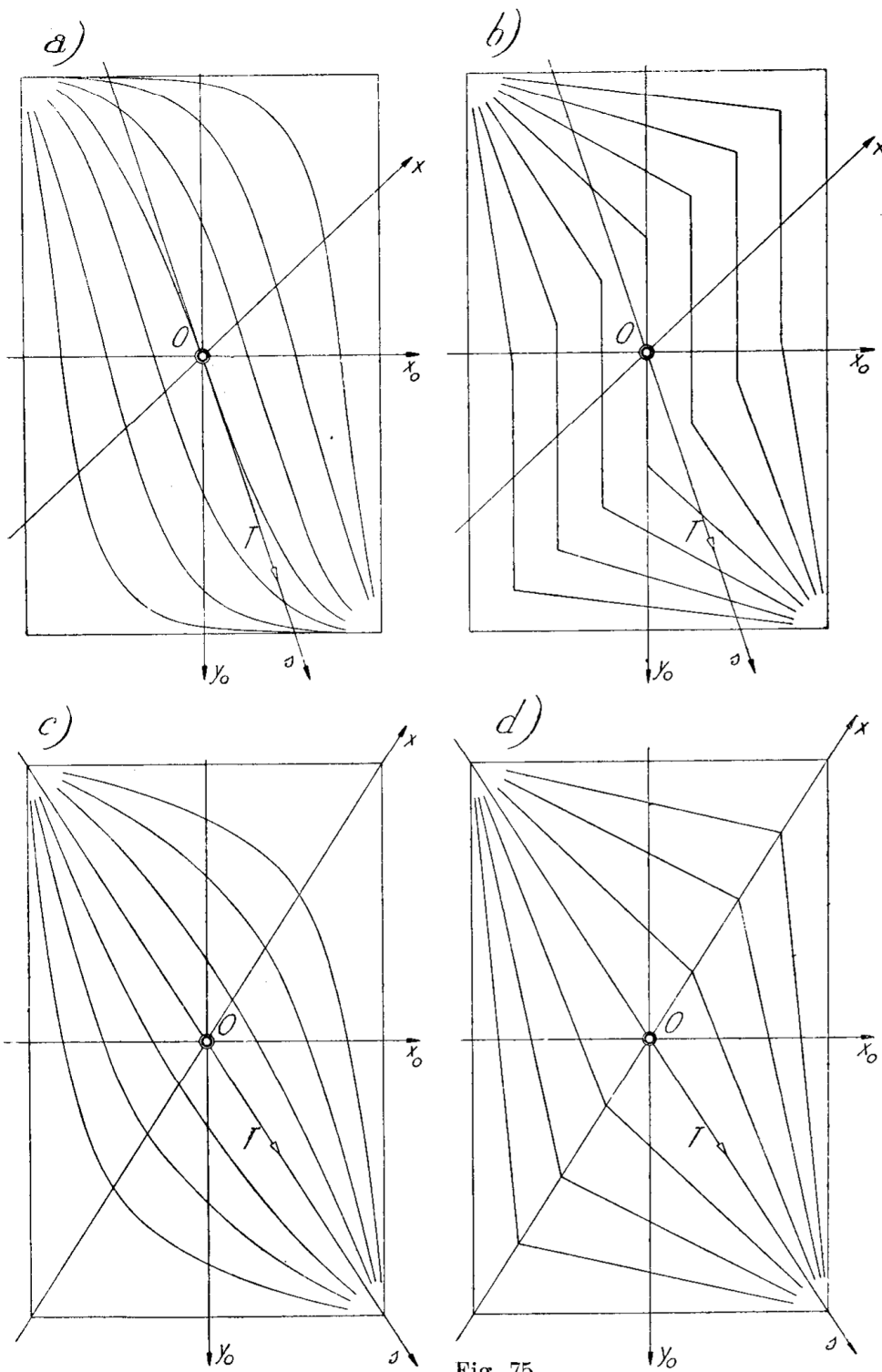


Fig. 75

É notevole che la trattazione approssimata *applicata direttamente alla sollecitazione secondo l'asse  $s$*  porti invece a traiettorie spezzate, con punti angolosi, che sono inammissibili all'interno della sezione (fig. 75 b). Il con-

fronto è istruttivo, in quanto conferma che la trattazione approssimata applicata sovrapponendo gli effetti delle componenti del taglio spiranti parallelamente ai lati della sezione porta a risultati più attendibili di quelli che si ottengono applicandola direttamente al taglio totale.

Le figure 75 c) e d) sono le corrispondenti delle 75 a e b, per il caso particolare in cui l'asse di sollecitazione coincida con una delle mediane del rettangolo.

87 — Sezione a doppio T.

Con le notazioni di figura 76, supposta la sezione sollecitata secondo l'asse  $y$  ed indicando con  $S_t = 1/2 bt(h-t)$  il momento statico di una delle tavole rispetto all'asse  $x$ , si ottiene:

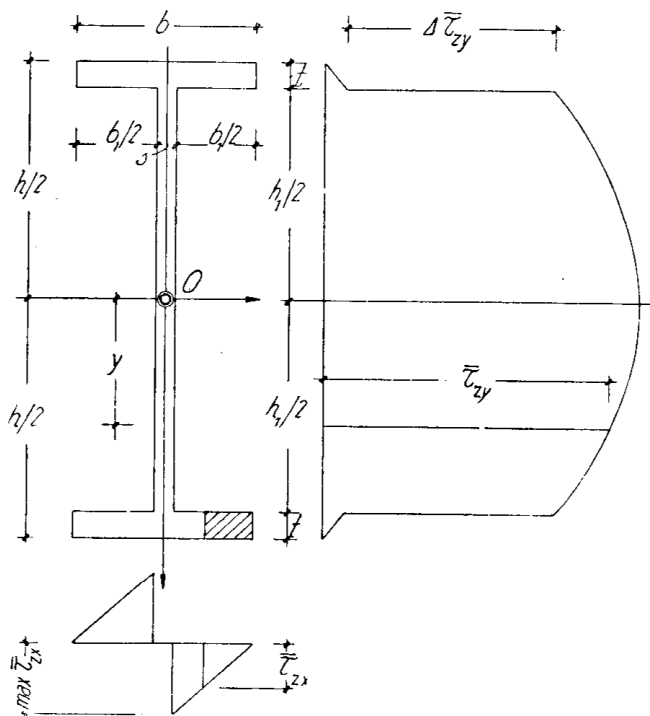


Fig. 76

per

$$|y| \leq \frac{h_t}{2},$$

con

$$b_r = s, \quad S_r = S_t + \frac{sh_t^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h_t^2}\right);$$

$$(334) \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{T_y}{J_x s} \left[ S_t + \frac{h_t^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h_t^2}\right) \right];$$

per

$$\frac{h_t}{2} \leq |y| \leq \frac{h}{2},$$

con

$$b_r = b, \quad S_r = \frac{bh_t^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right);$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{T_y}{J_x b} \frac{h^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right),$$

essendo  $J_x = \frac{1}{12} (bh^3 - b_t h_t^3).$

Il diagramma della  $\bar{\tau}_{xy}$  consta dunque di tre archi di parabola e, per  $|y| = \frac{h}{2} - t = \frac{h_t}{2}$ , presenta il salto brusco:

$$\Delta \bar{\tau}_{xy} = \frac{T_y S_t}{J_x} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{b} \right),$$

corrispondente alla brusca variazione di  $b_r$  nella (302). Tale discontinuità,

che non può ammettersi nella distribuzione effettiva, deriva dall'aver supposto costante la componente di tensione lungo la corda. In realtà la  $\bar{\tau}_{xy}$ , notoriamente nulla lungo entrambi i bordi normali all'asse  $y$  di ciascuna tavola, data la piccolezza dello spessore  $t$ , è praticamente trascurabile nell'interno della tavola stessa, salvo in una breve zona all'innesto della costola, dove dal valore  $\bar{\tau}_{xy} = T_y S_t : J_x s$ , passa con continuità al valore zero corrispondente al bordo  $|y| = h/2$ .

Come per la sezione rettangolare, essendo ovunque  $\text{tg}\alpha = 0$ , risulta  $\bar{\tau}_{xz} = 0$ . Ma per le sezioni a doppio  $T$  ed analoghe questo risultato, accettabile con buona approssimazione per la zona corrispondente alla costola, porterebbe a sensibili errori ove fosse esteso alle zone sporgenti dalle tavole.

Data invece per queste la piccolezza dello spessore  $t$  e avuto riguardo alla direzione dei bordi, potranno ritenersi soddisfatte le note condizioni di applicabilità della (302') per corde parallele all'asse  $y$ , ove si ponga cioè  $r = y, s = x$ . Si ottiene così l'espressione:

$$(335) \quad \bar{\tau}_x = \bar{\tau}_{xz} = \frac{T_y S_r}{J_x t},$$

cui corrisponde un valore nullo per le corde  $|x| = b/2$  e tensione crescente linearmente lungo le tavole, fino al valore:

$$(335') \quad \max \bar{\tau}_{xz} = \frac{1}{4} \frac{T_y}{J_x} (b - s)(h - t)$$

ch'essa raggiunge per  $|x| = s/2$ .

La massima tensione tangenziale agisce di regola a livello dell'asse neutro, dove dalla (334) si trae:

$$(336) \quad \max \bar{\tau}_x = \frac{T_y}{J_x s} \left( S_t + \frac{h_t^2}{8} \right).$$

Se però  $s$  è molto piccolo, come si riscontra di regola nelle travi metalliche, prevalendo il termine  $S_t$  nella quantità entro parentesi quadra della (334), la parte di diagramma corrispondente alla costola ha forma prossima a quella rettangolare, onde approssimativamente può ritenersi costante la relativa tensione  $\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_x$ . Trascurando allora, per la loro piccolezza, le rimanenti porzioni di diagramma relative alle tavole, l'equilibrio alla traslazione secondo l'asse  $y$  porta, per tale valore costante ap-

prossimato, all'espressione :

$$(336') \quad \tau_z^* = \frac{T_y}{s h_t} .$$

Di questa si fa uso di regola, in luogo della (336), per la determinazione della tensione tangenziale massima nel calcolo delle sezioni a doppio T delle travi metalliche composte, per le quali può infatti ammettersi, senza grave errore, che un'azione tagliante  $T_y$  sia sopportata uniformemente dalla costola.

\* \* \*

Posto  $\varphi = 2l/h$  e  $\vartheta = s/b$ , il fattore di taglio relativo all'asse di sollecitazione  $y = y_0$  ha l'espressione :

$$(337) \quad \chi_{x_0} = \frac{b h^5}{240 A \varrho_{x_0}^t} \left\{ 5 \varphi^3 + \frac{1-\varphi}{\vartheta} [15 \varphi^2 (1-\varphi) + 2 \vartheta^2 (1-4\varphi) + 5 \varphi \vartheta (2-5\varphi)] \right\} ,$$

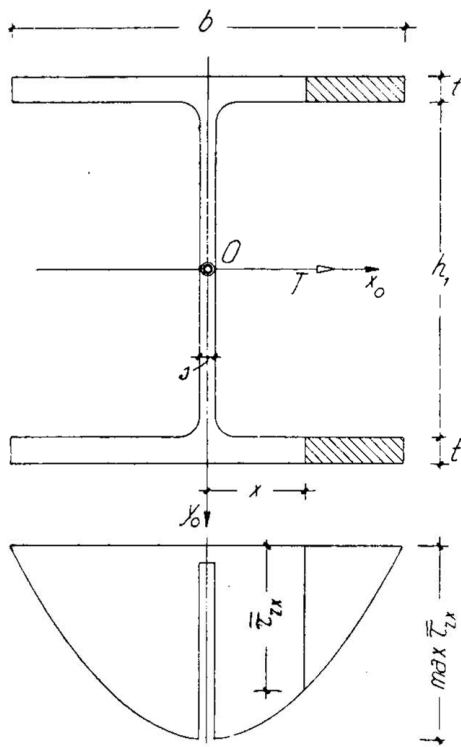


Fig. 77

che si ottiene applicando le (308) e trascurando i termini di grado superiore al terzo, — come può certo ammettersi per le sezioni dei profilati metallici normali — nel polinomio di sesto grado nelle variabili  $\varphi$ ,  $\vartheta$ , che ne risulta.

Con analoga approssimazione, per la sezione sollecitata secondo l'asse  $x \equiv x_0$ , è invece :

$$(338) \quad \chi_{y_0} = \frac{b^3 h}{960 A \varrho_{y_0}^t} \varphi (8 - 15 \vartheta) .$$

Nel prospetto seguente sono riportati i valori dei fattori di forma che si ottengono dalle (337) e (338) per alcuni profilati normali.

I n°	h mm	b mm	s mm	t mm	$\varphi$	$\vartheta$	$\chi_{x_0}$	$\chi_{y_0}$
200	200	90	7,5	11,3	0,113	0,0834	2,29	2,29
300	300	120	10,8	16,2	0,108	0,0864	2,17	2,34
400	400	155	14,4	21,6	0,108	0,0929	2,10	2,32

Mediante anche per le sezioni degli altri comuni ferri profilati il valore di  $\chi$  è compreso fra 2 e 2,4.

Per un taglio agente secondo l'asse principale centrale d'inerzia  $x = x_0$ , il diagramma della  $\tau_{xx}$  ha l'andamento rappresentato in figura 77, con la tensione massima:

$$\max \bar{\tau}_{xx} = \frac{T_x S_o}{2 J_y t},$$

essendo:

$$S_o = \frac{tb^2}{4} \left( 1 - \frac{s^2}{b^2} \right).$$

Come per la sezione rettangolare, lo studio della sezione a doppio T soggetta a taglio secondo una direzione generica  $s$ , anzichè per il taglio totale, conviene effettuarlo applicando la sovrapposizione degli effetti alle componenti  $T_{y_0}$  e  $T_{x_0}$  di esso, dato che le corde della sezione parallele sia all'uno come all'altro asse soddisfano bene alle condizioni di applicabilità del metodo approssimato.

88 — Tensioni principali. Linee isostatiche.

Accettata la teoria approssimata del taglio e supposto insieme che sia ovunque nulla la tensione  $\bar{\tau}_{xx}$ , lo stato di tensione in un punto qualunque del so-

lido risulta indipendente da  $x$  e può pertanto essere rappresentato mediante il cerchio delle tensioni relativo agli elementi di un fascio avente per sostegno la corda  $b_r$  parallela all'asse  $x$  e passante per quel punto (fig. 78 a).

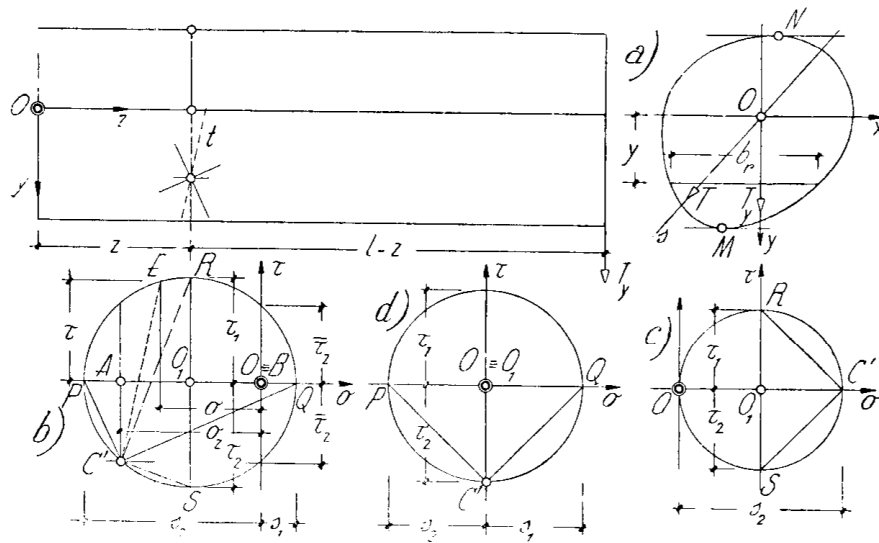


Fig. 78

Ricordando la rappresentazione di Mohr, assumiamo l'asse delle  $\sigma$  diretto ed orientato come l'asse  $z$ , l'asse delle  $\tau$  diretto come l'asse  $y$ , ma orientato in senso opposto (fig. 78 b). Il punto A, ascissa della tensio-

ne normale spirante nella direzione scelta per l'asse delle  $\sigma$ , è situato dalla parte delle  $\sigma$  negative, perchè, avendo supposto  $y$  positivo è:

$$\sigma_x = -\frac{T_y(l-z)}{J_x} < 0.$$

Il punto  $B$ , che in figura 12 segnava l'ascissa della tensione normale  $\sigma_x$  spirante nella direzione scelta per l'asse delle  $\tau$ , essendo nel caso presente  $\sigma_z = \sigma_y = 0$ , coincide con l'origine  $O$ . Il cerchio delle tensioni ha pertanto per centro il punto  $O_1$  di ascissa  $\sigma_x/2$ , e raggio tale da staccare sull'asse delle  $\tau$  e sulla parallela a quest'asse per il punto  $A$  segmenti uguali in valore assoluto alla tensione tangenziale:

$$\bar{\tau}_x = \bar{\tau}_{xy} = \frac{T_y S_r}{J_x b_r}.$$

Il punto  $C'$ , estremo dell'ordinata  $-\bar{\tau}_{12} = -\bar{\tau}_x$  per il punto  $A$ , costituisce ancora il polo di rappresentazione: la parallela condotta per esso alla traccia  $t$  di un dato elemento piano del fascio di sostegno  $b_r$  interseca cioè il cerchio in un punto  $E$ , le cui coordinate misurano le tensioni normali  $\sigma$  e tangenziale  $\tau$  agenti su quell'elemento. Le tensioni principali agiscono sugli elementi del fascio, fra loro ortogonali, le cui tracce sono parallele alle congiungenti  $C'P$  e  $C'Q$ , e valgono:

$$(339) \quad \begin{cases} s_1 \\ s_2 \end{cases} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\bar{\tau}_x^2}.$$

Le massime tensioni tangenziali agiscono invece sugli elementi, pure tra loro ortogonali, di tracce parallele ai raggi  $C'R$  e  $C'S$ , inclinate di  $45^\circ$  alle precedenti, e il loro valore assoluto uguaglia il raggio del cerchio:

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\bar{\tau}_x^2}.$$

Nei punti  $M$  ed  $N$  più distanti dall'asse neutro è  $\bar{\tau}_x = 0$ : il cerchio delle tensioni relativo ad uno di questi punti, per esempio  $M$ , ha quindi raggio  $r = \sigma_x/2$  (fig. 78 c), la tensione principale  $s_2$  coincide con  $\sigma_x$ , l'altra,  $s_1$ , è nulla. Le tensioni tangenziali infine risultano massime sugli elementi inclinati di  $45^\circ$  al piano della sezione retta, valgono:

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{s_2}{2}.$$

In corrispondenza dell'asse neutro è invece  $\sigma_x = 0$ : il cerchio delle

tensioni ha centro nell'origine e raggio uguale alla tensione tangenziale (fig. 78 *d*); le tensioni principali agiscono sugli elementi inclinati di  $45^\circ$  allo strato neutro, ed hanno i valori:

$$s_1 = -s_2 = \bar{\tau}_x :$$

mentre le tensioni tangenziali massime, che si esercitano sul piano della sezione e sul piano neutro  $xz$ , valgono:

$$\tau_1 = \tau_2 = \bar{\tau}_x .$$

Noti i diagrammi della tensione normale  $\sigma_x$  e della tensione tangenziale  $\bar{\tau}_x = \bar{\tau}_{xy}$ , si può dedurre facilmente il diagramma delle tensioni principali per una data sezione  $S-S$  del cilindro.

Scelta una fondamentale di riferimento  $MN$  parallela alla traccia della sezione, si costruiscano in scala opportuna il diagramma della tensione tangenziale e quello  $M'N'$  della tensione normale; si tracci inoltre il diagramma  $M''N''$  delle tensioni  $\sigma_x/2$ . In corrispondenza della corda generica  $b_r$ , di traccia  $T$ , ribaltiamo il segmento  $\overline{TG} = \bar{\tau}_x$  in  $\overline{TL}$  e congiungiamo il punto  $L$  col punto  $F$  che segna l'ascissa  $\sigma_x/2$ . È intanto:

$$\overline{FL} = \sqrt{FT^2 + TL^2} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \bar{\tau}_x^2} ;$$

se poi ribaltiamo  $\overline{FL}$  in  $\overline{FH}$  ed  $\overline{FK}$ , avremo pure:

$$\overline{TH} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \bar{\tau}_x^2} = s_1 ,$$

$$\overline{TK} = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \bar{\tau}_x^2} = s_2 .$$

I luoghi dei punti  $H$  e  $K$ , riferiti alla fondamentale  $MN$ , rappresentano dunque le leggi di variazione delle tensioni principali  $s_1$  (massime trazioni) ed  $s_2$  (massime compressioni). Gli stessi luoghi, riferiti alla retta  $M''N''$ , rappresentano le leggi di variazione delle massime tensioni tangenziali  $\tau_1 = \tau_2$ .

La costruzione determina anche le direzioni principali. Basta infatti osservare che il cerchio di centro  $F$  e raggio  $\overline{FL}$  non è che il cerchio delle tensioni relativo agli elementi piani del fascio di sestegno  $b_r$ , e che il punto  $L$  è il simmetrico rispetto al centro del cerchio del polo  $C'$  della



rappresentazione (fig. 79, a). Le direzioni principali sono perciò quelle delle congiungenti  $LK$  ed  $LH$ , ovviamente parallele rispettivamente alle  $C'H$  e  $C'K$ .

Al variare della posizione della corda  $b_r$  nella sezione, restandone però

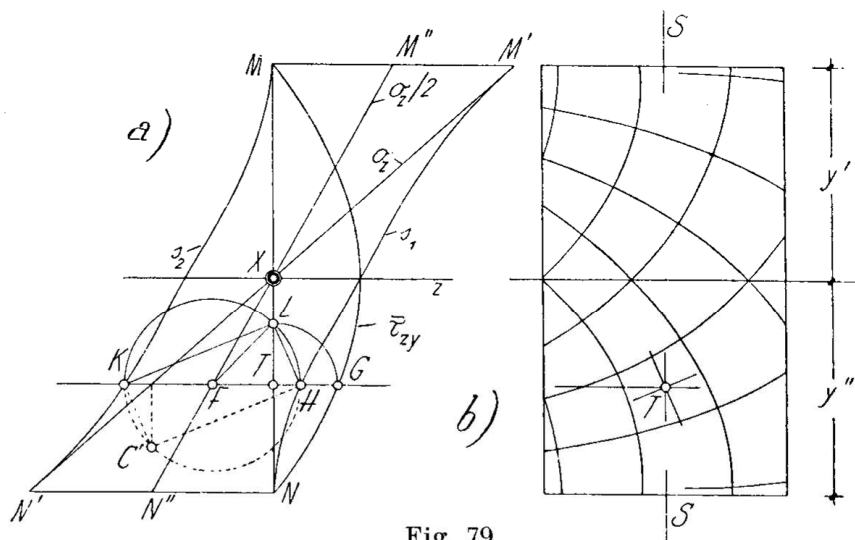


Fig. 79

immutata la direzione parallela all'asse  $x$ , ed al suo spostarsi nello spazio, le direzioni principali inviluppano due congruenze di linee mutuamente ortogonali, che abbiamo già chiamate *linee isostatiche* (figura 79, b). Quelle

di un sistema nascono normalmente alla retta  $y = y'$ , tagliano sotto angoli di  $45^\circ$  lo strato neutro e terminano tangenti alla retta  $y = -y''$ ; il contrario accade per quelle dell'altro sistema.

### 89 — Determinazione del centro di taglio.

Nella flessione semplice il piano della coppia flettente può essere spostato comunque parallelamente a sè stesso senza che ciò produca alterazione alcuna nella distribuzione delle tensioni interne, nè in generale sullo stato di equilibrio elastico del cilindro. Non così se la flessione è accompagnata da taglio; in tal caso uno spostamento della forza  $T$  da un dato piano passante per l'asse di taglio in un piano parallelo, altera la distribuzione delle tensioni tangenziali dovute al taglio, cui si sovrappongono le analoghe tensioni generate dall'azione torcente nata dallo spostamento, dovuta cioè al braccio di leva della  $T$  rispetto al centro di taglio, e che si somma a quella preesistente dovuta al braccio di leva rispetto al baricentro

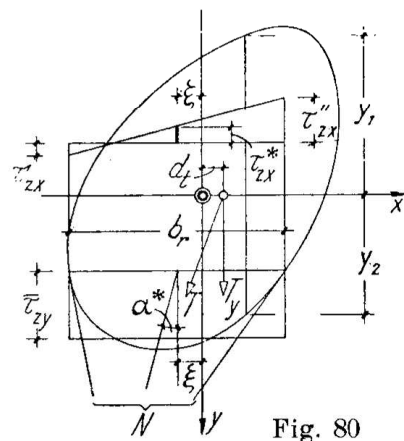


Fig. 80

della sezione, della  $T$  agente secondo la primitiva retta d'azione (4).

La determinazione approssimata del centro di taglio può essere eseguita nel modo seguente.

Osservando che nel punto medio, di ascissa  $\xi$ , d'una data corda  $b_r$  parallela all'asse neutro la  $\bar{\tau}_{zx}^* = \bar{\tau}_{xy} \operatorname{tg} \alpha^*$  esprime la media dei valori  $\bar{\tau}_{zx}$  lungo la corda, mentre la  $\bar{\tau}_{xy}$  è già la corrispondente media delle  $\tau_{xy}$ , il momento torcente simultaneo alla flessione composta può esprimersi:

$$M_o = \int_{y_1}^{y_2} (\bar{\tau}_{xy} b_r \xi - \bar{\tau}_{xy} b_r y \operatorname{tg} \alpha^*) dy = \frac{T_y}{J_x} \int_{y_1}^{y_2} S_r (\xi - y \operatorname{tg} \alpha^*) dy .$$

Calcolato l'integrale, sostituendolo, ove occorra, con una sommatoria o ricorrendo a metodi grafici, si può dedurre l'ascissa del punto in cui il taglio totale  $T$  incontra l'asse  $x$  (fig. 80):

$$(341) \quad d_i = \frac{1}{J_x} \int_{y_1}^{y_2} S_r (\xi - y \operatorname{tg} \alpha^*) dy ,$$

e quindi tracciare la retta d'azione del taglio stesso.

Basterà dunque applicare la (341) per due assi  $x$  distinti, per individuare nella intersezione delle rette d'azione dei tagli corrispondenti il centro di taglio della sezione.

Per le sezioni composte di rettangoli aventi i lati nelle direzioni degli assi risulta ovunque nullo il fattore  $\operatorname{tg} \alpha$  e con esso la tensione spirante parallelamente all'asse neutro, mentre, come si è visto a proposito della sezione a doppio T, tale tensione non è trascurabile nei rettangoli aventi la dimensione maggiore parallela all'asse stesso. La determinazione del centro di taglio dev'essere allora effettuata valutando la corrispondente  $\bar{\tau}_{zx}$  mediante la (302').

Ad esempio nel caso d'una sezione a  $\square$ , con le notazioni della figura 81, la tensione nelle ali, sulla corda generica normale all'asse  $x$ , vale:

$$\bar{\tau}_{zx} = \frac{T_y}{J_x} v \frac{h}{2} ,$$

(4) - Quando i vincoli imposti al cilindro siano tali da ostacolare l'ingobbamento delle sezioni, come accadrebbe se tutti gli elementi della base vincolata — anzichè unicamente quello baricentrico — fossero obbligati nella deformazione a rimanere nel loro piano, lo spostamento altera anche la distribuzione delle tensioni normali, ciò che trova conferma nei risultati delle esperienze di C. v. Bach. V'è però da osservare al riguardo che anche per una forza  $T$  passante per il centro di taglio, l'impedito ingobbamento dà luogo ad una distribuzione di tensioni normali non conforme alla prima delle (283), almeno in vicinanza della base vincolata.

e complessivamente per tutta un'ala, indicandone l'area con  $A_1$ :

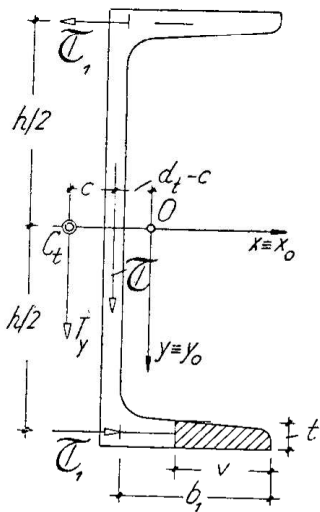


Fig. 81

$$\bar{T}_1 = t \int_b \bar{\tau}_{xx} dv = \frac{T_y}{J_x} h t b^2 = \frac{T_y A_1}{J_x} \frac{b h}{4}.$$

Le forze  $\bar{T}_1$ , agenti in sensi opposti per le due ali, danno luogo al momento:

$$\bar{T}_1 h = \frac{T_y}{J_x} A_1 \frac{b h^2}{4};$$

d'altra parte la risultante  $\bar{T}$  delle tensioni  $\bar{\tau}_{xy}$  nella costola agisce nel piano medio di questa e con grande approssimazione può ritenersi uguale alla stessa  $T_y$ . La risultante totale della distribuzione, che si ottiene componendo il momento  $M_o = \bar{T}_1 h$

con la  $\bar{T} = T_y$ , incontra l'asse  $x$  all'ascissa:

$$d_t = \frac{M_o}{T_y} = \frac{A_1 b h^2}{4 J_x},$$

che determina il centro di taglio.