

CAPITOLO XI

TORSIONE SEMPLICE

64 — Verifica delle equazioni del problema.

Gli spostamenti siano ora rappresentati dalle componenti:

$$(189) \quad u = -cz(y+a) \quad , \quad v = cz(x-b) \quad , \quad w = c[ax+by-\psi(x,y)] \quad ,$$

essendo c una costante piccolissima, $\psi(x,y)$ una funzione monodroma, finita, continua e determinata in tutti i punti della sezione retta del cilindro, a e b due opportune costanti dipendenti dalle condizioni di vincolo.

Le derivate prime delle (189), ordinatamente rispetto ad x , y , z , verificano le relazioni:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad ,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -cz = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad .$$

Sono inoltre nulle le derivate seconde di u e v rispetto a z e quelle miste di w rapporto a x, z e ad y, z . Le componenti di spostamento soddisfano dunque alle prime cinque delle (136). Affinchè sia verificata anche la sesta, dev'essere soddisfatta l'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad ,$$

o anche:

$$(190) \quad \Delta^2 \psi = 0 \quad ,$$

cioè la funzione $\psi(x, y)$ dev'essere *armonica* (4).

Le espressioni di u e v soddisfano ancora alle prime due delle (143):

$$u_o = 0 \quad , \quad v_o = 0 \quad ,$$

nonchè alla terza delle (144):

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_o = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o = 0 \quad ;$$

affinchè la w verifichi le rimanenti tre condizioni di vincolo, ossia le:

$$w_o = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_o = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_o = 0 \quad ,$$

dev'essere:

$$\psi_o = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_o = b \quad , \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_o = a \quad .$$

Sulla superficie laterale del cilindro, con riferimento alla (141), si ha:

$$m^* \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + y\right) + n^* \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x\right) = 0 \quad ,$$

oppure:

$$(192) \quad m^* \frac{\partial \psi}{\partial x} + n^* \frac{\partial \psi}{\partial y} = -m^* y + n^* x \quad .$$

Detto poi $d\nu$ l'elemento lineare della normale ν al contorno s della sezione trasversale, elemento di proiezioni dx e dy sugli assi x ed y , è:

$$\frac{dx}{d\nu} = m^* \quad , \quad \frac{dy}{d\nu} = n^* \quad ,$$

(4) - Diconsi appunto armoniche le funzioni che soddisfano all'equazione differenziale di Laplace. I valori che una tale funzione assume in un'area sono determinati quando siano noti i valori che la funzione stessa assume al contorno; la loro ricerca forma oggetto del celebre problema di Dirichlet.

Valgono per queste funzioni i seguenti teoremi:

1^o) la media dei valori che una funzione ψ armonica e regolare in A assume su una circonferenza s qualsiasi interna ad A , è uguale al valore di ψ nel centro di tale circonferenza, nonchè alla media dei valori di ψ nei punti interni alla circonferenza stessa (teorema della media per le funzioni armoniche);

2^o) una funzione ψ armonica e regolare in A non può avere nell'interno di A punti di massimo o di minimo; quindi se ψ è costante o nulla su tutta una linea s , essa è costante o nulla in tutta l'area interna ad s .

sicchè la precedente equazione può scriversi:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{dv} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dv} = -m^*y + n^*x,$$

o anche:

$$(193) \quad \frac{d\psi}{dv} = -\frac{dx}{dv}y + \frac{dy}{dv}x.$$

Assegnata la sezione trasversale, la (193) permette di determinare in ciascun punto del contorno la *derivata direzionale normale* della funzione ψ ⁽¹⁾.

La questione è così ricondotta al problema di Neumann, il quale consiste nel trovare una funzione armonica finita continua e determinata in ciascun punto di un'area piana, noti che siano i valori della sua derivata normale in ciascun punto del contorno.

Ammesse come dimostrate l'esistenza di tale funzione e la sua unicità, il sistema di spostamenti prefissato costituisce una soluzione del problema di Saint-Venant, purchè alla base libera del solido si applichino le forze superficiali che si ottengono dalle (142), cioè le:

$$(194) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_x = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -Gc \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + y \right), \\ F_y = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -Gc \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x \right), \\ F_z = E \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{array} \right.$$

Possiamo dopo ciò ricavare le caratteristiche della sollecitazione relative alla base libera. Osservando che le forze applicate hanno componente nulla secondo la normale, sarà intanto:

$$N = 0 \quad , \quad M_x = 0 \quad , \quad M_y = 0.$$

(1) - Se M è un punto da cui esce una semiretta orientata v e su questa si prende un punto N a distanza δ variabile da M , dicesi *derivata direzionale* di ψ nella direzione v , e si indica con $\frac{d\psi}{dv}$, lo scalare $\frac{d\psi}{dv} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\psi(N) - \psi(M)}{\delta}$.

Le forze taglianti valgono poi :

$$T_x = \int_A F_x dA = - Gc \left(\int_A \frac{\partial \psi}{\partial x} dA + \int_A y dA \right),$$

$$T_y = \int_A F_y dA = - Gc \left(\int_A \frac{\partial \psi}{\partial y} dA + \int_A x dA \right),$$

ovvero, per essere x od y assi baricentrici della sezione e di conseguenza $\int_A y dA = 0$, $\int_A x dA = 0$, anche :

$$(195) \quad T_x = - Gc \int_A \frac{\partial \psi}{\partial x} dA \quad , \quad T_y = - Gc \int_A \frac{\partial \psi}{\partial y} dA .$$

Trasformiamo ora uno di questi interegrali, per esempio il primo, mediante la formula di Gauss: detto cioè ds un elemento del contorno s dell'area A , scriviamo :

$$\int_A \frac{\partial \psi}{\partial x} dA = - \int_s \psi m^* ds ,$$

o anche, essendo $m^* = \frac{dx}{d\nu}$:

$$(196) \quad \int_A \frac{\partial \psi}{\partial x} dA = - \int_s \psi \frac{\partial x}{d\nu} ds .$$

Supposta definita nell'area A una seconda funzione armonica $\varphi(x, y)$, analoga alla $\psi(x, y)$, per un lemma di Green sta l'uguaglianza :

$$\int_s \psi \frac{\partial \varphi}{d\nu} ds = \int_s \varphi \frac{d\psi}{d\nu} ds \quad (4) .$$

(4) - Si consideri l'identità :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} .$$

Integrando per tutta l'area A ed applicando la formula di Gauss nel piano alla funzione $\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ si deduce :

$$- \int_s \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{d\nu} ds = \int_A \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dA + \int_A \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dA ;$$

analogamente si ha :

Introducendovi come funzione φ la variabile indipendente x , evidentemente armonica, essa diviene:

$$\int_s \psi \frac{dx}{dv} ds = \int_s x \frac{d\psi}{dv} ds ;$$

tenendo presente la (193):

$$\int_{A'} \frac{\partial \psi}{\partial x} dA = - \int_s x \frac{d\psi}{dv} ds = - \int_s \frac{dy}{dv} x^2 ds + \int_s \frac{dx}{dv} xy ds ,$$

ed applicando nuovamente, in senso inverso, la formula di Gauss:

$$- \int_{A'} \frac{\partial \psi}{\partial x} dA = \int_{A'} \frac{\partial (x^2)}{\partial x} dA - \int_{A'} \frac{\partial (xy)}{\partial x} dA .$$

e finalmente:

$$- \int_{A'} \frac{\partial \psi}{\partial x} dA = 2 \int_{A'} \frac{\partial x}{\partial y} dA - \int_{A'} x \frac{\partial y}{\partial x} dA - \int_{A'} y dA .$$

I primi due integrali al secondo membro sono nulli, perchè tali sono le funzioni integrande, e anche il terzo integrale è nullo, perchè esprime il momento statico della sezione rispetto ad un asse baricentrico; è dunque:

$$\int_{A'} \frac{\partial \psi}{\partial x} dA = 0 .$$

Similmente si dimostra:

$$\int_{A'} \frac{\partial \psi}{\partial y} dA = 0 .$$

Con riguardo alle (195) avremo pertanto: $T_x = T_y = 0$.

$$- \int_s \psi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dv} ds = \int_{A'} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dA + \int_{A'} \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dA .$$

Sommando membro a membro si ottiene la relazione:

$$- \int_s \psi \frac{d\varphi}{dv} ds = \int_{A'} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dA + \int_{A'} \psi \Delta^2 \varphi dA ,$$

la quale esprime il lemma di Green.

Evidentemente sarà anche valida la:

$$- \int_s \varphi \frac{d\psi}{dv} ds = \int_{A'} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dA + \int_{A'} \psi \Delta^2 \varphi dA .$$

Se $\psi(x, y)$ e $\varphi(x, y)$ sono armoniche, dal confronto di queste due ultime relazioni risulta l'uguaglianza posta.

Più brevemente si poteva pervenire allo stesso risultato osservando che, per essere ovunque $\sigma_x = F_x = 0$, sono nulli i momenti flettenti M_x ed M_y in tutte le sezioni del cilindro. Per le ultime due delle (147) ciò importa senz'altro $T_x = T_x^* = T_y = T_y^* = 0$.

L'unica caratteristica della sollecitazione non nulla è il momento torcente:

$$M_o = \int_A (F_y x - F_x y) dA = -Gc \left(\int_A \frac{\partial \psi}{\partial y} x dA - \int_A \frac{\partial \psi}{\partial x} y dA - \int_A x^2 dA - \int_A y^2 dA \right),$$

la cui espressione, detti ordinatamente J_x , J_y e J_o i momenti d'inerzia rispetto agli assi x , y , ed il momento d'inerzia polare centrale, ed essendo $J_o = J_x + J_y$, assume la forma:

$$M_o = Gc \left(- \int_A \frac{\partial \psi}{\partial y} x dA + \int_A \frac{\partial \psi}{\partial x} y dA + J_o \right),$$

o, introducendo il *fattore di torsione*:

$$(197) \quad q = \frac{J_o}{J_o - \int_A \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} x - \frac{\partial \psi}{\partial x} y \right) dA},$$

l'altra:

$$(198) \quad M_o = \frac{Gc J_o}{q}.$$

Data la natura della funzione $\psi(x, y)$, il coefficiente q dipende esclusivamente dalla *forma* dell'area; la $\psi(x, y)$ resta infatti individuata dai valori $\frac{d\psi}{dv}$ della derivata direzionale, che evidentemente non mutano al variare della sezione del cilindro con legge di omotetia.

65 — Analisi della deformazione.

Poichè M_o è da riguardarsi come un dato del problema, dalla (198) si trae:

$$(199) \quad c = q \frac{M_o}{GJ_o},$$

sicchè le componenti di spostamento possono scriversi :

$$(200) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = -q \frac{M_o}{GJ_o} z (y + a) , \\ v = q \frac{M_o}{GJ_o} z (x - b) , \\ w = q \frac{M_o}{GJ_o} [ax + by - \psi(x, y)] . \end{array} \right.$$

È facile verificare che le sole componenti di deformazione non nulle sono:

$$(201) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -q \frac{M_o}{GJ_o} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + y \right) , \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -q \frac{M_o}{GJ_o} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x \right) , \end{array} \right.$$

Anche in questo caso le deformazioni sono indipendenti da z e perciò identiche per tutte le sezioni trasversali del cilindro. Essendo poi $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 0$, la dilatazione cubica è ovunque identicamente nulla.

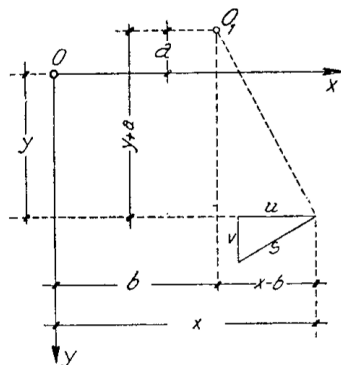


Fig. 44

Passando ora ad analizzare la deformazione, cominciamo con l'osservare che le prime due delle (189), scritte per $z = \text{costante}$, ossia per una data sezione retta, esprimono che, a prescindere dagli spostamenti secondo z , la sezione ruota rigidamente nel suo piano intorno al punto O_1 di coordinate (fig. 44) :

$$(202) \quad x = b \quad , \quad y = -a .$$

Dalle due relazioni suddette, dividendo membro a membro, risulta infatti quest'altra :

$$\frac{u}{v} = -\frac{y + a}{x - b} ,$$

la quale esprime che lo spostamento :

$$s = \sqrt{u^2 + v^2} = cz \sqrt{(y + a)^2 + (x - b)^2} ,$$

somma geometrica degli spostamenti u e v del punto generico M della sezione, è diretto secondo la normale al raggio O_1M ed è proporzionale

alla distanza $O_i M = \sqrt{(y+a)^2 + (x-b)^2}$, ciò che caratterizza appunto una rotazione della sezione intorno al punto O_i . L'ampiezza di tale rotazione:

$$(203) \quad \vartheta_x = \frac{s}{\sqrt{(y+a)^2 + (x-b)^2}} = cz = q \frac{M_o}{GJ_o} z,$$

è proporzionale all'ascissa z della sezione; la costante piccolissima c è perciò uguale alla rotazione della sezione distante l'unità dall'origine, o, anche, alla rotazione relativa fra due qualsiasi sezioni rette distanti fra loro l'unità di lunghezza: *l'angolo di torsione*.

Il punto O_i viene detto *centro di torsione*; siccome poi le sue coordinate (202) sono indipendenti da z , il luogo dei punti O_i per le diverse sezioni è una retta parallela all'asse z : *l'asse di torsione*. Quest'asse rimane rettilineo nella deformazione, mentre tutte le altre rette parallele all'asse z si trasformano in eliche cilindriche, il cui passo risulta dalla (203) ponendovi 2π in luogo di ϑ_x , e vale quindi:

$$(204) \quad z_p = \frac{2\pi GJ_o}{qM_o}.$$

La terza componente di spostamento:

$$w = c [ax + by - \psi(x, y)],$$

è indipendente da z : i punti di due sezioni trasversali qualsivogliano allineati sopra una parallela a quest'asse z subiscono quindi il medesimo spostamento w ; in particolare i baricentri subiscono spostamento nullo, perchè, come vedemmo di sopra, per le condizioni di vincolo poste, deve essere $\psi_o = 0$.

Eccettuati i casi che la funzione $\psi(y, x)$ sia lineare o nulla, le sezioni *non rimangono piane* ⁽¹⁾, ma si ingobbano tutte, comprese le estreme, nello stesso modo. L'unico punto che in seguito alla deformazione non esce dal piano della sezione retta al quale apparteneva inizialmente, è il baricentro della sezione; per $x = y = 0$ è infatti $w = 0$ ⁽²⁾.

(1) - Lo studio della torsione condotto dal Coulomb ed applicato più tardi dal Navier, sotto l'ipotesi generale della conservazione delle sezioni piane, perveniva alla conclusione errata che le tensioni tangenziali nelle sezioni rette del cilindro sono massime nei punti più lontani dal baricentro.

(2) - Queste conclusioni circa la deformazione sono tutte legate alle modalità di vincolo stabilite. Carlo Luigi Ricci ha dimostrato che ad ogni punto della base $z = 0$, contiguo al quale si assuma arbitrariamente l'elemento superficiale vincolato, corrisponde

66 — Stato di tensione.

Dalle (138) e (201) risultano diverse da zero le sole componenti di tensione :

$$(205) \quad \tau_{xx} = -q \frac{M_o}{J_o} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + y \right) \quad , \quad \tau_{yx} = -q \frac{M_o}{J_o} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x \right) ;$$

anch'esse, come le deformazioni, sono indipendenti da z . Come è facile provare ricordando le due ultime delle (191), esse assumono nel baricentro i valori :

$$(206) \quad (\tau_{xx})_o = -q \frac{M_o}{J_o} a \quad , \quad (\tau_{yx})_o = -q \frac{M_o}{J_o} b ;$$

e diverse da zero esse sono anche, in generale, in corrispondenza del centro di torsione, dato che le derivate della $\psi(x, y)$ vi hanno in generale valori diversi da quelli a e b che assumono nel baricentro.

67 — Lavoro di deformazione.

Il lavoro di deformazione si calcola nel modo più semplice applicando il teorema di Clapeyron. Osservando che la rotazione relativa delle basi vale :

$$(207) \quad \vartheta_l = q \frac{M_o}{GJ_o} l ,$$

avremo :

$$(208) \quad \Phi_l = \frac{1}{2} q \frac{M_o^2 l}{GJ_o} .$$

Il rapporto

$$K = \frac{GJ_o}{q}$$

dicesi *rigidezza torsionale*.

una diversa parallela all'asse z come asse di torsione. In questa corrispondenza possono esservi elementi uniti: se un dato punto della base, pensato come centro dell'elemento vincolato, risulta appartenere alla retta che gli corrisponde, questa prende il nome di *asse di torsione assoluto*, e si dimostra che la sua traccia sul piano della sezione trasversale generica — *centro di torsione assoluto* — è punto di tensione nulla. Si dimostra altresì che di centri di torsione assoluti ne esiste uno ed uno solo se la sezione è semplicemente connessa ed a contorno convesso; che possono esservene parecchi quando la sezione abbia contorno concavo, presenti cioè restringimenti o strozzature; che può infine non esservene alcuno quando la sezione sia a connessione multipla, presenti cioè cavità interne.

68 — Sezione circolare o anulare.

Per procedere ulteriormente nello studio della torsione, è necessario conoscere la funzione $\psi(x, y)$, ciò che richiede di precisare, come già dicemmo, la forma della sezione retta del cilindro. Studieremo qui appresso un certo numero di casi particolari, cominciando da quello, particolarmente interessante per le applicazioni, della sezione circolare piena. Sul contorno dell'area A avremo in tal caso (fig. 45):

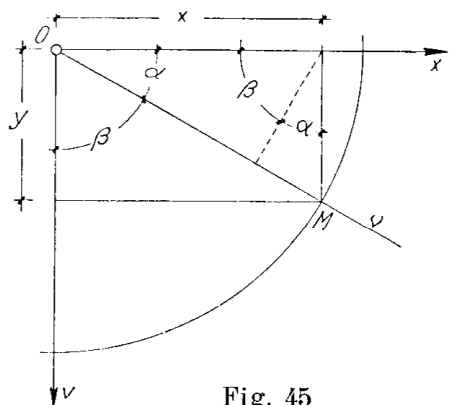


Fig. 45

$$x \cos \beta - y \cos \alpha = 0 ,$$

ovvero

$$n^* x - m^* y = 0 ,$$

sicchè la (192) diviene:

$$\frac{d\psi}{dv} = m^* \frac{\partial \psi}{\partial x} + n^* \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 .$$

Soddisfa a tale condizione la funzione:

$$\psi(x, y) = \text{costante} ,$$

evidentemente armonica; anzi, tenendo conto delle (191), dovremo assumere:

$$\psi(x, y) = 0 ,$$

da cui deriva:

$$a = b = 0 .$$

L'asse di torsione coincide con l'asse del cilindro, che è pertanto asse di torsione assoluto ⁽¹⁾.

Dalla (197) si deduce inoltre:

$$q = 1 ;$$

e dalla (199):

$$c = \frac{M_o}{GJ_o} .$$

Le componenti di spostamento divengono:

$$u = -czy \quad , \quad v = czx \quad , \quad w = 0 :$$

(1) - E facile dimostrare che ciò si verifica tutte le volte che la sezione retta possieda due assi di simmetria ortogonale. Infatti, se y è asse di simmetria, la (193) mostra che $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ è *funzione dispari in x* (cioè cambiando x in $-x$ la funzione conserva lo stesso valore assoluto, ma cambia di segno); quindi è necessariamente $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{x=0} = 0$, ossia $b = 0$. Analogamente si prova che la simmetria rispetto ad x importa $a = 0$.

le sezioni rette si mantengono dunque piane, e ciascuna ruota rigidamente attorno al suo baricentro, essendo la rotazione :

$$(209) \quad \vartheta = \frac{M_o}{GJ_o} z$$

direttamente proporzionale al momento torcente ed alla distanza z dalla base vincolata, e inversamente al modulo di elasticità tangenziale ed al momento d'inerzia polare centrale.

Le tensioni tangenziali sull'elemento di sezione intorno del punto M di coordinate x, y , sono (fig. 46) :

$$\tau_{ax} = -\frac{M_o}{J_o} y, \quad \tau_{yx} = \frac{M_o}{J_o} x,$$

e la tensione risultante :

$$\tau = \sqrt{\tau_{ax}^2 + \tau_{yx}^2} = \frac{M_o}{J_o} \sqrt{x^2 + y^2},$$

o anche :

$$(210) \quad \tau = \frac{M_o r}{J_o},$$

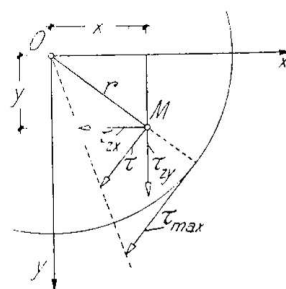


Fig. 46

essendo r il raggio della circonferenza di centro O sulla quale è situato il punto M ; essa pertanto varia linearmente con r e raggiunge il suo valore massimo sulla superficie laterale del cilindro.

Siccome è poi :

$$\frac{\tau_{ax}}{\tau_{yx}} = -\frac{y}{x},$$

la τ è diretta secondo la normale al raggio OM .

L'asse geometrico del solido rimane rettilineo (fig. 47); ogni altra retta AB parallela all'asse z si trasforma in un arco AB' di elica cilindrica di passo :

$$z_p = \frac{2\pi GJ_o}{M_o}.$$

In quest'ultima relazione, come nelle (209) e (210), è notoriamente :

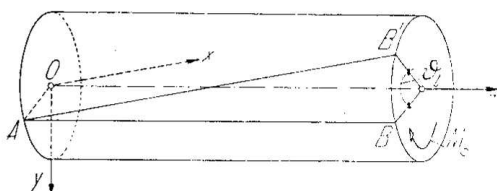


Fig. 47

$$J_o = \frac{\pi}{2} r^4,$$

dove r indica ora il raggio della circonferenza che limita la sezione.

Le formule relative alla sezione circolare valgono anche per il caso

della sezione anulare quando, essendo r_i il raggio interno, si ponga:

$$J_o = \frac{\pi}{2} (r^4 - r_i^4).$$

Se $r - r_i = s$ è abbastanza piccolo, come nel caso d'un tubo a parete sottile, si può porre in via di approssimazione:

$$J_o = 2\pi r_m s r_m^2 = A r_m^2,$$

dove $r_m = (r + r_i):2$ indica il raggio medio, A l'area della sezione.

69 — Sezione ellittica.

La sezione retta sia ora un'ellisse di semiassi ρ_1 e ρ_2 , sicchè l'equazione del contorno abbia la forma:

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho_2}\right)^2 - 1 = 0.$$

Poichè i coseni direttori della normale ν al contorno valgono:

$$m^* = \frac{dx}{d\nu} = k \frac{\partial f}{\partial x} = k \frac{2x}{\rho_1^2}, \quad n^* = \frac{dy}{d\nu} = k \frac{\partial f}{\partial y} = k \frac{2y}{\rho_2^2},$$

la condizione (178) può scriversi:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{x}{\rho_1^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{y}{\rho_2^2} = x \frac{y}{\rho_2^2} - y \frac{x}{\rho_1^2} = \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{\rho_1^2 \rho_2^2} xy;$$

ed è facile verificare che ad essa soddisfa la funzione

$$\psi(x, y) = \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{\rho_1^2 + \rho_2^2} xy,$$

evidentemente armonica.

Sono anche soddisfatte le condizioni di vincolo (191), le ultime due delle quali importano $a = b = 0$. Anche in questo caso dunque l'asse di torsione coincide con l'asse geometrico del solido.

Calcoliamo ora il fattore di torsione applicando la (197); osservando che è:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{\rho_1^2 + \rho_2^2} y, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{\rho_1^2 + \rho_2^2} x,$$

si deduce:

$$\int_A \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dA = \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{\rho_1^2 + \rho_2^2} \int_A (x^2 - y^2) dA,$$

la quale per essere:

$$J_x = \int_A y^2 dA = \frac{\pi \rho_1 \rho_2^3}{4}, \quad J_y = \int_A x^2 dA = \frac{\pi \rho_1^3 \rho_2}{4},$$

può scriversi:

$$\int_A \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dA = \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{\rho_1^2 + \rho_2^2} (J_y - J_x) = \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{\rho_1^2 + \rho_2^2} \frac{\pi \rho_1 \rho_2}{4} (\rho_1^2 - \rho_2^2).$$

Tenuto ancora presente che il momento d'inerzia polare vale:

$$J_o = J_x + J_y = \frac{\pi}{4} \rho_1 \rho_2 (\rho_1^2 + \rho_2^2),$$

sostituendo nell'espressione q , si ricava facilmente:

$$(211) \quad q = \left(\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2 \rho_1 \rho_2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2.$$

Il fattore di torsione dipende dunque esclusivamente dal rapporto $\frac{\rho_1}{\rho_2}$. Per $\frac{\rho_1}{\rho_2} = 1$ si ottiene il valore $q = 1$ già trovato per la sezione circolare; crescendo tale rapporto, il fattore q aumenta rapidamente.

Dalla (203) si trae per l'angolo di torsione l'espressione:

$$(212) \quad c = \left(\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2 \rho_1 \rho_2} \right)^2 \frac{M_o}{G J_o},$$

o anche, ricordando il valore di J_o e tenendo presente che $A = \pi \rho_1 \rho_2$:

$$(213) \quad c = \frac{4 \pi^2 J_o M_o}{A^2 G}.$$

Quest'ultima prova che, a parità di area, la rotazione prodotta dalla torsione è proporzionale al momento d'inerzia polare.

Le (205), effettuate le sostituzioni, divengono:

$$(214) \quad \tau_{xx} = - \frac{2 M_o}{A \rho_2^2} y, \quad \tau_{yx} = \frac{2 M_o}{A \rho_1^2} x;$$

per cui risulta :

$$\frac{\tau_{xx}}{\tau_{yy}} = -\frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} \frac{y}{x} .$$

Lungo un diametro dell'ellisse essendo costante il rapporto y/x delle coordinate, si mantiene anche tale quello fra le due componenti, sicchè

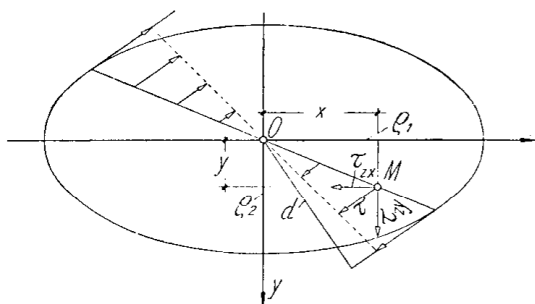


Fig. 48

la tensione τ risultante deve conservare direzione invariata. Poichè in corrispondenza degli estremi del diametro tale direzione deve coincidere con quella della tangente al contorno, si conclude che la tensione agente in un punto generico M della sezione ha direzione coniugata al diametro che passa per quel punto (fig. 48). È poi evidente che il suo

valore assoluto varia proporzionalmente alla distanza \overline{MO} degli elementi dal centro della sezione.

Dalle (214), indicando con x, y , le coordinate d'un punto M_i del contorno, si ha pure :

$$\tau = \sqrt{\tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2} = 2 \frac{M_0}{A} \sqrt{\frac{x^2}{\rho_1^2} + \frac{y^2}{\rho_2^2}} .$$

Ma il radicale dell'ultima espressione di τ è uguale all'inverso della distanza d del centro della sezione dalla tangente al contorno nel punto M_i (4); possiamo dunque affermare che la tensione tangenziale τ , varian-

(4) - L'equazione della tangente, dette ξ ed η le coordinate di un punto di essa, è :

$$(\xi - x) \frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y) \frac{\partial f}{\partial y} = 0 ,$$

e nel caso che qui si tratta :

$$\frac{\xi x}{\rho_1^2} + \frac{\eta y}{\rho_2^2} - 1 = 0 .$$

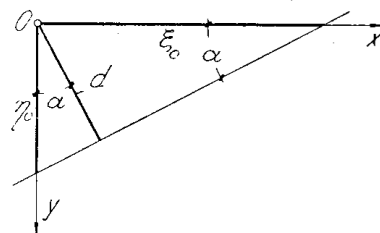
Tale retta taglia gli assi nei punti definiti dalle :

$$\xi_0 = \frac{\rho_1^2}{x} \quad , \quad \eta_0 = \frac{\rho_2^2}{y} .$$

D'altra parte, dalla figura risulta :

$$d = \xi_0 \sin \alpha \quad , \quad d = \eta_0 \cos \alpha .$$

Quadrando e sommando si ottiene :



do sul contorno in ragione inversa di detta distanza, raggiunge il suo massimo alle estremità dell'asse minore, laddove quella distanza è minima, ossia nei punti del contorno più vicini all'asse di torsione.

L'espressione di w diviene:

$$w = - \frac{\rho_1^4 - \rho_2^4}{4 \rho_1^2 \rho_2^2} \frac{M_0}{GJ_0} xy,$$

equazione che rappresenta un paraboloide iperbolico, e perciò rigato. Lungo gli assi della sezione, ossia per $x=0$, oppure per $y=0$, è $w=0$; questi assi sono quindi due generatrici del detto paraboloide, il quale pertanto risulta tangente nel punto $x=y=0$ al piano a cui apparteneva inizialmente la sezione. Per $M > 0$ e $\rho_1 > \rho_2$, w è positivo nei quadranti in cui x ed y hanno segno contrario, negativo negli altri quadranti.

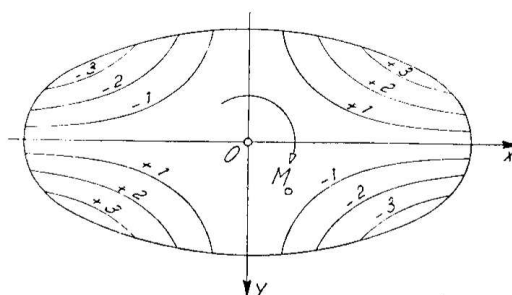


Fig. 49

La figura 49 rappresenta la deformazione della sezione mediante curve di livello, cioè mediante le proiezioni delle linee intersezione del paraboloide con i piani equidistanti e paralleli al piano xy : tali curve sono iperboli equilateri aventi gli assi x ed y per asintoti. Un osservatore disposto secondo l'asse z , con la testa dalla parte delle z positive, vedrebbe abbassarsi i due quadranti che nel senso di M_0 seguono i due semiasse maggiori, innalzarsi gli altri due.

70 — Sezione rettangolare.

Questo caso, importantissimo dal punto di vista delle applicazioni, si presenta più complesso dei precedenti perchè richiede l'introduzione di funzioni trascendenti.

da cui:

$$\left(\frac{d}{\xi_0}\right)^2 + \left(\frac{d}{\eta_0}\right)^2 = 1,$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\xi_0^2} + \frac{1}{\eta_0^2}}},$$

e sostituendo a ξ_0 e η_0 le loro espressioni:

$$d = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{\rho_1^4} + \frac{y^2}{\rho_2^4}}},$$

Siano $2a$ e $2b$ i lati del rettangolo, ed $a > b$ (fig. 50) ⁽⁴⁾.

Ricordando che la tensione sul contorno ha componente nulla secondo la normale, dev'essere:

$$\text{per } x = \pm a \quad , \quad F_x = \tau_{xx} = 0 ;$$

$$\text{per } y = \pm b \quad , \quad F_y = \tau_{yy} = 0 .$$

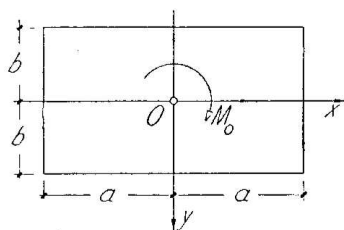


Fig. 50

Dalle (180) si ricava perciò:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -y \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = x .$$

La funzione armonica ψ soddisfacente a queste condizioni al contorno può ricavarsi mediante uno sviluppo in serie di Fourier di cui qui indichiamo il risultato:

$$(215) \quad \psi(x, y) = xy - \frac{32}{\pi^3} b^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} \frac{\sinh(k_1 x) \sin(k_1 y)}{\cosh(k_1 a)} ,$$

avendo posto:

$$k_1 = \frac{2k-1}{2} \frac{\pi}{b} .$$

È facile verificare che tale funzione è armonica.

Derivando la (215) rispetto ad x ed y , si ottiene intanto:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = y - \frac{32}{\pi^3} b^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} \frac{k_1 \cosh(k_1 x) \sin(k_1 y)}{\cosh(k_1 a)} ,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = x - \frac{32}{\pi^3} b^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} \frac{k_1 \sinh(k_1 x) \cos(k_1 y)}{\cosh(k_1 a)} .$$

È poi:

$$\int_A x \frac{\partial \psi}{\partial y} dA = J_y - \frac{32}{\pi^3} b^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} \frac{4 k_1}{\cosh(k_1 a)} A_1 B_1 ,$$

$$\int_A y \frac{\partial \psi}{\partial x} dA = J_x - \frac{32}{\pi^3} b^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} \frac{4 k_1}{\cosh(k_1 a)} A_2 B_2 ,$$

(4) - Le costanti di vincolo a e b della trattazione generale sono qui entrambe nulle (vedi nota al n. 68); pertanto è impossibile ogni confusione di simboli.

con :

$$A_1 = \int_0^a \operatorname{senh}(k_1 x) dx = \frac{1}{k_1^2} \left[k_1 x \cosh(k_1 x) - \operatorname{senh}(k_1 x) \right]_0^a,$$

$$B_1 = \int_0^b \cos(k_1 y) dy = \frac{1}{k_1} \left[\operatorname{sen}(k_1 y) \right]_0^b,$$

$$A_2 = \int_0^a \cosh(k_1 x) dx = \frac{1}{k_1} \left[\operatorname{senh}(k_1 x) \right]_0^a,$$

$$B_2 = \int_0^b y \operatorname{sen}(k_1 y) dy = \frac{1}{k_1^2} \left[\operatorname{sen}(k_1 y) - k_1 y \cos(k_1 y) \right]_0^b,$$

e di conseguenza :

$$A_1 B_1 = \frac{1}{k_1^3} [k_1 a \cosh(k_1 a) - \operatorname{senh}(k_1 a)] (-1)^{k-1},$$

$$A_2 B_2 = \frac{1}{k_1^3} \operatorname{senh}(k_1 a) (-1)^{k-1}.$$

Avremo perciò :

$$\int_A \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dA = J_y - J_x + \frac{32b^3}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k_1^2 (2k-1)^3} [2 \operatorname{tgh}(k_1 a) - k_1 a],$$

e, con riguardo all'espressione di k_1 , osservando inoltre che è :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96},$$

ancora :

$$\int_A \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dA = J_y - J_x - \frac{8}{3} a b^3 + \left(\frac{4}{\pi} \right)^5 b^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tgh}(k_1 a)}{(2k-1)^5}.$$

Sostituendo nella (197) e tenendo presenti le :

$$J_x = \frac{4}{3} a b^3, \quad J_y = \frac{4}{3} a^3 b,$$

si ottiene infine il fattore di torsione :

$$(216) \quad q = \frac{\frac{4}{3} (a^3 + b^3)}{b^2 \left[\frac{16}{3} - \left(\frac{4}{\pi} \right)^5 \frac{b}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^5} \operatorname{tgh} \left(\frac{2k-1}{2} \frac{\pi a}{b} \right) \right]}.$$

Nella seguente tabella sono riportati i valori di q per una scala di valori del rapporto a/b crescenti da 1 a ∞ : con l'aumentare di tale rapporto il fattore di torsione cresce rapidamente.

$\frac{a}{b} =$	1	1,2	1,5	2	2,5	3	4	5	10	∞
$q =$	1.1856	1,224	1,382	1,820	2,454	3,167	5,037	7,445	28,320	∞

Per a/b sufficientemente grande, in via di approssimazione si può ritenere uguale all'unità la sommatoria al denominatore della (216), nel qual caso risulta:

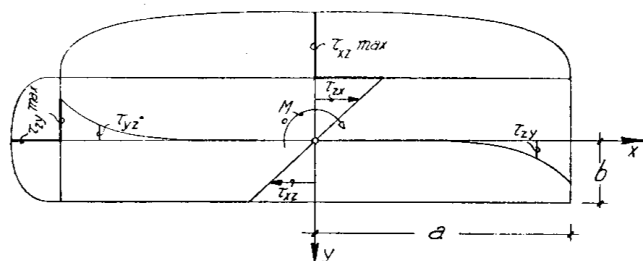


Fig. 51

$$(217) \quad q = \infty \frac{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}{4 \left(1 - 0,63 \frac{b}{a}\right)};$$

se poi il rapporto b/a è piccolissimo, può assumersi:

$$(218) \quad q = \infty \left(\frac{a}{2b}\right)^2.$$

Le tensioni tangenziali, tenute presenti le (205) e le espressioni scritte di sopra per le derivate della $\psi(x, y)$, valgono:

$$(219) \quad \begin{cases} \tau_{xz} = -2q \frac{M_0}{J_0} \left(y - \frac{8}{\pi^2} b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \frac{\cosh(k_1 x) \operatorname{sen}(k_1 y)}{\cosh(k_1 a)} \right), \\ \tau_{yx} = 2q \frac{M_0}{J_0} \left(\frac{8}{\pi^2} b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \frac{\operatorname{senh}(k_1 x) \cos(k_1 y)}{\cosh(k_1 a)} \right). \end{cases}$$

Esse si annullano nei vertici ed al centro della sezione; la τ_{xz} è nulla lungo i lati paralleli all'asse y , la τ_{yx} lungo gli altri lati. I diagrammi di figura 51 mettono in evidenza le leggi di variazione delle tensioni lungo le mediane e lungo i margini della sezione. Al centro dei lati di maggior lunghezza la tensione raggiunge il massimo valore assoluto:

$$\tau_{\max} = 2q \frac{M_0 b}{J_0} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \frac{1}{\cosh(k_1 a)} \right).$$

Per $a = b$, avremmo:

$$\tau_{\max} = 2q \frac{M_o b}{J_o} \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{1}{2,509} + \frac{1}{9,55,665} + \dots \right) \right],$$

e trascurando i termini della serie dopo il secondo:

$$(220) \quad \tau_{\max} = 1,351q \frac{M_o b}{J_o}.$$

Se il rapporto a/b è molto grande, è lecito trascurare addirittura tutti i termini della serie in confronto all'unità, e scrivere semplicemente:

$$\tau_{\max} = 2q \frac{M_o b}{J_o},$$

dalla quale infine, sostituendo a q il valore fornito dalla (218), a J_o la sua nota espressione e trascurando rispetto all'unità il quadrato del rapporto b/a , si ottiene quest'altra:

$$(221) \quad \tau_{\max} = \frac{3}{8} \frac{M_o}{a b^2}.$$

* * *

Poniamo la tensione tangenziale massima nella sezione sotto la forma:

$$(222) \quad \tau_{\max} = \frac{1}{\alpha} \frac{M_o}{b^2 h},$$

in cui è ora b tutto il lato minore, h il lato maggiore del rettangolo; similmente poniamo l'angolo di torsione:

$$(223) \quad c = \frac{1}{\beta} \frac{M_o}{G b^3 h}.$$

I coefficienti α e β che figurano nelle due posizioni sono funzioni del rapporto h/b , detto *allungamento* della sezione, ed hanno i valori indicati nella seguente tabella in corrispondenza di un'opportuna gradazione di valori del rapporto suddetto.

L'uso delle (222) e (223), con l'ausilio dei coefficienti indicati dalla tabella, rende spedito il calcolo dei prismi a sezione rettangolare soggetti

a torsione: per valori dell'allungamento non compresi nella gradazione della tabella è lecito dedurre i valori di α e β con interpolazione lineare.

$\frac{h}{b} =$	1	1,2	1,5	2	3	10	∞
$\alpha =$	0,208	0,219	0,231	0,246	0,263	0,312	0,333
$\beta =$	0,141	0,166	0,196	0,229	0,263	0,312	0,333

Per allungamenti superiori a 10, si può ritenere con buona approssimazione:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{3};$$

l'espressione dell'angolo di torsione in tal caso diviene:

$$(224) \quad c = \frac{3 M_o}{G b^3 h},$$

e quella della tensione massima, in accordo con la (221):

$$(225) \quad \tau_{\max} = \frac{3 M_o}{b^2 h}.$$

71 — Formule approssimate per le sezioni dei profilati.

Formule approssimate adatte al caso di ferri profilati — angolari, travi a \square , a Γ , a \top , e analoghe — possono dedursi da quelle relative alla sezione rettangolare con elevato rapporto d'allungamento.

Supposta la sezione costituita da tanti rettangoli, il generico dei quali abbia le dimensioni b_i e h_i ($b_i < h_i$), si può assumere come rigidità torsionale la quantità:

$$(226) \quad K = \frac{M_o}{c} = \frac{G J_o}{q} = G J^*,$$

essendo:

$$(227) \quad J^* = \frac{1}{3} \sum_i b_i^3 h_i$$

un termine di quart'ordine, che diremo *momento d'inerzia ridotto*. Con

ciò si ottiene l'angolo di torsione:

$$(228) \quad c = \frac{3 M_o}{G \sum_i b_i^3 h_i} = \frac{M_o}{G J^*} .$$

Quanto alla tensione al contorno del rettangolo di lati b_i , h_i , in punti sufficientemente lontani dai vertici della sezione complessiva, usando ancora la (225), può scriversi:

$$\tau = c G b_i ,$$

sicchè la massima tensione, che si verifica all'incirca agli estremi della mediana minore del rettangolo più largo, vale:

$$(229) \quad \tau_{\max} = c G b_{\max} = \frac{M_o}{J^*} b_{\max} .$$

Ovviamente per un cantonale simmetrico è (fig. 52 a):

$$J^* = \frac{1}{3} b^3 (2h - b) ;$$

e per un ferro a \square o a Γ (figg. 52 b, c):

$$J^* = \frac{1}{3} (2b_1^3 h_1 + b_2^3 h_2) .$$

Tensioni alquanto più elevate di quelle fornite dalla (229) si hanno in corrispondenza dei risvolti interni della sezione, se questi non sono provvisti di raccordi sufficientemente ampi.

Le formule ora indicate non sono applicabili al caso in cui la sezione, ancorchè riguardabile come un insieme di rettangoli, sia a connessione multipla.

72 — La funzione degli sforzi.

Il problema della torsione si risolve spesso con l'impiego di modelli meccanici, ricorrendo ad analogie con fenomeni governati da leggi che si traducono in equazioni formalmente identiche a quelle del problema in istudio.

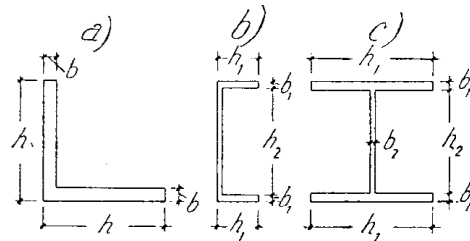


Fig. 52

Sostituiamo alla funzione $\psi(x, y)$ la sua *coniugata* $\varphi(x, y)$, legata alla precedente dalle *condizioni di Cauchy-Riemann* :

$$(230) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} .$$

È facile persuadersi che questa seconda funzione è essa pure armonica ; derivando le (216) rispettivamente rapporto ad y e ad x e sottraendo la seconda dalla prima, si ha infatti :

$$(231) \quad \Delta^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 .$$

La condizione al contorno cui deve soddisfare la $\varphi(x, y)$ si ottiene sostituendo le (230) nell'equazione ai limiti sulla superficie laterale del cilindro ; ricordando la (193) ed osservando che in funzione dell'elemento ds di tangente al contorno, i coseni direttori della normale si esprimono :

$$(232) \quad m^* = \frac{dx}{dv} = \frac{dy}{ds} \quad , \quad n^* = \frac{dx}{dv} = - \frac{dy}{ds} ,$$

avremo :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = - y \frac{dy}{ds} - x \frac{dx}{ds} .$$

da cui :

$$\frac{d\varphi}{ds} = - \frac{d}{ds} \frac{x^2 + y^2}{2} ,$$

e integrando :

$$(233) \quad \varphi(x, y) = - \frac{x^2 + y^2}{2} + C .$$

Se la sezione è semplicemente connessa, è lecito porre la costante di integrazione uguale a zero in quanto essa non altera le derivate della $\varphi(x, y)$, nè, di conseguenza, le tensioni che ne dipendono. Se invece la sezione è a connessione multipla, dato un valore arbitrario alla costante relativa ad uno dei contorni che ne delimitano l'area, restano univocamente determinate le costanti relative ai rimanenti contorni.

Il problema della torsione si riduce in ogni caso alla ricerca di una funzione $\varphi(x, y)$ tale da soddisfare alla (231) nei punti interni della sezione e alla (233) sul contorno. Nota tale funzione, si calcolano le tensioni :

$$(234) \quad \tau_{xx} = -cG \left(y + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \quad , \quad \tau_{xy} = cG \left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) ,$$

come si prova subito sostituendo le (230) nelle (205).

Le analogie riescono più chiare se si introduce la *funzione degli sforzi*.

$$(235) \quad f(x, y) = \varphi(x, y) + \frac{x^2 + y^2}{2} ;$$

la condizione cui questa deve soddisfare nei punti interni si ottiene sommandone le derivate seconde e tenendo presente la (231); avremo :

$$(236) \quad \Delta^2 f = 2 ;$$

al contorno, avuto riguardo alla (233), dev' essere :

$$(237) \quad f(x, y) = 0 .$$

Sostituendo poi nelle (234) le espressioni delle derivate della $\varphi(x, y)$ che si traggono dalla (235), le tensioni divengono :

$$(238) \quad \tau_{xx} = -cG \frac{\partial f}{\partial y} \quad , \quad \tau_{xy} = cG \frac{\partial f}{\partial x} .$$

Le coordinate del centro di torsione, espresse dalle due ultime delle (191), in funzione della $f(x, y)$, tenute presenti le (230) e la (235), si scrivono :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_o = a \quad , \quad - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_o = b .$$

Quanto al momento torcente :

$$M_o = \int_A (\tau_{xy} x - \tau_{xx} y) dA ,$$

sostituendovi le (238), assume l' espressione :

$$M_o = cG \int_A \left(\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y \right) dA ,$$

o l' altra :

$$M_o = cG \left(\int \frac{\partial f}{\partial y} x dx \int dy + \int \frac{\partial f}{\partial x} y dy \int dx \right) ;$$

integrando per parti e ricordando la (237), avremo in definitiva:

$$(239) \quad M_o = -2cG \int_A f(x, y) dA .$$

Il momento torcente è dunque proporzionale al volume:

$$V = - \int_A f(x, y) dA ,$$

racchiuso tra la sezione ed il diagramma spaziale della funzione degli sforzi.
La rigidezza torsionale ha l'espressione:

$$(240) \quad K = \frac{M_o}{c} = 2GV ,$$

che, confrontata con la (198), fornisce:

$$\frac{J_o}{q} = 2V .$$

Infine il lavoro di deformazione vale:

$$(241) \quad \Phi_i = \frac{1}{2G} \int_A (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) dV = \frac{c^2 Gl}{2} \int_A \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] dA .$$

73 — L' analogia di Prandtl.

La deformazione d'una membrana elastica sottile, di spessore costante, perfettamente flessibile, di forma simile a quella della sezione soggetta a torsione, poggiata ed uniformemente tesa sul contorno, e caricata ortogonalmente da una pressione costante è governata dall'equazione differenziale (fig. 53):

$$(242) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{p}{H} .$$

Supposto che inizialmente la membrana giaccia nel piano xy , ζ indica lo spostamento del punto generico $M(x, y)$ secondo l'asse z , dovuto alla deformazione; H è la tensione uniforme agente sul contorno, p il carico costante normale al piano iniziale della membrana.

La (242) è identica alla (236) quando si ponga:

$$f = k\zeta ,$$

per cui la (236) diviene :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{2}{k} ;$$

purchè si ponga cioè :

$$(243) \quad k = \frac{2H}{p} .$$

Ammissa inoltre la rigidità del contorno, sarà in corrispondenza di esso :

$$\zeta = 0 ,$$

e perciò soddisfatta la (237).

In funzione delle ζ , le tensioni valgono :

$$(244) \quad \tau_{xx} = -cG \frac{2H}{p} \frac{\partial \zeta}{\partial y} , \quad \tau_{xy} = cG \frac{2H}{p} \frac{\partial \zeta}{\partial x} ;$$

il momento torcente :

$$(245) \quad M_o = 2cG \frac{2H}{p} \int_A \zeta dA = 4 \frac{cGH}{p} \int_A \zeta dA$$

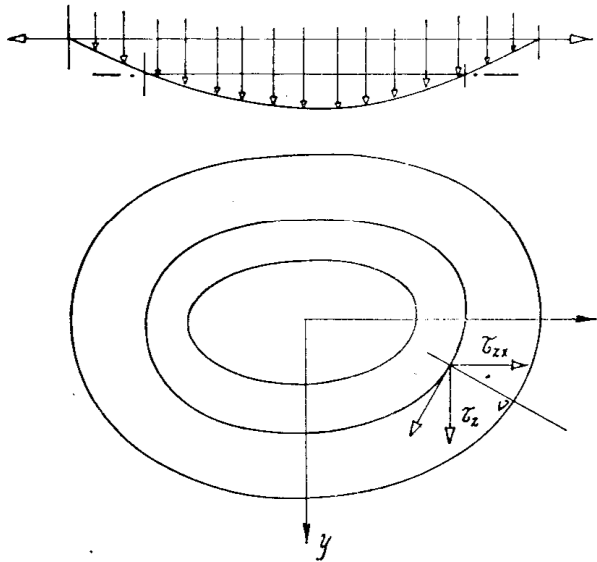


Fig. 54

$$(247) \quad \frac{d\zeta}{ds} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{dy}{ds} = 0 ;$$

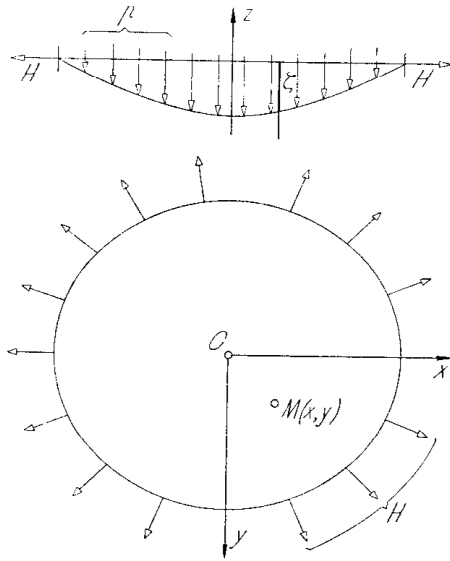


Fig. 53

risulta proporzionale al volume racchiuso tra il piano xy e la superficie elastica della membrana. Se ne deduce la rigidità torsionale :

$$(246) \quad K = \frac{M_o}{c} = 4 \frac{GH}{p} \int_A \zeta dA .$$

Ecco come può essere sfruttata l'analogia.

La $\zeta(x, y)$ si presenterà costante lungo certe linee, curve di livello della superficie elastica della membrana, la cui equazione differenziale è (fig. 54) :

questa, avuto riguardo alle (244), si traduce nell'altra:

$$\tau_{xy} \frac{dx}{ds} - \tau_{xx} \frac{dy}{ds} = 0,$$

o ancora, indicando con m^* ed n^* i coseni direttori della normale alla curva di livello nel punto per il quale s'immagina scritta la (247) e ricordando le (132):

$$(248) \quad \tau_{xy} n^* + \tau_{xx} m^* = 0,$$

la quale esprime che la tensione totale in un punto qualunque della sezione ha componente nulla secondo la normale ν alla curva di livello passante per quel punto; essa è pertanto diretta tangenzialmente alla curva, ciò che permette di affermare che *le curve di livello della membrana sono traiettorie delle tensioni tangenziali*, linee aventi cioè in ciascun loro punto come tangente la retta d'azione della tensione ivi applicata.

Ciò posto, la tensione totale nel punto generico potrà ottenersi proiettando le due componenti sulla tangente alla linea di livello passante per quel punto e sommando le proiezioni; avremo:

$$\tau = \tau_{xy} m^* - \tau_{xx} n^*,$$

che per le (234) e le (232), può scriversi:

$$(249) \quad \tau = \frac{2cGH}{p} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx}{d\nu} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{dy}{d\nu} \right) = \frac{2cGH}{p} \frac{d\zeta}{d\nu};$$

dunque *la tensione tangenziale è proporzionale alla massima pendenza $\frac{d\zeta}{d\nu}$ della membrana nel punto corrispondente.*

Supponiamo che la superficie elastica sia rappresentata con curve di livello ottenute, come d'uso, sezionando la membrana deformata con piani equidistanti, le tensioni saranno maggiori laddove le curve si presentano più fitte (pendenze più forti), più grandi nei punti del contorno più vicini all'asse di torsione, nulle dove l'ordinata della membrana è massima o minima (piano tangente parallelo al piano xy). Il centro di torsione assoluto è pertanto il punto in cui la ζ assume il valore assoluto massimo. Punti di tensione nulla si hanno inoltre in corrispondenza di angoli sporgenti, mentre gli sforzi tendono a valori infinitamente grandi in corrispondenza di angoli rientranti.

Il dispositivo pratico che permette di utilizzare l'analogia è stato realizzato da Taylor e Griffith (fig. 55). La membrana viene formata con olea-

to sodico (soluzione di sapone puro), tesa su di un foro praticato in un lamierino d'alluminio l , stretto tra due riquadri di ghisa A e B . Il foro, ad orli fresati per poter fissare con precisione il margine della pellicola, riproduce il contorno della sezione. La deformazione della membrana si provoca mediante una leggera depressione. Il rilievo delle quote della superficie elastica viene eseguito per mezzo d'una punta i unita ad una vi-

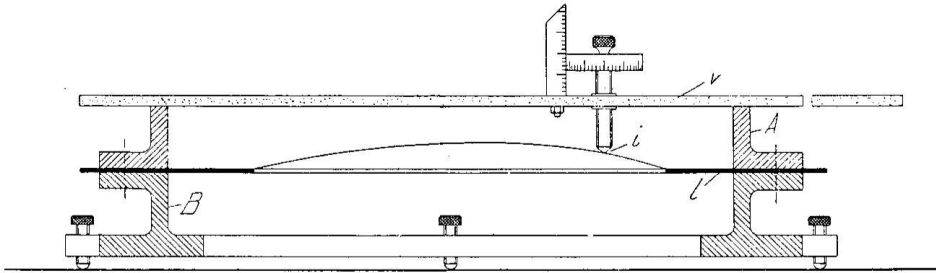


Fig. 55

te micrometrica attraversante la lastra di vetro v ; quello delle inclinazioni mediante un autocollimatore ed una lampadina, utilizzando la luce riflessa della membrana. Tracciate le curve di livello, si determina il volume racchiuso tra la membrana e l'orlo, e se ne deduce il momento torcente.

Per passare dalla ζ alla f si usa praticare nella lastrina l un foro circolare, oltre a quello della forma della sezione in istudio: se r è il raggio, J_o il momento d'inerzia polare centrale di quest'altra apertura, la rigidezza torsionale del cilindro corrispondente sarebbe:

$$K = \frac{M_o}{c} = G J_o = G \frac{\pi r^4}{2} ;$$

d'altra parte, per la (246) applicata alla membrana sul foro circolare, essa vale pure:

$$K = 4 \frac{GH}{p} \int_{.1} \zeta dA ,$$

Uguagliando le due espressioni:

$$\frac{\pi r^4}{2} = \frac{4H}{p} \int_{.1} \zeta dA ,$$

e calcolato il volume $V_o = \int_{.1} \zeta dA$ compreso tra la sezione circolare e la relativa membrana, resta determinato il rapporto fra la f e la ζ :

$$(250) \quad k = \frac{2H}{p} = \frac{\pi r^4}{4 V_o} .$$

74 — L' analogia idrocinetica.

Un'idea ancora più intuitiva della distribuzione delle tensioni tangenziali è data dall'analogia di Greenhill col moto rotatorio permanente di un liquido perfetto ed incompressibile in un recipiente cilindrico limitato da un fondo simile alla sezione del prisma soggetto a torsione.

Se si assume uguale all'unità la velocità angolare da cui il fluido è animato, la *funzione di corrente* risulta formalmente identica alla funzione degli sforzi. Le componenti della velocità :

$$(251) \quad v_x = -y = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad v_y = x = \frac{\partial f}{\partial x},$$

soddisfano alla *condizione di continuità* legata alla incompressibilità del fluido ;

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0,$$

e alla *condizione di permanenza* del moto :

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

Dal confronto delle (237) con le (224) si deduce :

$$(252) \quad \tau_{xx} = c G v_x, \quad \tau_{xy} = c G v_y :$$

le tensioni tangenziali sono cioè proporzionali in ciascun punto alle componenti della velocità.

Alle traiettorie della tensione tangenziale corrispondono le *linee di corrente*. Anche le condizioni ai limiti sono identiche : nel caso della torsione la tensione è diretta tangenzialmente al contorno della sezione, così come dev'essere della velocità nel moto del fluido. Il movimento voluto si può realizzare imprimendo al recipiente un moto rotatorio uniforme intorno ad un asse parallelo alle generatrici. Raggiunto lo stato di regime, in cui tutto il fluido ruota rigidamente col recipiente, se si arresta quest'ultimo, permane la rotazione del fluido nel suo interno ; e tale moto, ove siano praticamente trascurabili gli effetti della viscosità e della compressibilità, soddisfa alle condizioni dell'analogia.

Lo studio sperimentale del modello idrocinetico è meno agevole di quello della membrana elastica, sia per la difficoltà di misurare la velocità, sia perchè la viscosità influisce in modo non trascurabile sul moto

reale del fluido ; esso è invece di maggiore utilità per un esame qualitativo, data anche la possibilità di prevedere, almeno approssimativamente, l'andamento delle linee di corrente. Se si ha l'avvertenza di eseguire il tracciamento di queste in modo che la portata fra due linee qualsiasi riesca costante la velocità, e perciò la tensione in un punto qualunque del campo, sarà inversamente proporzionale alla distanza mutua che in quel punto presentano le linee di corrente. Le tensioni saranno pertanto più forti nelle regioni del contorno più prossime al centro di torsione, perchè vi sono più addensate le linee di corrente ; saranno invece nulle in corrispondenza di angoli sporgenti, laddove nel moto vorticoso si creano zone morte ; cresceranno oltre ogni limite in corrispondenza di angoli rientranti, dove la velocità della corrente tende a valori infinitamente grandi.

Particolarmente interessanti sono poi i risultati cui l'analogia conduce nell'applicazione che se ne fa allo studio delle perturbazioni nella distribuzione delle tensioni, prodotte da fori o fenditure assiali praticati nel cilindro. Queste interruzioni di continuità del solido soggetto a torsione vengono assimilate ad ostacoli frapposti al moto vorticoso ; le linee di corrente, non potendo attraversarli, debbono ripiegarsi ed addensarsi per contornarli. Ciò porta ad aumenti di velocità, cui corrispondono maggiori tensioni in vicinanza delle singolarità della sezione.

75 — Il metodo di Bredt per le aste tubolari a parete sottile.

La torsione d'un cilindro cavo si presta ad una trattazione elementare sufficientemente approssimata quando lo spessore della parete sia sotto un certo limite (fig. 56).

In tal caso la tensione tangenziale τ potrà ritenersi diretta secondo la tangente alla linea media s della sezione del tubo, e costante su tutto lo spessore h misurato in corrispondenza d'un punto P di detta linea.

Sarà allora τh la tensione totale agente su h , $\tau h ds$ quella agente sull'elemento di sezione di lunghezza ds , per modo che, detto O un punto arbitrario interno, posto $r = \overline{PO}$ e detto α l'angolo formato da s con la normale OQ calata da O sulla tangente in P alla s , il momento torcente può scriversi :

$$(253) \quad M = \int_s \tau h r \cos \alpha ds .$$

Il prodotto τh è costante, come si prova subito riflettendo che nell'analogia idrodinamica gli corrisponde la *portata* — volume vh di fluido che

attraversa una data sezione di larghezza h nell'unità di tempo — quantità necessariamente invariabile per le diverse sezioni, data la permanenza del moto.

La (253) pertanto può scriversi :

$$M = \tau h \int_s r \cos \alpha ds ,$$

e osservando che il prodotto $r \cos \alpha ds$ esprime il doppio dell'area elementare compresa fra l'arco ds e i raggi che ne proiettano gli estremi dal centro O , anche

$$(254) \quad M = 2 \tau h S ,$$

ove con S si è indicata l'area racchiusa entro la linea media s .

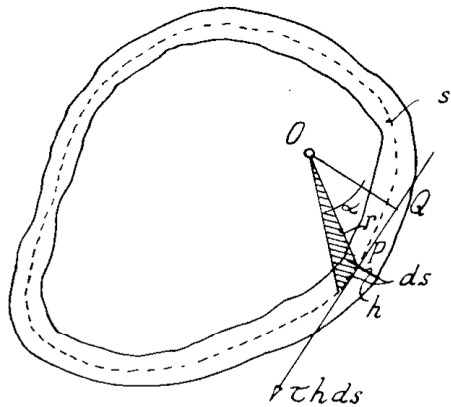


Fig. 56

Dalla (254) si ricava la tensione :

$$(255) \quad \tau = \frac{M}{2 h S}$$

agente in corrispondenza di un dato spessore h del tubo.

L'angolo di torsione si può ricavare uguagliando il lavoro di deformazione :

$$\Phi_t = \frac{1}{2} M c l$$

all'energia potenziale elastica ; osservando che quest'ultima :

$$\Phi_t = \frac{1}{2 G} \int_A (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) dV = \frac{1}{2 G} \int_0^l dz \int_A (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) dA = \frac{l}{2 G} \int_A \tau^2 dA = \frac{l}{2 G} \int_s h \tau^2 ds ,$$

per la (225) può scriversi nella forma :

$$\Phi_t = \frac{l}{2 G} \int_s h \frac{M^2}{4 h^2 S^2} ds = \frac{M^2 l}{8 S^2 G} \int_s \frac{ds}{h} ,$$

uguagliando si ottiene :

$$(256) \quad c = \frac{M}{4 S^2 G} \int_s \frac{ds}{h} .$$

Mentre la (256) si accorda bene coi risultati sperimentali, le tensioni calcolate con la (255) possono presentare deviazioni notevoli, fino al 15 ÷ 20%.