Estratto da "Statica" di
Gustavo Colonnetti, UTET, 1927

III.

IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Scoperto il principio della leva, trovata la legge dell'equilibrio sul piano inclinato, dedotta dall'uno e dall'altra la regola del parellelogramma delle forze, si può ben dire che la maggior parte dei problemi della statica non presentava più difficoltà sostanziali. Tutto si riduceva ad escogitare qualche ingegnoso artificio atto a ridurre il problema nuovo all'uno o all'altro di quelli noti e risolti.

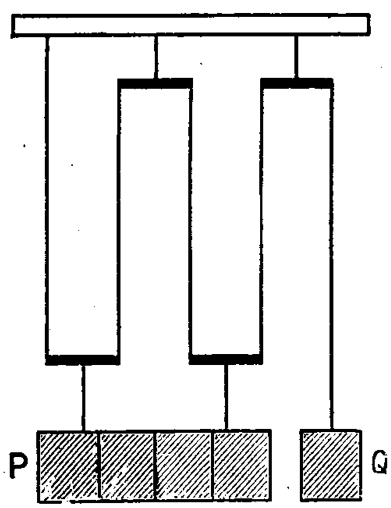

Fig. 34.

Ecco per esempio due espressivi disegni di Leonardo da Vinci (figg. 34 e 35) che mostrano chiaramente in qual modo il principio della leva venisse da lui utilizzato nello studio dell'equilibrio delle puleggie e dei sistemi di puleggie.

Sulle traccie di lui, questo ed altri consimili problemi vennero ampiamente trattati da GIOVANNI BATTISTA BENEDETTI (1530-1590) e da GUIDO UBALDO DEL MONTE (1545-1607).

Una analoga trattazione forma oggetto di uno speciale capitolo " De Trochleostatica „ aggiunto da Stevin nel 1605 ai suoi " Hypomnemata mathematica „. Orbene in quel capitolo Stevin si sofferma, quasi incidentalmente, a far rilevare il fatto che in una serie di combinazioni del tipo di quella rappresentata dalla fig. 35, ma utilizzanti un numero più o meno grande di rinvii, si può ottenere un innalzamento h del peso P sopportato dal sistema delle puleggie mobili attribuendo al contrappeso Q che lo equilibra un abbassamento eguale

a $2h$ se il contrappeso Q è eguale a P/2 (*sistema a due puleggie*)
„ $4h$ „ „ P/4 („ *quattro* „)
„ $6h$ „ „ P/6 („ *sei* „)

e così via.

Stevin esprime questo risultato dicendo che i varii casi di equilibrio trovati soddisfano tutti ad un'unica regola generale che egli enuncia colla formola:

Ut spatium agentis ad spatium patientis,
Sic potentia patientis ad potentiam agentis.

È un evidente richiamo a quel principio della eguaglianza del lavoro motore e del lavoro resistente che abbiamo visto a suo tempo ispirare a Jordanus de Nemore la sua bella dimostrazione dell'equilibrio della leva, e che al suo anonimo allievo ha suggerita la soluzione del problema del piano inclinato.

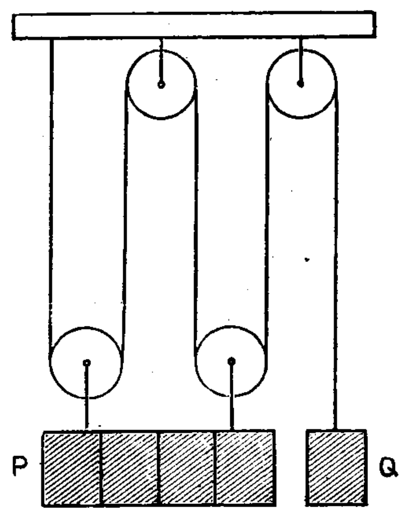

Fig. 35.

Al medesimo principio si ricollegano certe osservazioni che Galileo fa seguire alla sua trattazione del problema del piano inclinato da noi ricordata a suo luogo.

Egli, riferendosi al caso rappresentato nella nostra figura 20 in cui la lunghezza l del piano è esattamente eguale al doppio dell'altezza h — e dopo di aver dimostrato che per l'equilibrio deve il contrappeso Q essere esattamente eguale alla metà del peso P — osserva che se si mettesse il sistema in movimento in modo che il contrappeso Q discendesse di una certa altezza δ il peso P dovrebbe bensì spostarsi parallelamente al piano su cui poggia della stessa identica quantità, ma la sua salita misurata verticalmente sarebbe soltanto eguale a $\delta/2$.

Galileo è così condotto a rilevare che l'equilibrio non è soltanto determinato dalle grandezze dei pesi, ma anche dai loro possibili " avvicinamenti od allontanamenti dal centro della terra „, da quelle cioè che noi oggi chiameremmo le loro " altezze di caduta „.

Non diversamente Roberval dopo di avere trattato il problema dell'equilibrio di un peso sostenuto da due funi (figg. 30 e 31) si sofferma ad immaginare che al peso venga impresso uno spostamento verticale (verso l'alto o verso il basso) sì che i due contrappesi che determinano le tensioni nelle due funi siano trascinati a muoversi alla lor volta (nel senso contrario): e mette in evidenza la relazione che passa tra il rapporto degli spostamenti dei pesi e dei contrappesi ed il rapporto delle loro grandezze.

Per Stevin, come per Galileo, come per Roberval, il principio della eguaglianza dei lavori non è già il punto di partenza, sibbene il corollario che si enuncia a dimostrazione compiuta.

Però è un corollario di cui salta subito agli occhi la grande generalità.

Galileo stesso in una “ aggiunta „ dettata nel dicembre del 1639 per essere inserita in un'eventuale ristampa dei suoi “ Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze „ non potrà astenersi dal generalizzare.

Premesso “ tanto esser l'impeto del descendere d'un grave quanta è la resistenza o forza minima che basta per proibirlo e fermarlo „ Galileo scrive infatti testualmente: “ possiamo assertivamente affermare che quando debba seguire l'equilibrio, cioè la quiete, tra due mobili, le lor propensioni al moto devon rispondere reciprocamente alle loro gravità, *secondo quello che in tutti i casi de' movimenti meccanici si dimostra* „.

In un altro passo della stessa “ aggiunta „ Galileo, quasi a sviscerare l'intima fondamentale ragione di tutte le sue osservazioni, si esprime poi in questi termini: “ come è impossibile che un grave o un composto di essi si muova naturalmente all'in su, discostandosi dal comun centro verso dove conspirano tutte le cose gravi, così è impossibile che egli spontaneamente si muova se con tal moto il suo proprio centro di gravità non acquista avvicinamento al sudetto centro comune „.

E in verità sarebbe difficile disconoscere la singolare evidenza di una simile affermazione, tanto a tutti noi sembra perfettamente naturale che non si produca alcun movimento in un sistema in cui la eventuale discesa di un grave sarebbe compensata da un'equivalente salita di un altro.

C'è nei rilievi di Stevin, di Galileo, di Roberval un evidente richiamo a certe nostre conoscenze istintive, che sono così profondamente acquisite dalla nostra coscienza che noi non sentiamo neppure il bisogno di darcene ragione con un ragionamento logico, vale a dire di dimostrarle. Si tratta sempre di quelle stesse conoscenze istintive a cui noi abbiamo già fatto esplicito appello nelle nostre premesse, quando, per dare un significato fisico e matematico preciso alla idea di lavoro, abbiamo affermato che sollevare un chilogrammo ad un metro di altezza è esattamente la stessa cosa che sollevare mezzo chilogrammo a due metri.

E valeva ben la pena che fermassimo su questa idea ancora una volta la nostra attenzione per eliminare definitivamente ogni dubbio che pur ci fosse rimasto sulla sua origine eminentemente, anzi esclusivamente sperimentale.

Un'altra osservazione dobbiamo fare, ed è questa.

La eventuale sostituzione del concetto di lavoro a quello di momento, dagli antichi prescelto come elemento determinante dell'equilibrio o del movimento — sostituzione che appare chiara quando Galileo fa seguire alla dimostrazione dell'equilibrio sul piano inclinato (da noi riportata) l'osservazione testè ricordata — non aggiunge sostanzialmente nulla alle conoscenze di cui già eravamo in possesso: non fa che esprimerle sotto una nuova forma.

Nel fatto per esempio dell'equilibrio di una leva, è perfettamente indifferente considerare come elementi determinanti del fenomeno i pesi e le distanze loro dal fulcro, ovvero i pesi e le loro altezze di caduta.

Ma il quadro, che noi stiamo tratteggiando, dello sviluppo ulteriore della scienza ci rivelerà ben presto fino a qual punto la nuova concezione sia, rispetto alle precedenti, più espressiva e più vantaggiosa dal punto di vista specialmente dell'economia del pensiero.

* * *

Il primo che abbia veramente intuito tutto il vantaggio che dal nuovo punto di vista potevasi trarre per la possibilità che esso offriva di ridurre tutta la statica ad un principio unico, fu René Descartes (1596-1650).

In un breve trattato pubblicato nel 1637 sotto il titolo: " Explication des engins par l'ayde desquels on peut, avec une petite force, lever un fardeau fort pesant „ Descartes espone infatti la teoria della puleggia, del piano inclinato, del cuneo, dell'asse nella ruota, della vite, e, per ultimo, della leva, partendo sempre e sistematicamente, da un solo principio secondo il quale " il lavoro necessario per elevare due pesi differenti a differenti altezze è lo stesso se è lo stesso il prodotto del peso per l'altezza „.

E in una lettera indirizzata poco tempo appresso — 13 luglio 1638 — al Padre Mersenne, egli ribadisce il suo punto di vista scrivendo che tutto dipende da un solo principio che è il fondamento di tutta la statica, che cioè: " il ne faut ny plus ny moins de force; pour lever un cors pesant à une certaine hauteur, que pour en lever un autre moins pesant à une hauteur d'autant plus grande qu'il est moins pesant, ou pour en lever un plus pesant à une hauteur d'autant moindre „.

Descartes usava indifferentemente la parola *forza*, sia nel senso che noi le attribuiamo oggidì, sia per indicare quello che noi chiamiamo invece *lavoro*: e ciò ha dato origine a qualche erronea interpretazione del suo pensiero. Ma sulla vera portata di esso, e sulla chiarezza delle sue idee su questo argomento, non vi è dubbio possibile.

Il 12 settembre 1638 egli scrive infatti, a titolo di chiarimento, al Padre Mersenne:

" Il faut sur tout considérer que j'ay parlé de la force qui sert pour lever un poids à quelque hauteur, laquelle force a toujours deux dimensions, et non de celle qui sert en chaque point pour le soutenir, laquelle n'a jamais qu'une dimension, en sorte que ces deux forces diffèrent autant l'une de l'autre qu'une superficie diffère d'une ligne „.

E in una lettera successiva non nasconde la sua meraviglia per non essere stato subito compreso, scrivendo:

" Vous avez enfin entendu le mot force au sens que je le prens, quand je dis qu'il faut autant de force pour lever un poids de cent livres à la hauteur d'un pied qu'un de cinquante à la hauteur de deux pieds, c'est à dire qu'il y faut autant d'action ou autant d'effort. Je veux croire que je ne m'estois pas cy-devant assez expliqué, puisque vous ne m'aviez pas entendu, mais j'estois si éloigné de penser à la puissance qu'on nomme la force d'un homme lorsqu'on dit: un tel a plus de force que tel, etc.: que je ne pouvois aucunement me douter qu'on dust prendre le mot de force en ce sens là „.

Con quanta semplicità e sicurezza Descartes deducesse dal principio dei lavori le leggi dell'equilibrio, appare chiaro dal passo seguente, che si trova nella prima delle lettere citate:

" Et il suit évidemment de ceci que la pesanteur relative de chaque cors, ou ce qui est le mesme, la force qu'il faut employer pour le soutenir et empescher qu'il ne descende, lorsqu'il est en certaine position, se doit mesurer par le commencement du mouvement que devrait faire la puissance qui le soutient tant pour le hausser que pour le suivre s'il s'abaissait. En sorte que la proportion qui est entre la ligne droite que descriroit ce mouvement et celle qui marqueroit de combien ce cors s'approcheroit cependant du centre de la terre est la mesme qui est entre la pesanteur absolue et la relative ".

E perchè non resti dubbio sul fatto che, per lui, il principio dell'eguaglianza dei lavori non è più il corollario, sia pur generale ed elegante, rilevato così sovente dai suoi predecessori, ma è la chiave stessa del problema dell'equilibrio e la ragione ultima della soluzione di esso, in una lettera successiva — in data 15 novembre dello stesso anno — allo stesso Padre Mersenne, scrive:

" Pour ce qu'a écrit Galilée touchant la balance et le levier, il explique fort bien *quod ita fit*, mais non pas *cur ita fit*, comme je fais par mon Principe ".

***

Descartes è anche stato il primo che abbia nettamente enunciato il carattere infinitesimale del principio dei lavori.

Nel valersi di quella equivalenza di vincoli a cui già avevano felicemente ricorso prima di lui Galileo e Stevin, egli ha l'avvertenza, che nessuno prima di lui aveva avuto, di precisare che lo spostamento da considerarsi deve essere piccolissimo.

In una delle sue lettere al Padre Mersenne egli avverte infatti che l'eguaglianza dei lavori non ha luogo qualunque sia lo spostamento, grande o piccolo, che al meccanismo si imprime: essa non sussiste in modo generale, che per spostamenti infinitamente piccoli a partire dalla posizione di equilibrio.

E scrive:

" La pesanteur relative de chaque cors se doit mesurer par le commencement du mouvement que devrait faire la puissance qui le soutient, tant pour le hausser que pour le suivre s'il s'abaissait „.

E aggiunge:

" Notez que je dis *commencer à descendre,* non pas simplement *descendre*, à cause que ce n'est qu'au commencement de la descente à laquelle il faut prendre garde „.

E riferendosi al caso di un peso vincolato a muoversi a contatto di una superficie curva (fig. 36), spiega che la tensione Q che il peso P determina nella fune che lo trattiene in equilibrio è la stessa tanto se la superficie d'appoggio è profilata secondo la curva AMB come se è semplicemente costituita dal piano CD tangente nel punto M di appoggio alla superficie predetta.

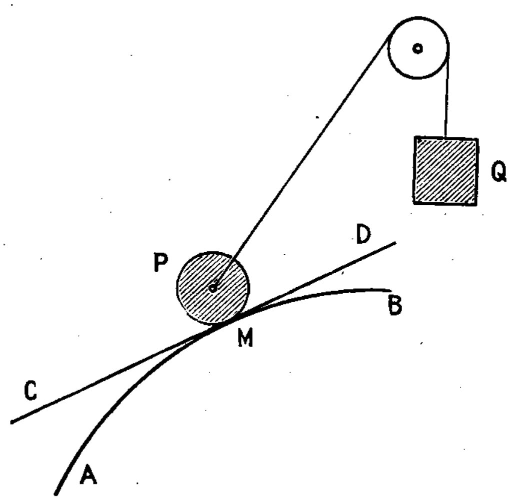

Fig. 36.

È ben vero infatti che il movimento che farebbe il peso salendo o discendendo di quantità finite sulla superficie curva, sarebbe affatto diverso da quello che farebbe spostandosi sul piano tangente: tuttavia la direzione del movimento nell'istante iniziale sarebbe nei due casi la stessa.

" Et il est évident — scrive Descartes — que le changement qui arrive à ce mouvement, sitost qu'il a cessé de toucher le point M ne peut rien changer en la pesanteur qu'il a lorsqu'il le touche „.

***

Attraverso alla accurata e minuziosa precisazione del suo pensiero, che egli ha occasione di fare nelle varie sue lettere al Padre Mersenne, Descartes formula in modo rigoroso la necessaria distinzione fra i concetti di forza e di lavoro, e dà di quest' ultimo la definizione esatta e completa riportata nelle nostre premesse.

Gli spetta inoltre indiscutibilmente il merito di avere operato il definitivo distacco della statica dalla dinamica.

Nel mettere in relazione i pesi applicati ad una macchina cogli spostamenti verticali dei lor punti di applicazione, i matematici del suo tempo usavano volentieri parlare delle rispettive velocità.

Ora poichè gli spostamenti di cui si tratta erano necessariamente contemporanei, parlare delle grandezze di essi o delle velocità con cui si effettuavano, doveva necessariamente condurre allo stesso risultato.

Ma il riferimento alle velocità rappresentava un richiamo ai principii della dinamica Aristotelica che Descartes non esita a disapprovare.

" Pour ceux qui disent que je devais considérer la vitesse, comme Galilée, plustost que l'espace, pour rendre raison des machines, je croy, entre nous, que ce sont des gens qui n'en parlent que par fantaisie, sans entendre rien en cette matière. Et bien qu'il soit évident qu'il faut plus de force pour lever un cors fort viste, que pour le lever fort lentement, c'est toutesfois une pure imagination de dire que la force doit être justement double pour doubler la vitesse, et il est fort aisé de prouver le contraire ".

Abbiamo voluto riportare nel loro stesso testo originale tutte queste affermazioni di Descartes, per dimostrare come attraverso l'opera sua la statica fosse veramente diventata una scienza autonoma, come essa si fosse finalmente emancipata dalle premesse della dinamica Aristotelica, senza perciò legarsi alla dinamica nuova che in quello scorcio di tempo si andava appena delineando.

La statica aveva ormai trovato un suo principio fondamentale di cui nessuno oserà ormai più mettere in dubbio la assoluta esattezza e la evidenza immediata.

***

Non bisogna però credere che a questo principio tutti gli studiosi del tempo abbiano senz'altro riconosciuto quel carattere basilare su cui Descartes si era così decisamente ed ostinatamente affermato.

Chi scorre la letteratura scientifica del secolo XVII la trova tutta pervasa da discussioni e da ritorni sulle antiche posizioni, la trova sopratutto dominata da una ristrettezza ed oscurità di vedute che l'influenza di Descartes non è riuscita a dissipare.

È di questo tempo la deduzione del principio della composizione delle forze da quello della composizione delle velocità, fatta da Roberval e da Varignon con evidenti riferimenti alla dinamica di Aristotile.

È bensì vero che verranno presto P. Lamy ed Isacco Newton a gettare le basi della dinamica moderna, ed a correggere la deduzione di Varignon mettendo le forze in rapporto colle accelerazioni anzichè colle velocità.

È vero anzi che le parti non tarderanno ad invertirsi e che D'Alembert proietterà una luce nuova su tutta la dinamica dimostrando come ogni problema di movimento possa ridursi ad un problema di equilibrio.

Ma tutto ciò avverrà con lentezza ed attraverso difficoltà di ogni sorta.

La verità è che la dinamica di Aristotile, come abbiamo avvertito fin da principio, offriva una interpretazione singolarmente naturale ed immediata delle più comuni esperienze. Infinitamente più astratta, la dinamica moderna è il frutto di un prodigioso sforzo mentale. Ed il secolo XVII ci offre la prova delle enormi difficoltà che l'intelligenza umana ha dovuto affrontare e superare per decidersi ad abbandonare la antica concezione e ad abbracciare la nuova.

Nel frattempo pochi sono i progressi che si registrano nel campo della statica propriamente detta.

Ci limitiamo a segnalarne due.

Il primo consiste nella estensione — esplicitamente fatta per la prima volta da John Wallis (1616-1703) — del concetto di forza, e del modo di trattarne, al caso di forze affatto qualunque.

Noi abbiamo infatti sin qui seguìto lo studio dei più svariati problemi della statica, ed abbiamo visto che le forze in gioco erano sempre e soltanto dei pesi. È bensì vero che colla sistematica applicazione di funi e di puleggie di rinvio, questi pesi venivano costretti ad agire nelle più diverse direzioni: ma si trattava pur sempre e soltanto di pesi.

Nel suo monumentale trattato di " Mechanica „ pubblicato tra il 1669 ed il 1671, il Wallis avverte espressamente che tutto ciò che abitualmente si dice dei pesi e della lor tendenza verso il centro della terra, si può e si deve ripetere di qualsiasi forza e del termine verso il quale essa tende.

E spiega che, come la discesa di un grave deve essere misurata dal suo avvicinarsi al centro della terra, così lo spostamento dovuto ad una qualunque altra forza motrice deve, in modo assolutamente generale, valutarsi nella direzione della forza.

In secondo luogo vuol essere qui ricordata la scoperta del teorema secondo cui il momento della risultante di due forze per rapporto ad un punto qualunque del loro piano è eguale alla somma degli analoghi momenti delle forze componenti. Questo teorema è stato per la prima volta enunciato da Varignon, e si trova nella sua " Nouvelle Mécanique „, opera architettata da lui fin dal 1687, ma pubblicata soltanto nel 1725, tre anni dopo la sua morte.

***

Questa " Nouvelle Mécanique „ doveva, nelle intenzioni del suo Autore, ricollegare la statica tutta al principio della composizione delle forze.

Ed ecco che quel principio dei lavori, che si era già mostrato così fecondo negli scritti di Jordanus de Nemore, dei suoi allievi, e di Leonardo da Vinci: che era stato trascurato o misconosciuto da Benedetti, da Guido Ubaldo del Monte e solo di sfuggita rilevato da Stevin: che, felicemente ripreso, rigorosamente enunciato e vigorosamente difeso da Descartes, era stato dopo di lui di nuovo messo in non cale; ecco che quello stesso principio fa, proprio nell'opera di Varignon, la sua nuova e questa volta definitiva comparsa.

Nella " Nouvelle Mécanique „ Varignon ha infatti inserita una lettera da Giovanni Bernouilli indirizzatagli il 26 giugno 1717, la quale contiene fra l'altro il seguente brano che, per la sua importanza veramente storica, citiamo per intiero nel suo stesso testo originale:

" Concevez plusieurs forces différentes qui agissent suivant différentes tendences ou directions pour tenir en équilibre un point, une ligne, une surface ou un corps; concevez aussi que l'on imprime à tout le système de ces forces un petit mouvement, soit parallèle à soi-même suivant une direction quelconque, soit autour d'un point fixe quelconque: il vous sera aisé de comprendre que par ce mouvement chacune de ces forces avancera ou reculera dans sa direction, à moins que quelqu'une ou plusieurs des forces n'ayent leurs tendences perpendiculaires à la direction du petit mouvement: auquel cas cette force, ou ces forces, n'avanceroient ni ne reculeroient de rien: car ces avancemens ou reculemens, qui sont ce que j'appelle vitesses virtuelles, ne sont autre chose que ce dont chaque ligne de tendence augmente ou diminue par le petit mouvement: et ces augmentations ou diminutions se trouvent, si l'on tire une perpendiculaire à l'extrémité de la ligne de tendence de quelque force, laquelle perpendiculaire retranchera de la même ligne de tendence, mise dans la situation voisine par le petit mouvement, une petite partie qui sera la mesure de la vitesse virtuelle de cette force „.

Bernouilli chiama qui col nome assolutamente improprio di velocità virtuali delle grandezze che, come dal contesto appare chiaramente, non sono affatto delle velocità ma semplicemente degli spostamenti (cioè delle lunghezze): noi non abbiamo in proposito che da richiamarci al passo citato di Descartes: e il richiamo riteniamo tanto più opportuno in quanto ancor oggi vi sono dei trattatisti che impropriamente continuano a designare col nome di principio delle velocità virtuali quel principio dei lavori in cui resta ormai ben inteso che le velocità non entrano affatto.

Nel seguito della sua lettera, Bernouilli si preoccupa di definire minuziosamente in un caso concreto il lavoro — egli lo chiama “ énergie „ — di ciascuna forza, sotto forma di prodotto della forza per la sopraindicata proiezione dello spostamento sulla direzione della forza stessa: e precisa, nei modi a noi ben noti, quando questo lavoro è da considerarsi come positivo (énergies affirmatives), e quando esso deve riguardarsi come negativo (énergies négatives). Dopo di che conclude:

“ Tout cela étant bien entendu, je forme cette proposition générale: En tout équilibre de forces quelconques, en quelque manière qu'elles soient appliquées, et suivant quelques directions qu'elles agissent les unes sur les autres, ou médiatement, ou immédiatement, la somme des énergies affirmatives sera égale à la somme des énergies négatives, prises affirmativement „.

***

Per Varignon, che ce lo presenta, questo enunciato è bensì ancor quello dell'elegante corollario la cui grande generalità, già rilevata da Galileo, viene nella " Nouvelle Mécanique „ ampiamente illustrata coi più svariati esempi e colle più interessanti applicazioni.

Ma ben più grande di quella che Varignon pensasse, era la portata dello scritto di Giovanni Bernouilli.

" In realtà — come giustamente osserva P. DUHEM nella sua storia su " Les origines de la statique „, di cui ci siamo largamente valsi nelle pagine che precedono — la lettera di Bernouilli a Varignon chiude il periodo storico della elaborazione dei principii della statica: con essa ha in certo qual modo inizio quello che si potrebbe chiamare il periodo classico.

Da Archimede a Varignon gli spiriti più spiccatamente matematici hanno tenacemente perseguito un medesimo programma, che troverà numerosi e valorosi continuatori fino ai tempi nostri. Per essi l'ideale consiste nel costruire una statica sul modello della geometria di Euclide: per opera loro, e attraverso una analisi dei singoli problemi estremamente ingegnosa e paziente, i casi di equilibrio dei sistemi più complicati e più varii vengono decomposti e discussi fino a che in ciascuno appaiano, chiaramente isolati, i casi semplici, elementari, di cui in certo modo si compone: e questi casi semplici, elementari, sono da essi scelti in modo che vi si ritrovi una ragion di certezza ed un grado di evidenza che ricordi alla nostra mente quella evidenza e quella certezza che sono proprie delle verità fondamentali su cui Euclide ha costruita la sua geometria.

Dare alla statica dei fondamenti logici così chiari ed indiscutibili come son quelli che stanno alla base delle matematiche pure, tale era indubbiamente l'obbiettivo cui Archimede mirava quando scriveva il suo trattato *'Επιπέδων ἰσορροπικῶν*, tale era ancora l'intenzione di Daniele Bernouilli e più tardi di Poisson allorquando essi si sforzavano di dimostrare in modo indipendente da qualsiasi esperienza la legge del parallelogramma delle forze.

Ma mentre questa corrente ideale trascina un sì gran numero di studiosi, altri non mancano che si ispirano alle direttive che alla statica aveva fin dalla prima ora segnate Aristotile.

I loro sforzi non si esauriscono in una analisi paziente e minuta dei singoli problemi più o meno complessi, ma tendono piuttosto ad una larga sintesi: essi cercano di abbracciare in certo qual modo col loro sguardo tutti i casi di equilibrio che si incontrano in natura o che l'uomo riesce comunque a realizzare: e tutti questi casi cercano di inquadrare in un principio unico ed universale.

Certo questo principio essi dovranno trarlo da qualche osservazione semplice e spontanea dei fatti naturali: ma l'opera ardita di generalizzazione colla quale essi passano da poche esperienze particolari ad una legge sì ampia e comprensiva, farà necessariamente perdere a questa ogni carattere di evidenza immediata.

Del resto è sempre così: quanto più la scienza, progredendo e sviluppandosi, mette in evidenza la portata vera dei processi logici di cui essa si serve, tanto più riesce chiaro che il grado di certezza che noi attribuiamo alle ipotesi generali su cui una teoria si fonda non può derivare semplicemente da quei pochi fatti particolari che quelle ipotesi hanno suggerite: e si constata che ciò che dà valore alle ipotesi e ci assicura della loro attendibilità è la facilità con cui nella teoria che ne deriva si inquadrano le più diverse leggi che disciplinano i fatti sperimentali, è la sicurezza colla quale questi fatti possono essere dalla teoria anticipatamente previsti.

È sotto questo punto di vista che vanno riguardati i tentativi isolati di Jordanus e dei suoi continuatori, e quelli sistematici di Descartes e di Giovanni Bernouilli, tendenti a precisare e ad estendere sempre più la portata e l'importanza del principio dei lavori virtuali.

Le due tendenze, in apparente continuo conflitto, hanno per vie diverse egualmente contribuito allo sviluppo della statica: ed un osservatore imparziale può facilmente riconoscere la parte che ciascuna di esse ha avuta nella storia di questa scienza. Certo lo spirito critico e l'analisi meticolosa hanno contribuito a sceverare da ogni errore le singole verità che man mano l'uomo andava scoprendo: ma rare e di poco rilievo sono le scoperte ad esso dovute. La fecondità è virtù propria dello spirito di sintesi: ed è al metodo dei lavori virtuali, ed a lui solo, che si deve l'incessante ampliarsi e moltiplicarsi delle teorie che nella statica moderna si inquadrano o che ad essa più o meno direttamente si ricollegano „.

***

Poche osservazioni ci restano ormai a fare.

Noi abbiamo visto che per caratterizzare lo stato di equilibrio di un sistema qualunque Bernouilli immagina di imprimere ad esso " un petit mouvement, soit parallèle à soi-même suivant une direction quelconque, soit autour d'un point fixe quelconque „.

È ben chiaro che egli vuole così indicare gli spostamenti rigidi del sistema: ora questi spostamenti non sono sempre tutti compatibili coi vincoli: e non è neppur detto che fra essi siano sempre compresi tutti gli spostamenti compatibili coi vincoli. Anche negli esempi di Varignon accade a volte di trovar cenno di spostamenti incompatibili coi vincoli, il che richiede naturalmente che si suppongano idealmente soppressi questi vincoli ed introdotte in loro vece le rispettive reazioni: di qui gravi complicazioni dipendenti dal fatto che queste reazioni sono incognite, ed incognito è quindi anche il relativo lavoro virtuale.

Però, tutte le volte che noi abbiamo occasione di studiare un vincolo nel quale sia ben certo che non entrano in gioco resistenze passive di sorta, siamo condotti a constatare che, operata la solita sostituzione ideale del vincolo colla sua reazione, questa riesce sempre diretta normalmente agli spostamenti che il vincolo soppresso consentiva al sistema: sicchè se, dopo di aver liberato il sistema da esso vincolo, ci si limita a considerare spostamenti che con esso siano compatibili, la relativa reazione non compie lavoro alcuno.

Questa proprietà è così caratteristica che si è trovato opportuno assumerla addirittura come definizione di " vincolo senza attrito „: definizione, s'intende, che non ha in sè niente di necessario, che è cioè assolutamente arbitraria: che anzi, se presa alla lettera, escluderebbe senz'altro dalle nostre considerazioni la maggior parte dei vincoli naturali, nei quali è ben difficile, per non dire impossibile, liberarsi completamente dalle resistenze passive in genere e da quelle di attrito in ispecie.

Si tratta al solito di una astrazione che ci condurrà a costruire una teoria limite, il cui immenso valore, come prima approssimazione della realtà, avremo a suo tempo numerose ed eloquenti ragioni di riconoscere.

Per il momento ci basta rilevare come — definiti così i vincoli — vi è la possibilità di evitare tutte le difficoltà e le complicazioni di cui si è fatto cenno poc'anzi, eliminando le reazioni incognite dalla equazione dei lavori virtuali: basta limitarsi a considerare spostamenti che siano con essi vincoli compatibili.

Questa possibilità era probabilmente sfuggita all'attenzione di Bernouilli: in ogni caso egli non si è affatto curato di metterla in rilievo; ma essa costituisce in pratica una ragione di grande superiorità del metodo dei lavori virtuali su tutti gli altri metodi di analisi del problema generale dell'equilibrio: vale quindi la pena che noi ne teniamo esplicito conto nel formularne in modo definitivo l'enunciato.

A tal fine immaginiamo per un momento che i singoli punti di cui consta un sistema materiale comunque complesso, siano resi completamente liberi ed indipendenti gli uni dagli altri mediante l'annullamento dei vincoli che connettono ciascuno di essi al resto del sistema, e la contemporanea introduzione in loro vece delle rispettive reazioni.

È evidente che all'equilibrio del sistema si verrà così a sostituire l'equilibrio dei singoli suoi punti: per ciascuno dei quali, una volta ammesso il principio della composizione delle forze, sarà ovvio ritenere che l'equilibrio sussisterà se, e soltanto se, sarà nulla la risultante di tutte le forze su di esso agenti (siano esse direttamente applicate, ovvero derivanti dai vincoli soppressi).

Ma per un punto libero, come è ora per ipotesi ciascun punto del sistema, dire che la forza risultante è nulla o dire che è nullo il lavoro che questa forza compie per qualunque spostamento immaginabile del punto, è evidentemente la stessa cosa: non si fa cioè che enunciare lo stesso identico fatto sotto due forme differenti.

Limitiamoci ora a considerare, tra tutti gli spostamenti immaginabili, quelli solo che sono piccolissimi e compatibili coi vincoli: son essi che d'or innanzi converremo di chiamare col nome di "spostamenti virtuali"; per essi le reazioni di vincolo non compiono lavoro: dunque per l'equilibrio dovrà riuscir nulla la somma dei lavori delle forze direttamente applicate.

Reciprocamente quando questa condizione è soddisfatta l'equilibrio deve necessariamente aver luogo: altrimenti per ottenerlo occorrerebbe far intervenire delle nuove forze capaci di opporsi agli spostamenti che tenderebbero a prodursi: forze cioè che, per questo particolare sistema di spostamenti, dovrebbero effettuare un lavoro negativo. Si realizzerebbe così un nuovo stato di equilibrio nel quale la condizione, precedentemente dimostrata come necessaria, non sarebbe più realizzata.

Questo ragionamento, basato sull'ipotesi che ogni sistema naturale si possa considerare come l'aggregato di un numero convenientemente grande di punti materiali fra loro connessi da vincoli senza attrito, è, almeno nella sua struttura generale, dovuto a FOURIER (1768-1830): e viene di solito considerato come una vera e propria dimostrazione (nel senso di deduzione dal principio della composizione delle forze) di quello che si conviene allora di chiamare il teorema dei lavori virtuali e che si enuncia così:

“ La condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema materiale soggetto a vincoli senza attrito, è che la somma dei lavori delle forze ad esso direttamente applicate sia nulla per tutti i sistemi di spostamenti virtuali, cioè piccolissimi e compatibili coi vincoli „.

***

Ora poco importa in fondo che lo si chiami “ teorema „ ovvero “ principio dei lavori virtuali „: quello che preme sopratutto è che non si perda di vista che siamo di fronte nè più nè meno che ad una espressione generale delle leggi dell'equilibrio, anzi alla più generale tra le espressioni delle leggi dell'equilibrio.

LAGRANGE (Giuseppe Luigi De La Grange, 1736-1813) non ha esitato ad affermare che qualunque altra espressione delle leggi dell'equilibrio fosse stata scoperta in avvenire, non sarebbe stata altro che il principio stesso dei lavori virtuali diversamente espresso.

Sotto questo punto di vista i ragionamenti di Stevin, di Galileo, di Descartes, di Bernouilli, ecc., per quanto riguardanti soltanto dei casi particolari, sono forse più istruttivi della dimostrazione di Fourier.

Più istruttivo sopratutto, se pure un po' artificioso, è il modo con cui Lagrange stesso cerca di giustificare il principio in discorso deducendolo da quello che egli si compiace di chiamare il principio delle puleggie.

Ecco, brevemente riassunto, il suo ragionamento. Consideriamo un sistema in equilibrio sotto l'azione di un certo numero di forze F_1, F_2, F_3, ecc., oltrechè di certi vincoli rientranti in tutto e per tutto nella categoria sopra definita dei vincoli senza attrito: e supponiamo che si possa determinare una grandezza Q tale che

$$F_1 = 2\,n_1\,Q$$
$$F_2 = 2\,n_2\,Q$$
$$F_3 = 2\,n_3\,Q$$

e così via, n_1, n_2, n_3, ecc. essendo dei numeri intieri.

In queste condizioni immaginiamo, nei punti A, B, C, ... di applicazione delle singole forze, collocate delle puleggie multiple,

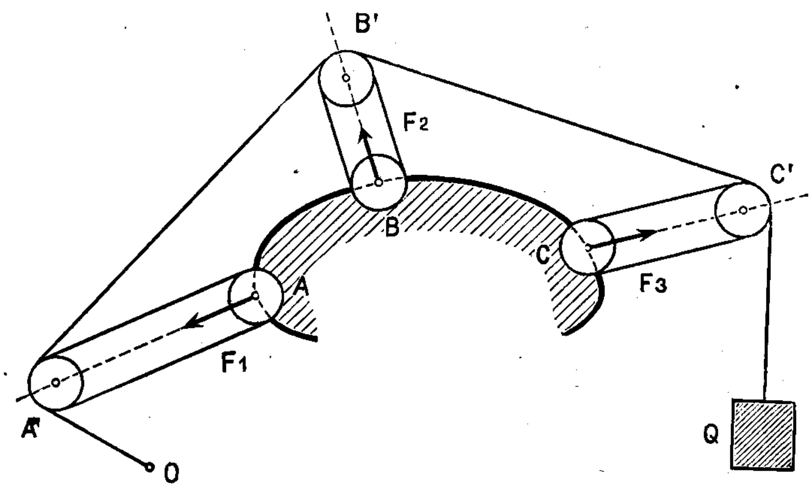

Fig. 37.

e altre identiche collocate in certi punti A′, B′, C′, ... scelti convenientemente sulle linee d'azione delle stesse forze e resi assolutamente fissi nello spazio (fig. 37).

Fissata l'estremità di un lungo filo ad un punto fisso O, facciamolo passare n_1 volte tra A ed A′ in guisa da formare ivi un paranco ad n_1 rami: poi portiamoci in B′ e facciamo passare lo stesso filo n_2 volte tra B e B′ sì da costituire ivi un secondo paranco a n_2 rami: indi andiamo a costituire tra C e C′ un terzo paranco ad n_3 rami: e così via; sospendiamo all'estremità libera del filo un peso eguale a Q.

È evidente che, poichè il filo deve assumere in tutta la sua lunghezza la medesima tensione Q, il meccanismo così costituito diviene capace di rimpiazzare coll'azione di quell'unico peso tutte le forze date.

Ora se, per una data configurazione del sistema, tra tutti i sistemi di spostamenti piccolissimi di cui esso è suscettibile, compatibilmente coi vincoli, ve ne è qualcuno capace di dar luogo ad una discesa del peso Q, questo peso discenderà effettivamente provocando la realizzazione di quel determinato sistema di spostamenti: non vi sarà dunque equilibrio.

Vi sarà invece equilibrio, in quanto nessun movimento tenderà a prodursi, se tutti i predetti sistemi di spostamenti sono tali da lasciare immobile il contrappeso. Ora perchè ciò avvenga è evidente che, detti s_1, s_2, s_3, ecc. gli spostamenti dei singoli punti A, B, C,... misurati nelle direzioni AA′, BB′, CC′,... e tenuto conto del numero dei rami di filo che entrano in ciascun paranco, si deve avere

$$2\,n_1 s_1 + 2\,n_2 s_2 + 2\,n_3 s_3 + \ldots = 0$$

la quale, nelle ipotesi fatte, equivale alla formola

$$F_1 s_1 + F_2 s_2 + F_3 s_3 + \ldots\ldots = 0$$

che evidentemente esprime il principio di cui ci stiamo occupando.

Il lettore avrà notato che Lagrange non considera qui i sistemi di spostamenti che potrebbero dare luogo ad un innalzamento del peso Q; la ragione è subito vista: Lagrange suppone sempre che i vincoli siano bilaterali: che cioè a ciascun sistema di spostamenti con essi compatibile corrisponda sempre, e sia alla sua volta compatibile, il sistema degli spostamenti eguali e contrarii.

È allora evidente che, se il primo sistema desse luogo ad un innalzamento del peso Q, questo secondo darebbe necessariamente origine ad un abbassamento: sicchè l'eventualità rientrerebbe ancora nel primo dei due casi considerati.

Soltanto nell'ipotesi che il sistema fosse soggetto anche a qualche vincolo unilaterale si potrebbe ammettere la possibilità di qualche sistema di spostamenti capace di dare origine ad un innalzamento di Q senza che fosse possibile il sistema degli spostamenti eguali ed opposti.

In questa ipotesi la somma di prodotti testè scritta potrà assumere valori negativi: e tuttavia l'equilibrio continuerà a sussistere, poichè non vi è dubbio che il peso Q tende bensì ad abbassarsi, non mai ad innalzarsi, epperò spostamenti atti a produrre un innalzamento di Q sono da considerarsi come non suscettibili di realizzazione spontanea.

Nel caso dei vincoli unilaterali l'equazione dell'equilibrio dovrà dunque intendersi modificata così:

$$F_1 s_1 + F_2 s_2 + F_3 s_3 + \ldots \leq 0.$$

Un'altra osservazione conviene fare a proposito della dimostrazione di Lagrange, ed è che, per quanto il principio resti da essa stabilito limitatamente al caso in cui le singole forze applicate siano fra loro commensurabili, esso deve intendersi valido anche per forze incommensurabili, la validità potendosi sempre stabilire mediante un noto procedimento di riduzione all'assurdo che i matematici usano in tutti i casi del genere.

***

Ciò posto vediamo di precisare la portata di questa dimostrazione, o meglio di questa giustificazione, che Lagrange dà del principio dei lavori virtuali.

Non v'è dubbio che essa sta solo in quanto si accettino come accertati i due fatti seguenti: se il peso Q può discendere, facendo spostare il sistema a cui il filo lo collega, esso discenderà: se invece non c'è nessun spostamento possibile del sistema che permetta a Q di discendere, tutto resterà in quiete.

Ora ciò vuol dire riportare il problema dell'equilibrio del sistema dato a quello dell'equilibrio del peso Q ed ammettere che perchè questo si verifichi è necessario e sufficiente che sia nullo il lavoro che il peso stesso può compiere in tutti gli spostamenti virtuali permessigli dal vincolo ad esso creato dal filo, dalle puleggie e dal sistema a cui queste sono applicate.

Lagrange dunque per dimostrare il principio dei lavori virtuali in tutta la sua generalità lo ammette in un caso particolare che è indubbiamente ben scelto in quanto è assai accessibile alla nostra intuizione diretta.

Una simile riduzione ad un caso semplice non è evidentemente una dimostrazione del principio, nel senso che si dà alla parola " dimostrazione „ dai matematici, ma merita bene il nome di dimostrazione se ci si mette dal punto di vista del fisico o dell'ingegnere.

" D'altronde — come osserva giustamente Ernst Mach nei suoi saggi critici sullo sviluppo della meccanica — essa è in ogni caso la sola specie di giustificazione di cui un principio come questo sia suscettibile.

Accade quasi sempre, nel progredire della scienza, che un principio nuovo, scoperto studiando un dato fenomeno o una data classe di fenomeni, non sia subito accettato in tutta la sua generalità. È allora naturale che si ricorra a tutti i mezzi e a tutte le vie e a tutti i ragionamenti che possono giustificare la sua generalizzazione: e si fa appello, per rendersi convinti della applicabilità del nuovo principio, a casi diversi, a fatti ed esperienze le più differenti, nelle quali il principio nuovo sia bensì contenuto, ma la cui conoscenza abbia già potuto essere acquisita per altra via.

La scienza, giunta al suo stadio di completa maturità, non deve lasciarsi ingannare da simili procedimenti, ma non deve neppure disconoscerne il valore. Quando, in tutti i fatti osservati, noi ritroviamo sempre, costantemente e chiaramente, confermato un dato principio: quando cioè, anche senza saper dare di esso una dimostrazione assoluta, noi siamo in grado di constatarne quante volte vogliamo la verità, noi compiamo un atto assai più conforme alla concezione logica della natura ammettendolo senz'altro, che non insistendo nella pretesa di dimostrarlo „.

Del resto ragioniamo un momento: che cosa vorrebbe dire dimostrare matematicamente il principio dei lavori virtuali?

Vorrebbe dire dedurlo logicamente da un'altra legge altrettanto generale, ma più evidente o per lo meno più semplice. Ora, diceva argutamente Poinsot, che così facendo si verrebbe a rendere il principio stesso perfettamente inutile perchè tanto varrebbe servirsi senz'altro di quella legge più semplice per dedurre da essa direttamente la teoria generale dell'equilibrio. E d'altra parte a quella legge bisognerebbe pur finir per riconoscere quel carattere di postulato indimostrabile che si voleva evitare di ammettere nel principio prima considerato.

Tutta la questione resta dunque ridotta al riconoscere o meno la opportunità di una simile sostituzione di principii: ed ogni discussione a fondo la quale si imperniasse sulla presunta maggiore o minore semplicità e chiarezza di un principio rispetto ad un altro sarebbe evidentemente oziosa, in quanto semplicità e chiarezza sono in fondo delle cose molto, ma molto relative.

Ciò che bisogna cercare in un principio prima di accoglierlo come punto di partenza di una teoria è piuttosto la generalità: più precisamente la possibilità di comprendere per mezzo suo in una unica formola la risoluzione di tutti i problemi che si possono presentare nei singoli casi particolari, sì da poterne poi fare l'applicazione a questi casi senza bisogno di dover fare per ciascuno di essi un ragionamento da capo.

Ecco che ricompare qui, e questa volta ben precisato, quel concetto della economia del pensiero nei rapporti del quale si è già annunciato che il principio dei lavori virtuali eccelle su tutti gli altri.

***

Ed in verità, sotto questo punto di vista, il principio dei lavori virtuali ha superate tutte le possibili aspettative.

Non soltanto le leggi dell'equilibrio dei solidi si sono trovate in esso compendiate, e la statica, per opera di Lagrange costituita in scienza mirabilmente organica ed ordinata, non ha più avuto bisogno di andare a cercare la risoluzione dei suoi problemi ora nel principio della leva, ora in quello del piano inclinato, ora in quello della composizione delle forze: ma anche le leggi dell'equilibrio dei sistemi deformabili, e quelle ancora dell'equilibrio dei fluidi si sono venute a quell'unico principio ricollegando.

La stessa dinamica, una volta stabilito il principio di D'ALEMBERT ed introdotta la considerazione delle forze di inerzia, ha trovato nel principio dei lavori virtuali e nel metodo di Lagrange la via più semplice e più sicura per giungere, in ciascun caso concreto, alle equazioni differenziali del movimento.

" Da Lagrange in poi — scrive il Duhem quasi a conclusione della sua opera già citata — il metodo dei lavori virtuali si è costantemente rivelato come il metodo ad un tempo più preciso e più generale: quello che tutti i meccanici chiameranno in loro aiuto ogniqualvolta si tratterà di risolvere un dubbio, di superare una difficoltà, di gettare un raggio di luce su di un punto oscuro.

Navier ha bensì ottenute per via diretta le equazioni indefinite dell'equilibrio elastico: ma quando vorrà compire l'opera ed aggiungere alle equazioni indefinite le condizioni ai limiti necessarie per completare la determinazione del problema, lo vedremo riprenderne lo studio col metodo dei lavori virtuali.

Poisson era convinto che lo stato di deformazione elastica di un corpo si potesse nelle condizioni più generali far dipendere da soli 15 coefficienti indipendenti: Cauchy e Lamé sostenevano che quelle costanti erano 36: è facendo uso del procedimento di Lagrange che Green riuscirà a risolvere la questione e a dimostrare che il numero esatto di quei coefficienti è 21.

Laplace ha scoperta l'equazione della superficie capillare, ma i suoi ragionamenti prestano il fianco a qualche dubbio là dove egli cerca di stabilire le leggi che governano il fenomeno in corrispondenza dei punti in cui la superficie libera del liquido si distacca dal tubo: la costanza dell'inclinazione in quei punti è da lui postulata, non dimostrata. Gauss, in un lavoro che offre uno dei più mirabili esempî di applicazione del metodo di Lagrange, riescirà con assoluto rigore e precisione a dedurre dal principio dei lavori virtuali tutto l'insieme delle leggi della capillarità.

Cauchy e Poisson non riescono ad accordarsi nella enunciazione delle condizioni che debbono essere verificate ai bordi di una piastra elastica in equilibrio: l'analisi diretta del problema li conduce a fissare delle condizioni che si rivelano poi sovrabbondanti. E sarà ancora una volta il metodo dei lavori virtuali quello che permetterà a Kirchhoff di scoprire la chiave dell'enigma e di scrivere, senza omissioni nè ripetizioni, le condizioni richieste.

Così si può ben dire che non v'è campo della statica propriamente detta nel quale, alla fine del secolo XIX, il metodo dei lavori virtuali non avesse dimostrato la sua superiorità assoluta.

Ma ecco che nuovi orizzonti, prodigiosamente estesi, vengono d'un tratto a scoprirsi. Non sono più soltanto gli equilibrii meccanici che esso governa, ma quelli altresì che si stabiliscono tra i sistemi magnetizzati od elettrizzati, e quelli ancora che segnano il punto di partenza dei mutameuti di stato fisico e delle reazioni chimiche.

Il piccolo germe di cui abbiamo seguito il lento e laborioso sviluppo non si è contentato di generare la " Mécanique analytique „ di Lagrange: da quello stesso germe derivano ormai anche la meccanica chimica e la meccanica elettrica di GIBBS e di HELMHOLTZ „.