

## SISTEMI CONTENENTI UN NUMERO MAGGIORE DI INCOGNITE IPERSTATICHE

La figura 124 rappresenta una trave combinata con una sospensione la cui risoluzione comporta quattro incognite iperstatiche.

Tutte le volte che un sistema di questo genere si può, mediante soppressione di uno o più vincoli sovrabbondanti, ridurre

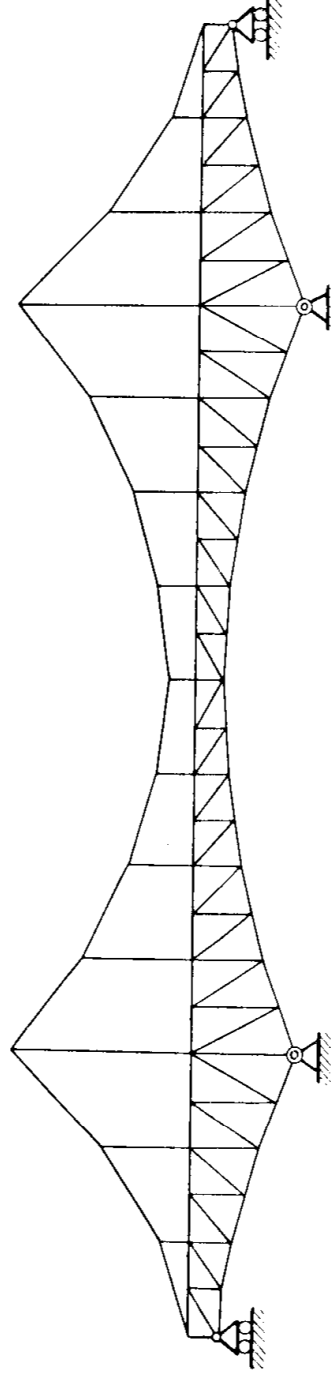
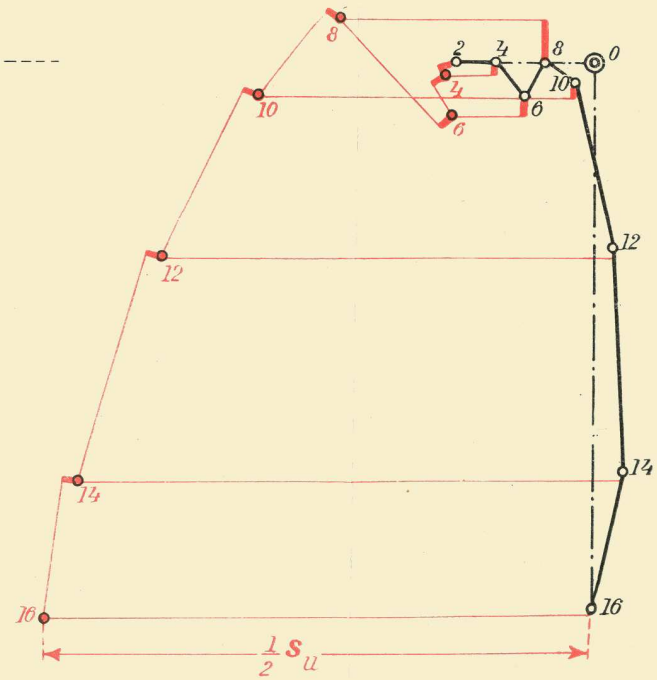
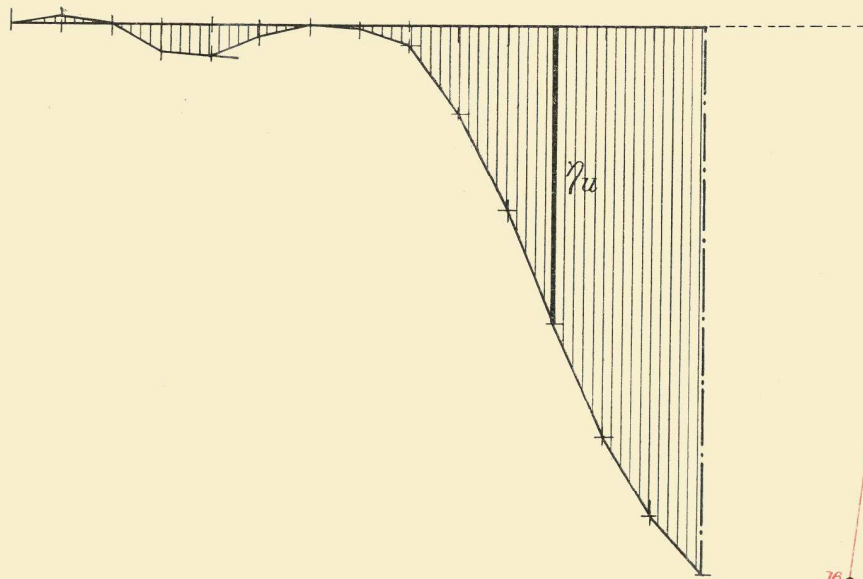
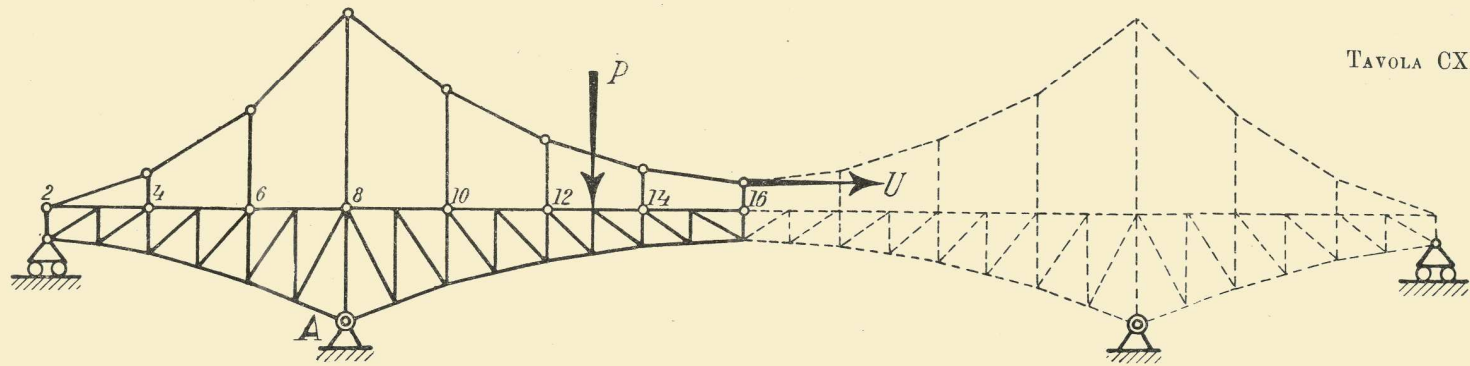


Fig. 124.

ad uno dei tipi che già conosciamo, si può assumere questo tipo come sistema di riferimento — o, come si usa anche dire: come “ sistema principale ” — e riportarsi ad esso facendo dipendere la ricerca delle nuove incognite da quella, supposta già fatta, delle incognite proprie del sistema principale.

Nel caso concreto conviene, evidentemente, assumere come sistema principale quello rappresentato dalla figura 118 e da noi già risolto mediante il tracciamento delle tre linee d'influenza disegnate nelle tav. CXXXIV, CXXXVI, CXXXVIII.

La linea d'influenza dell'ulteriore incognita, per esempio, della tensione orizzontale  $U$  nella catena, si può allora facilmente ottenere come deformata del solito corrente caricato



546 Sistemi contenenti un numero maggiore di incognite iperstatiche

della trave per il solito arretramento unitario del rispettivo vincolo, o, ciò che fa poi lo stesso, per una sollecitazione  $U$  negativa.

Ma la  $U$ , mediante semplicissime costruzioni di statica dei sistemi rigidi, del tipo di quelle rappresentate nella tav. CXLII, si può sempre evidentemente rimpiazzare con un ben determinato sistema di forze

$$U_2, U_4, U_6, \dots, U_{16}$$

applicate alla trave principale, in funzione delle quali noi sappiamo determinare i valori delle incognite iperstatiche  $X, Y, Z$ .

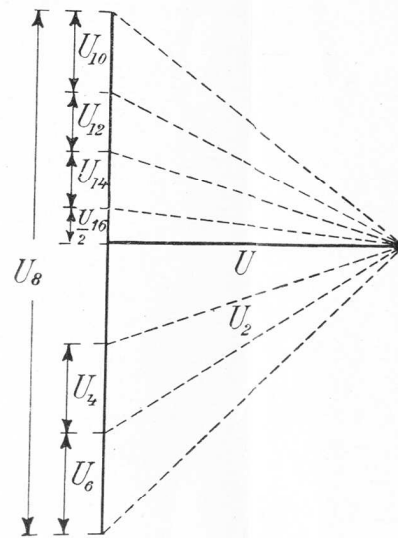
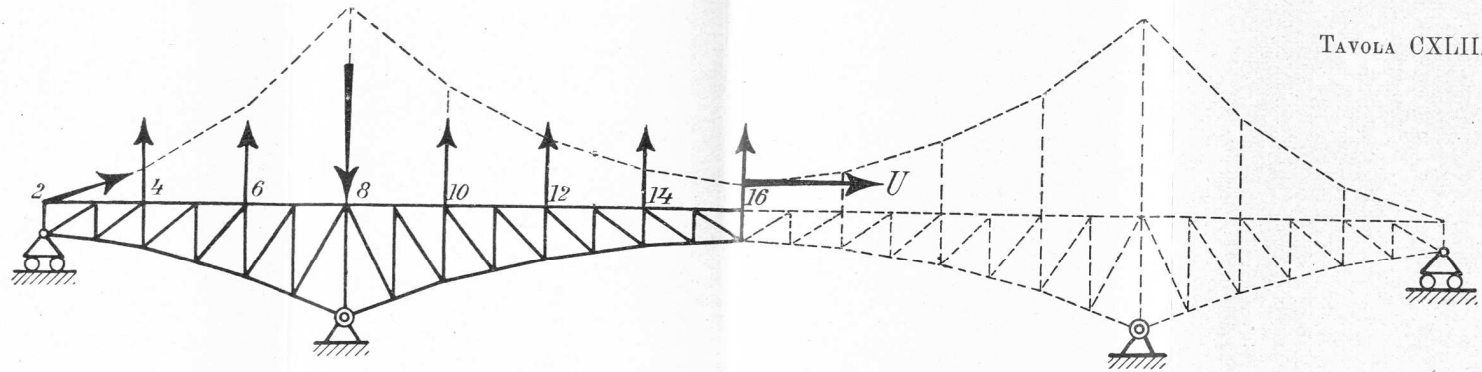
Calcolati pertanto, per la proposta sollecitazione  $U$  negativa, gli sforzi nelle aste, le relative variazioni di lunghezza, i conseguenti spostamenti dei nodi, si potrà senz'altro tracciare la linea d'influenza della  $U$ , che avrà l'andamento indicato nella tav. CXXLI.

Nella stessa tavola si vede costruita in rosso la deformata della sospensione che occorre conoscere per poter determinare la grandezza dell'arretramento effettivamente impresso al vincolo, cioè l'unità di misura in base a cui la linea d'influenza va letta.

Per una condizione generica di carico  $P=1$  si avrà così

$$U = \frac{\eta_u}{\mathbf{s}_u}$$

Quanto alle  $X, Y, Z$  che accompagnano questa  $U$  è evidente che esse si potranno leggere sulle rispettive linee di influenza del sistema triplamente iperstatico assunto come principale, purchè ad esso si immagini applicata la sollecitazione complessiva risultante dalla coesistenza della  $P$  e della  $U$ .



Ma vi sono dei casi in cui questa divisione delle incognite iperstatiche in due gruppi — di cui uno viene eliminato nella riduzione al sistema principale, e l'altro permane anche in questo sistema — non è consigliabile.

Convienne allora riprendere la via maestra indicata dal secondo principio di reciprocità, costruire cioè la linea di influenza di una qualunque delle incognite come deformata del sistema nel-

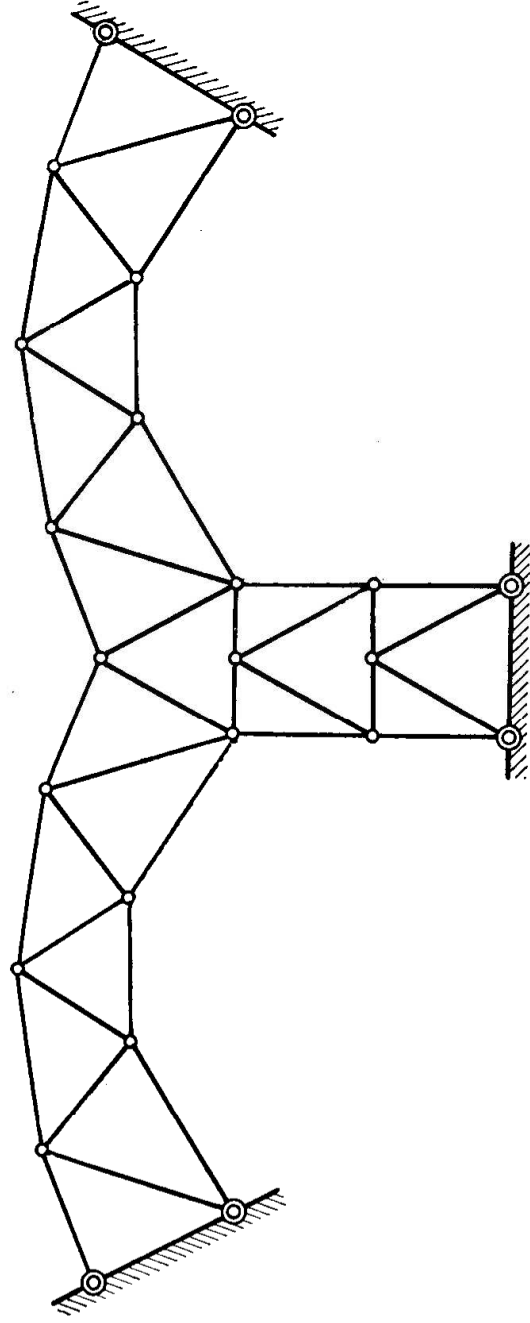


Fig. 125.

l'ipotesi di un arretramento unitario del relativo vincolo, supposti mantenuti in efficienza tutti i vincoli rimanenti.

Nè è detto che per far ciò occorra proprio costruire un diagramma di Williot per un sistema contenente tante incognite iperstatiche quante sono quelle del sistema dato meno una, sicchè la effettiva costruzione grafica debba necessariamente essere preceduta dalla risoluzione analitica di un simile problema iperstatico.

In virtù del principio di sovrapposizione degli stati di equilibrio la variazione di configurazione di cui ci stiamo occupando si può infatti sempre considerare come il risultato della sovrapposizione di tante variazioni di configurazioni elementari quante sono le incognite iperstatiche nel sistema dato, ciascuna delle quali si può costruire immaginando applicato il solito metodo

dell'arretramento di uno dei vincoli nell'ipotesi che tutti gli altri vincoli siano momentaneamente soppressi.

In altre parole, la deformata che noi andiamo cercando si può sempre ottenere per combinazione lineare di tante deformate di un sistema principale staticamente determinato, quanti sono i vincoli sovrabbondanti nel sistema dato.

Al solito, invece di soffermarci sopra una dimostrazione teorica generale, preferiamo riferirci senz'altro ad un caso concreto, e scegliamo il più tipico fra tutti: il caso cioè del sistema reticolare a tre incastri rappresentato nella figura 125, la cui risoluzione dipende evidentemente da sei incognite iperstatiche: più precisamente da due terne di incognite iperstatiche.

Assumiamo come incastri sovrabbondanti gli incastri di estremità, sinistro e destro. Immaginiamo il sistema liberato da entrambi e così reso staticamente determinato.

Rispetto a ciascuno di quegli incastri sovrabbondanti si può evidentemente ripetere tutto quello che noi abbiamo detto a proposito dell'arco (pagg. 512 e segg.).

Si verranno così a definire due terne di incognite iperstatiche

$$\begin{array}{ccc} X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{array}$$

ciascuna delle quali, se esistesse da sola, potrebbe venir studiata coi metodi indicati in quella occasione.

Ora, i diagrammi di influenza che per ciascuna terna, sempre supposta esistente da sola, noi sappiamo tracciare a mezzo di diagrammi di Williot del sistema principale staticamente determinato, si trovano rappresentati, nei loro elementi essenziali (con particolare riferimento al corrente superiore della trave), nella tav. CXLIII.

Essi servono a fornirci i valori delle singole incognite di ciascuna terna (sempre supposta esistente da sola) per una condizione affatto qualunque di carico, quindi in particolare anche per quelle specialissime sollecitazioni che occorre prendere in considerazione allorquando, ripristinata una delle terne, si vuole valersi del secondo principio di reciprocità per tracciare le linee di influenza delle tre incognite dell'altra terna.

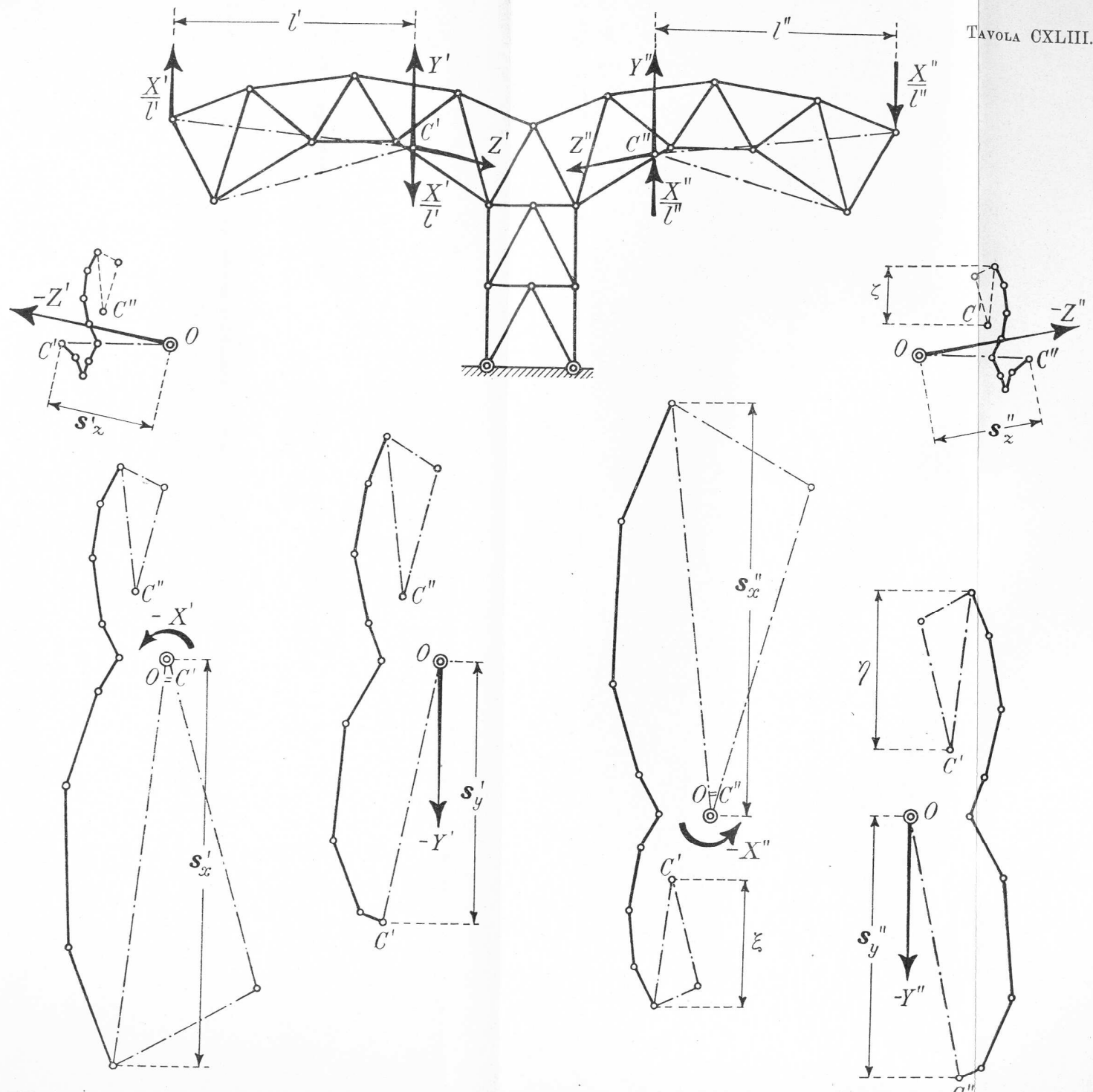
Supponiamo infatti, tanto per precisar le idee, ripristinato l'incastro sovrabbondante destro, ed accingiamoci allo studio

delle incognite relative all'incastro sinistro supponendo che la scelta di esse venga fatta colle norme indicate a pag. 513 come necessarie e sufficienti perchè le tre rispettive linee d'influenza riescano indipendenti.

In un primo tempo si dovrà imporre una rotazione negativa dell'elemento terminale del sistema attorno al baricentro elastico  $C$  (incognito). A ciò si giunge supponendo applicata la sollecitazione  $-X$  nelle condizioni indicate nella tav. CXLIV, o, ciò che fa esattamente lo stesso, la sollecitazione  $-X'$  già indicata nella tav. CXLIII, accompagnata, ben s'intende, dalla reazione dell'incastro destro, i cui parametri colle notazioni di detta tavola si possono esprimere sotto la forma

$$\begin{aligned} \frac{X''}{l''} &= \frac{X'}{l'} \cdot \frac{\xi}{s''_x} \\ Y'' &= \frac{X'}{l'} \cdot \frac{\eta}{s''_y} \\ Z'' &= \frac{X'}{l'} \cdot \frac{\zeta}{s''_z} \end{aligned}$$

Se pertanto si considerano i vettori costituenti il diagramma di deformazione relativo alla sollecitazione  $-X'$  e ad essi si sommano *geometricamente* i corrispondenti vettori costituenti il diagramma di deformazione relativo alla sollecitazione  $-X''$  moltiplicati per il valore di  $X''$  trovato qui sopra, poi ai vettori risultanti si sommano *geometricamente* i corrispondenti vettori costituenti il diagramma di deformazione relativo alla sollecitazione  $-Y''$  moltiplicati per il valore di  $Y''$  trovato qui sopra, e finalmente ai nuovi vettori risultanti si sommano *geometricamente* i corrispondenti vettori costituenti il diagramma di deformazione relativo alla sollecitazione  $-Z''$  moltiplicati per il valore di  $Z''$  trovato qui sopra, i vettori che così si verranno ad ottenere rappresenteranno in grandezza, direzione e senso gli spostamenti dei singoli nodi per la complessiva sollecitazione considerata, e costituiranno perciò il diagramma di deformazione per la sollecitazione  $-X$  quando si immagina ricostituito l'incastro sovrabbondante destro.





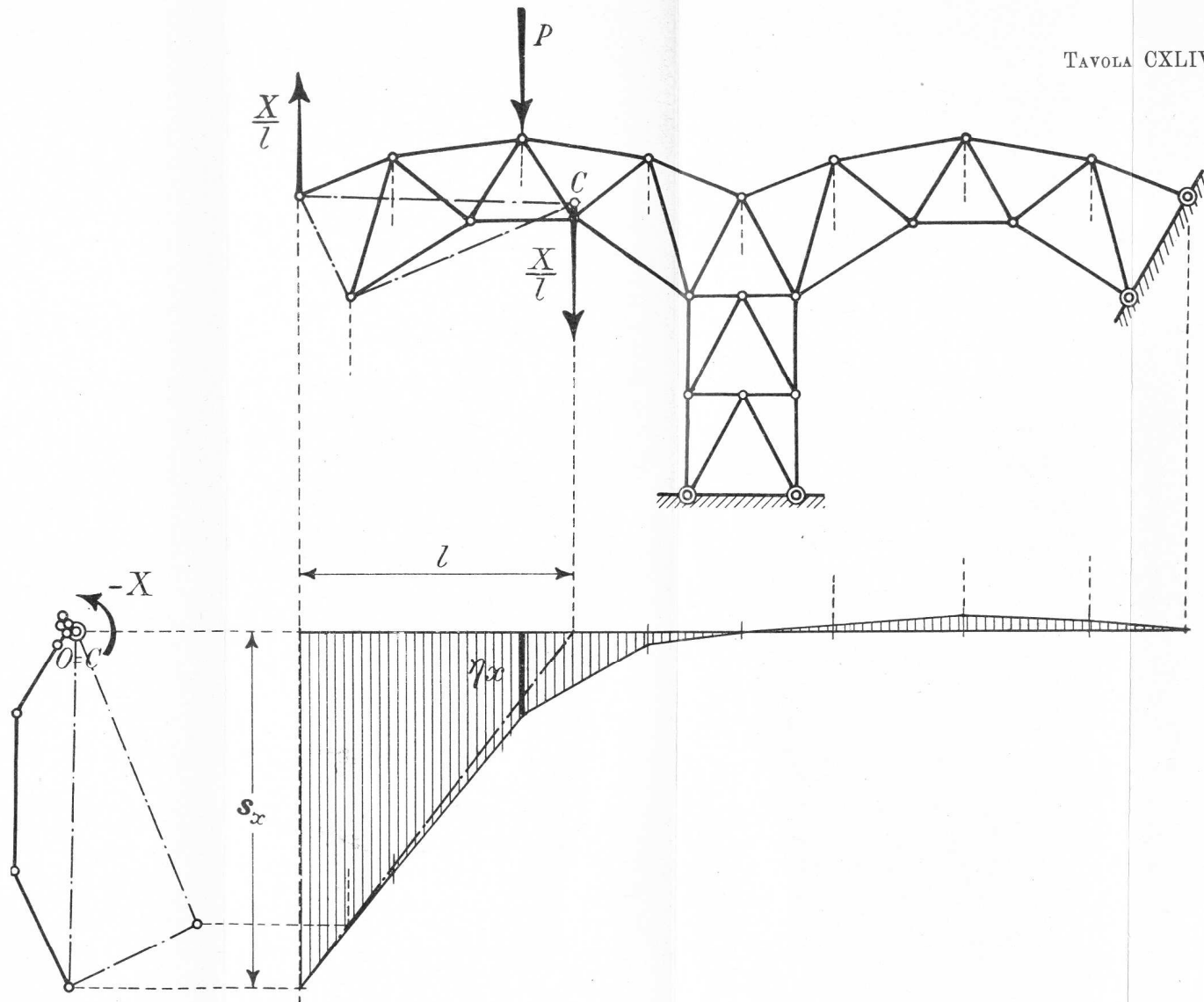
552 Sistemi contenenti un numero maggiore di incognite iperstatiche

Tale diagramma di deformazione si trova riprodotto (limitatamente ai soliti elementi essenziali, concernenti il corrente superiore della travatura) nella tav. CXLIV.

Da esso si sono dedotte così la posizione del centro  $C$  come l'andamento della linea d'influenza di  $X$  per carichi verticali applicati al detto corrente superiore della travatura.

Supposto che la condizione di carico esterna si riduca ad un'unica forza verticale  $P=1$ , si ha

$$\frac{X}{l} = \frac{\eta x}{S_x}$$



Con un procedimento affatto analogo si troveranno i diagrammi di deformazione e quindi le linee d'influenza relative agli altri due parametri  $Y$  e  $Z$  della reazione dell'incastro sinistro.

Essendo infatti ormai nota la posizione del punto  $C$ , e supposto che la  $Y$  venga come d'uso assunta con direzione verticale (epperò parallela alla  $Y'$ ) si avrà il secondo diagramma di deformazione per combinazione *geometrica* dei diagrammi relativi alle sollecitazioni

$$X', Y', X'', Y'', Z''$$

Determinata poi, in base a questo secondo diagramma, la direzione da attribuirsi alla  $Z$  (direzione che sarà in generale diversa da quella della  $Z'$ ), si passerà alla costruzione del terzo diagramma di deformazione per combinazione *geometrica* dei diagrammi relativi alle sollecitazioni

$$X', Y', Z', X'', Y'', Z''$$

Questi due diagrammi, insieme colle linee d'influenza per carichi verticali applicati al corrente superiore della travatura (che da essi si deducono per proiezione orizzontale) si trovano disegnati nella nostra tav. CXLV.

Per essi, quando si supponga che la condizione di carico sia la solita  $P=I$ , valgono le relazioni

$$Y = \frac{\eta_y}{s_y}$$

$$Z = \frac{\eta_z}{s_z}$$

Si è così ridotti, per quel che riguarda le incognite della terna relativa all'incastro sinistro, alle equazioni stesse che abbiamo avuto occasione di scrivere quando trattavamo il problema dell'arco.

Ma il paragone dell'andamento delle linee d'influenza ora trovate coll'andamento di quelle trovate in quell'occasione, serve più di qualunque discorso a mettere in evidenza il carattere e l'importanza degli effetti della continuità del sistema e della molteplicità dei vincoli.

