

SISTEMI TRIPLAMENTE IPERSTATICI

Il caso tipico è quello dell'arco incastrato ad entrambi gli estremi (fig. 110).

La impostazione più ovvia del problema sembrerebbe quella a cui si giunge immaginando tracciata attraverso l'arco una

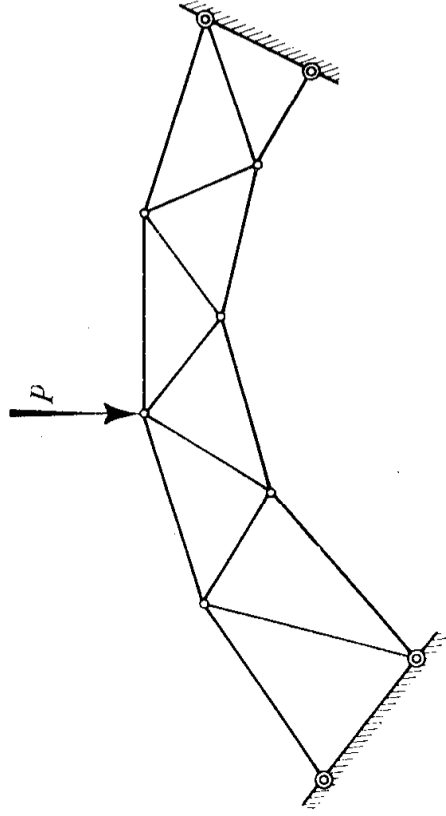


Fig. 110.

sezione la quale interessi tre aste non concorrenti in un punto, ed assumendo gli sforzi in quelle tre aste come incognite iperstatiche. Se le tre aste sezionate sono quelle di vincolo che fanno capo ad una delle spalle, per esempio alla spalla destra, il problema si presenta nei termini schematicamente indicati nella fig. 111.

Ma questo genere di soluzione riesce in pratica assai laborioso perchè le tre linee di influenza delle X , Y , Z non sono in generale tra loro indipendenti: ciascuna di esse è cioè la defor-

mata di un sistema reticolare doppiamente iperstatico, nel quale i valori delle due incognite non sono, generalmente parlando, nulli.

Se si vuole che i valori di queste incognite si annullino identicamente, e che perciò le linee di influenza cercate si possano direttamente costruire come deformate di un sistema reticolare staticamente determinato, bisogna fare in modo che il

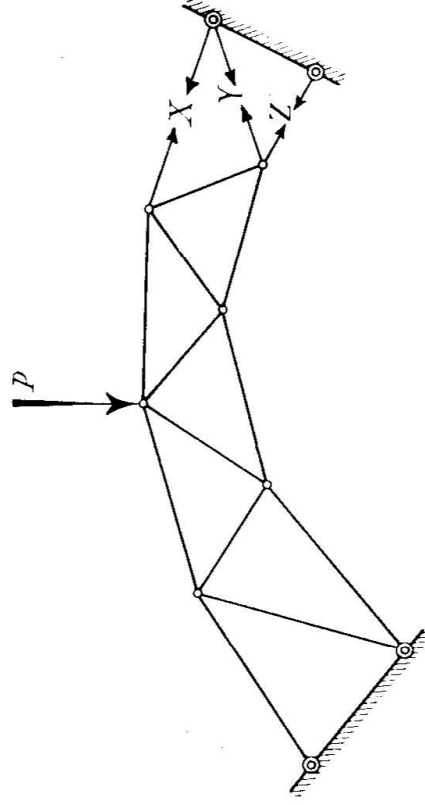


Fig. 111.

sistema di equazioni a cui si giunge considerando le X , Y , Z come operanti separatamente le une dalle altre, e che è del tipo

$$\begin{aligned}\eta_{xx}X + \eta_{yx}Y + \eta_{zx}Z &= \eta_x \\ \eta_{xy}X + \eta_{yy}Y + \eta_{zy}Z &= \eta_y \\ \eta_{xz}X + \eta_{yz}Y + \eta_{zz}Z &= \eta_z\end{aligned}$$

si riduca a tre equazioni indipendenti del tipo

$$\begin{aligned}X &= \frac{\eta_x}{\eta_{xx}} \\ Y &= \frac{\eta_y}{\eta_{yy}} \\ Z &= \frac{\eta_z}{\eta_{zz}}\end{aligned}$$

per il che è necessario e sufficiente che siano verificate le tre equazioni di condizione

$$\begin{aligned}\eta_{xy} &= \eta_{yx} = 0 \\ \eta_{yz} &= \eta_{zy} = 0 \\ \eta_{zx} &= \eta_{xz} = 0\end{aligned}$$

Immaginiamo composte le tre forze X , Y , Z della figura 111 in un'unica risultante R ; questa, presa col debito segno e supposta applicata all'asta rigida $M \cdot N$ con cui conviene immaginar terminata la travatura quando si prescinde dalla esistenza della spalla destra (fig. 112), prende il nome di *reazione della spalla destra* e può considerarsi come la vera e propria incognita del problema.

Ma è evidente che a definire in grandezza, direzione, senso e linea d'azione questa risultante possono servire le tre tensioni

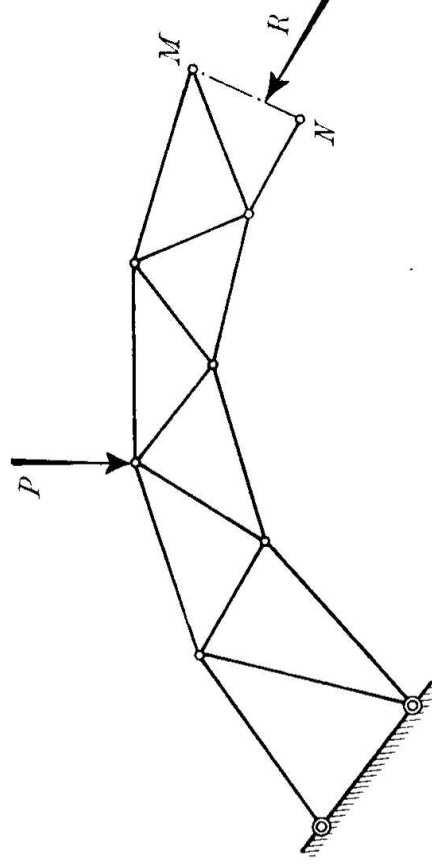


Fig. 112.

X , Y , Z della fig. 111, come possono servire le sue tre componenti secondo tre altre qualunque rette del piano, purchè al solito non concorrenti in un punto.

Supponiamo che una di queste rette a (fig. 113) sia stata scelta ad arbitrio; e che per rapporto ad una forza qualunque avente tale retta per linea d'azione siano stati calcolati gli sforzi nelle aste, le conseguenti variazioni di lunghezza, e finalmente gli spostamenti dei nodi. Sia A il punto del piano attorno a cui viene a ruotare l'asta terminale $M \cdot N$ in questa variazione di configurazione del sistema.

Supponiamo poi che per linea d'azione di una seconda componente si scelga una retta b passante per A . Poichè questa seconda componente non fa alcun lavoro nella variazione di configurazione determinata dalla prima, questa non dovrà alla sua volta far lavoro nella variazione di configurazione determinata dalla seconda.

La seconda variazione di configurazione dovrà dunque dar luogo ad una rotazione dell'asta terminale attorno ad un punto B appartenente alla retta a .

Supponiamo per ultimo che per linea d'azione c della terza componente si scelga precisamente la congiungente $A \cdot B$. Si dimostra subito, nel modo stesso testè indicato, che la variazione

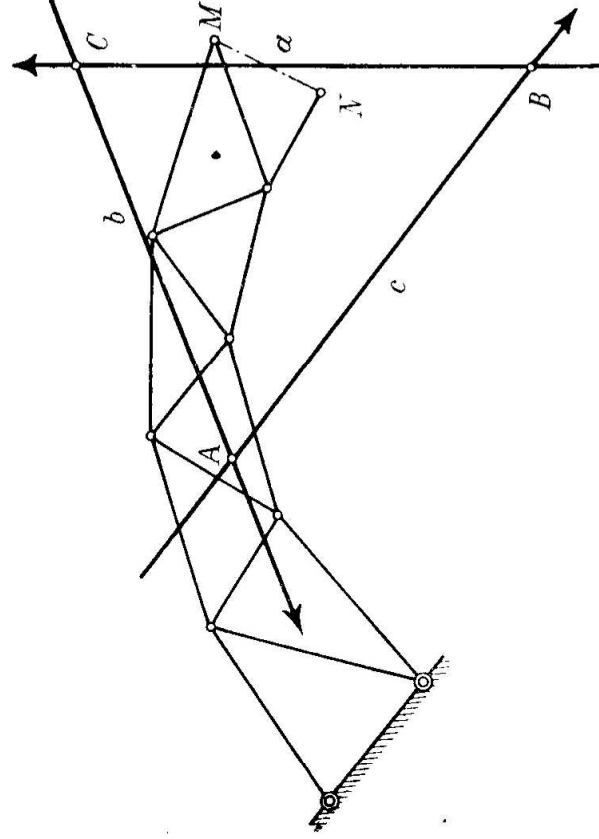


Fig. 113.

di configurazione determinata da questa terza componente deve dar origine ad una rotazione dell'asta terminale attorno ad un punto C che, dovendo appartenere tanto ad a che a b non può che coincidere col punto intersezione di queste due rette.

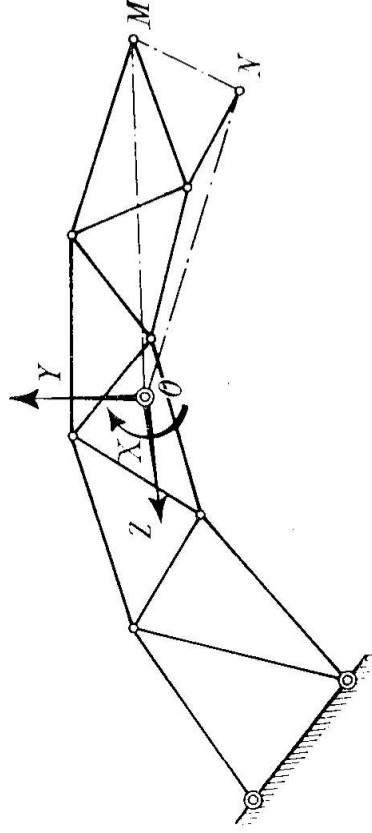


Fig. 114.

Noi sappiamo già che i triangoli di questo genere — in cui ogni vertice è centro di rotazione dell'asta terminale nella variazione di configurazione definita da una forza avente per linea d'azione il lato opposto — sono autocongiugati rispetto all'ellisse terminale di elasticità del sistema.

Sappiamo anche che tra gli infiniti (∞^3) triangoli autocongiunti ve ne è una semplice infinità caratterizzata dal fatto che in essa ciascuno dei triangoli ha per uno dei suoi lati la retta all'infinito del piano, per vertice opposto il baricentro elastico e per altri due lati due diametri coniugati dell'ellisse.

Supposto il baricentro elastico O rigidamente connesso all'asta terminale mediante due aste $M \cdot O$ ed $N \cdot O$ (fig. 114) si dovranno allora assumere come parametri della reazione R , e quindi come incognite iperstatiche del sistema, il momento X

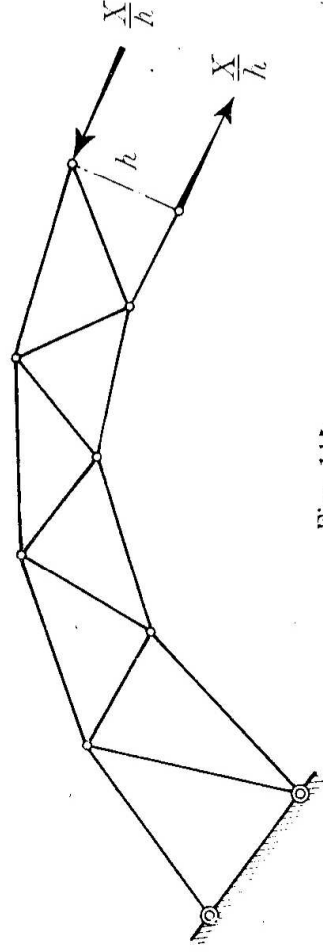


Fig. 115.

della reazione rispetto a O e le due componenti Y e Z di essa secondo i predetti diametri.

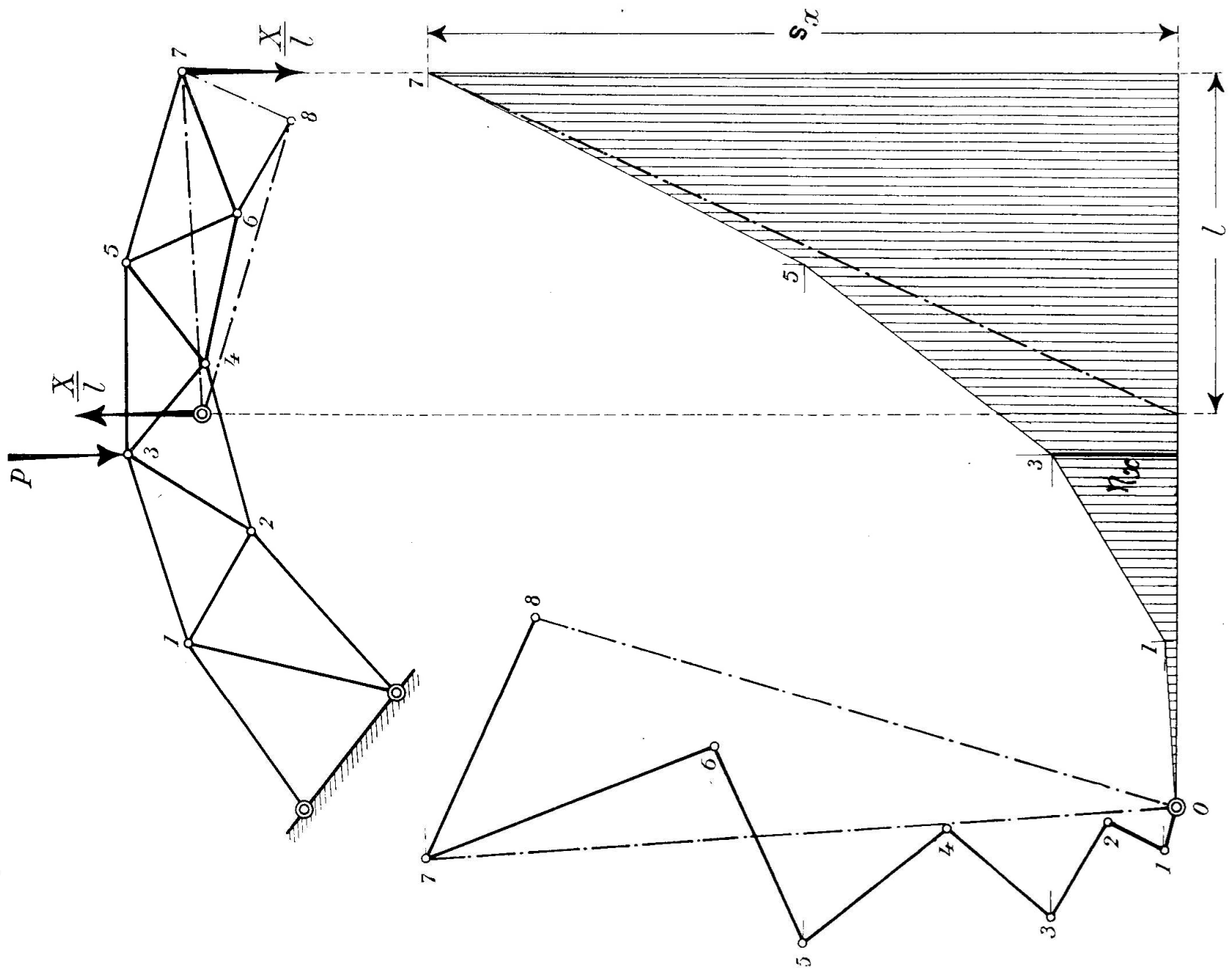
In pratica le operazioni si condurranno nel modo e nell'ordine seguente:

1° Rotazione dell'asta terminale attorno al baricentro elastico (ancora sconosciuto) della travatura resa staticamente determinata per soppressione della spalla destra.

Si può immaginare applicata all'asta terminale una coppia di momento negativo in uno qualunque degli infiniti modi in cui la coppia stessa può essere realizzata: per esempio, mediante due forze parallele e di senso contrario applicate ai due nodi che l'asta terminale collega: se h è la lunghezza dell'asta terminale e le due forze si suppongono dirette normalmente all'asta, la loro comune grandezza dovrà naturalmente essere $\frac{X}{h}$ ed il senso quello indicato nella fig. 115.

In funzione di queste forze si calcoleranno gli sforzi nelle aste, le loro variazioni di lunghezza, e finalmente gli spostamenti dei nodi; questi sono rappresentati nella nostra tav. CXXIX unitamente alla deformata verticale del corrente superiore della trave.

TAVOLA CXXIX.



Conducendo dai nodi 7 ed 8 le normali alle direzioni degli spostamenti rispettivi si trova immediatamente la posizione del baricentro elastico. Facendo il rapporto tra la grandezza di uno di quegli spostamenti (letto nella scala adottata per la costruzione del diagramma di Williot) e la distanza del relativo nodo dal baricentro elastico (da leggersi nella scala impiegata per disegnare la travatura) si ottiene l'ampiezza della rotazione impressa all'asta terminale. Allo stesso risultato si arriva calcolando il valore del rapporto

$$\frac{\mathbf{s}_x}{l}$$

È noto che per la corretta applicazione del secondo principio di reciprocità tale valore dovrebbe essere eguale all'unità. Se ciò non è, la prima delle equazioni risolventi dovrà scriversi

$$X = \frac{\eta_x}{\frac{\mathbf{s}_x}{l}}$$

ossia

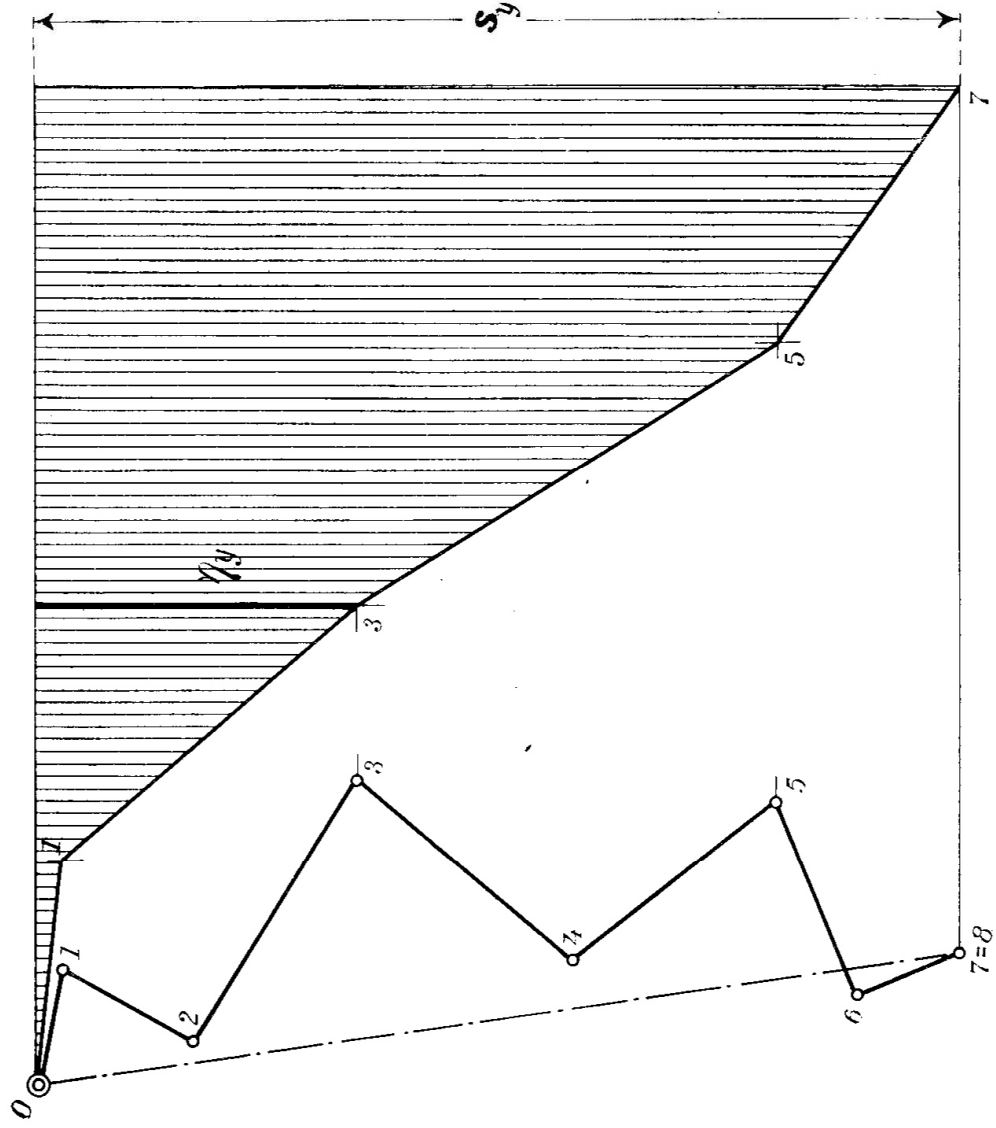
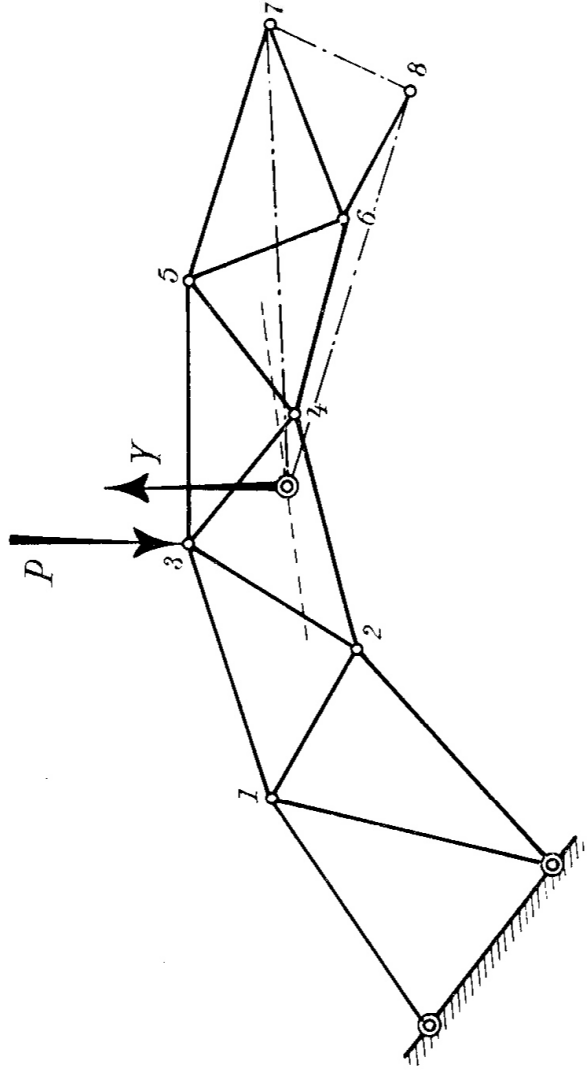
$$\frac{X}{l} = \frac{\eta_x}{\mathbf{s}_x}$$

Ciò vuol dire che se si immagina realizzata la coppia di momento X mediante due forze, naturalmente eguali e contrarie, applicate verticalmente l'una al nodo 7 e l'altra al baricentro elastico del sistema, la grandezza comune di queste forze per una qualsiasi condizione di carico $P=1$ è rappresentata dall'ordinata intercetta dalla linea d'influenza tracciata sulla verticale di P letta assumendo per unità di misura l'analoga ordinata intercetta sulla verticale per 7.

2° Traslazione dell'asta terminale in una direzione arbitraria. Basta immaginare il sistema reticolare sollecitato da una forza qualunque purchè avente una linea d'azione passante per il baricentro elastico. Nella tav. CXXX si è assunta tale linea d'azione verticale; in basso a sinistra si vede disegnato (per una Y negativa) il diagramma di deformazione; da esso è stata dedotta per proiezione la deformata verticale del corrente superiore. Colle notazioni della figura si ha per la seconda incognita il valore

$$Y = \frac{\eta_y}{\mathbf{s}_y}$$

TAVOLA CXXX.



3° Traslazione dell'asta terminale in direzione normale alla Y . Basta assumere come nuova sollecitazione una forza applicata al baricentro elastico e diretta normalmente allo spostamento $0.7=0.8$ trovato nella tav. CXXX. Si ottengono allora (per una Z negativa) il diagramma di deformazione e la deformata verticale rappresentati nella tav. CXXXI.

Per la solita condizione di carico $P=1$ si ha, colle notazioni della figura

$$Z = -\frac{\eta_2}{s_2}$$

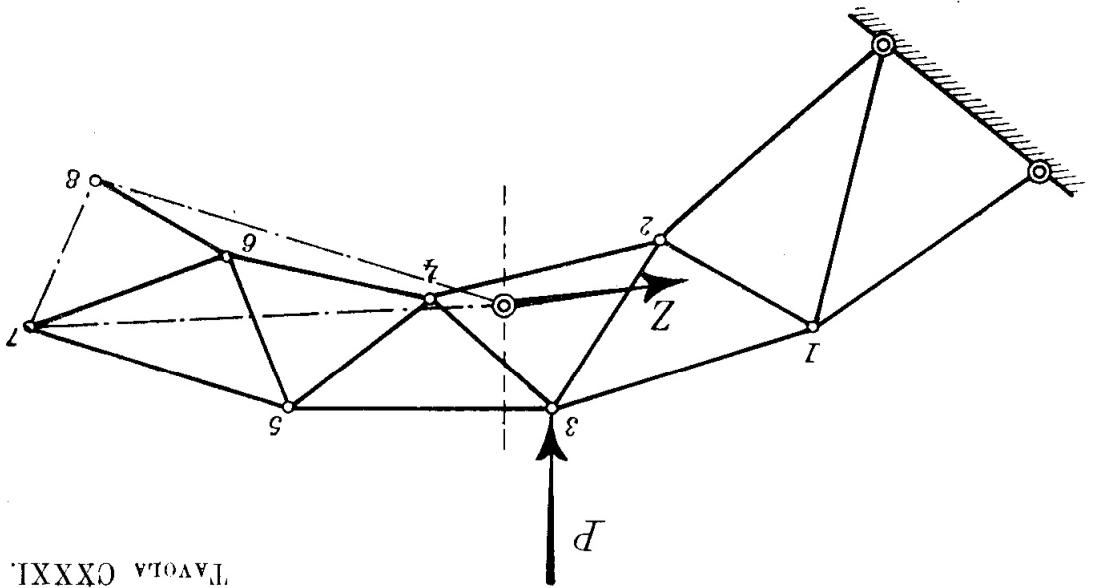
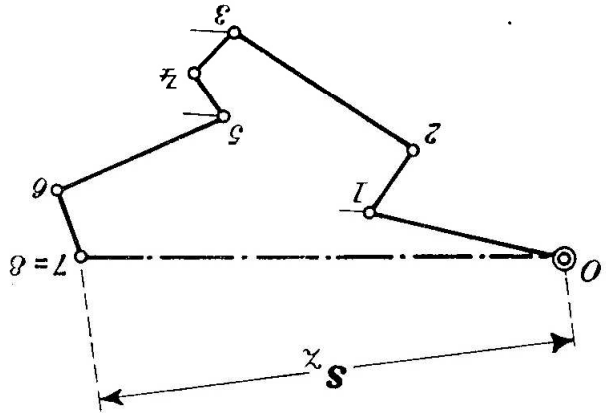
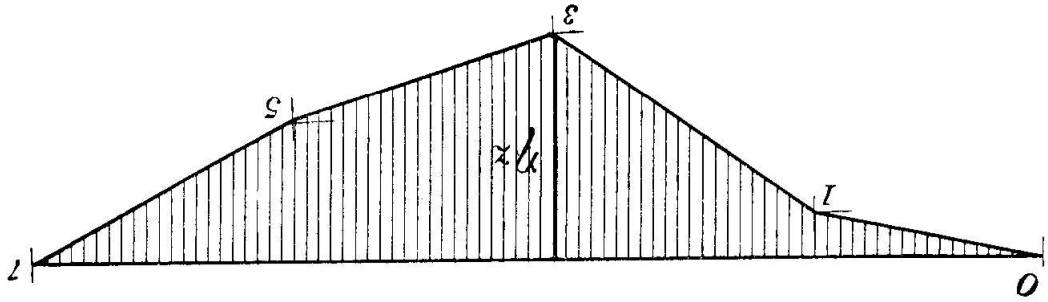
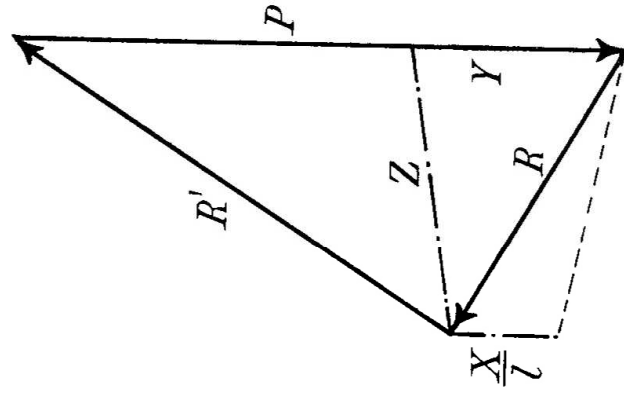
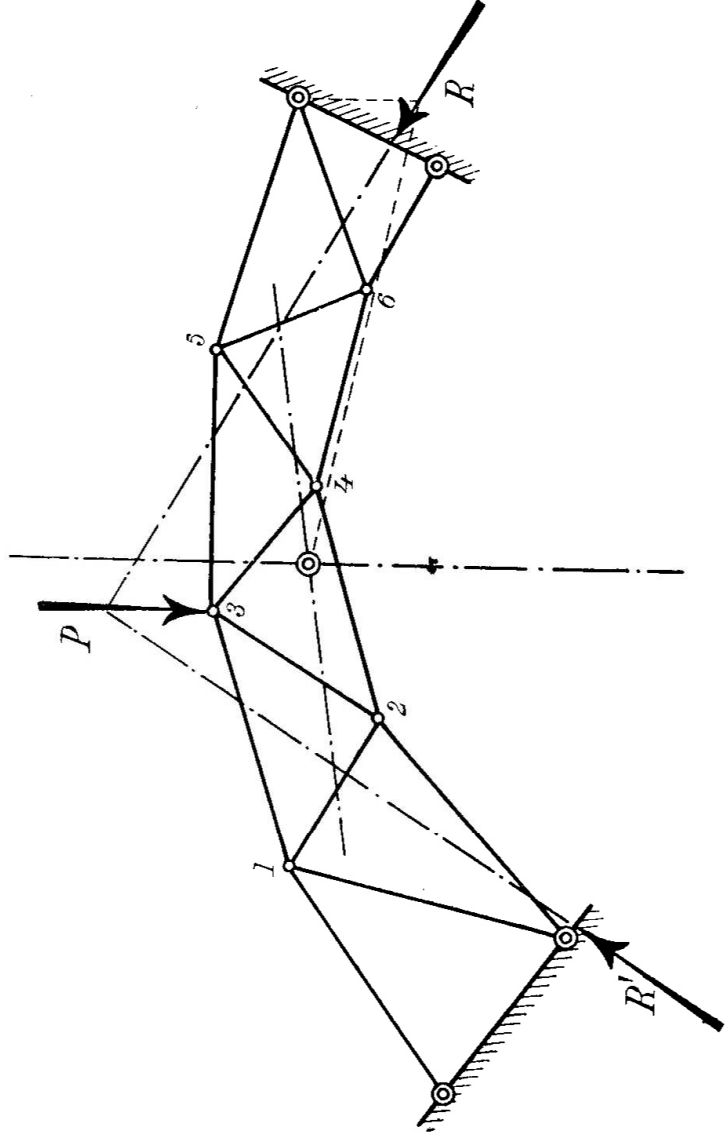


TABLE XXXI

Nella tav. CXXXXII questi risultati sono stati utilizzati per la determinazione, in grandezza, direzione, senso e linea d'azione, della reazione incognita R .

L'altra reazione R' è staticamente determinata in conseguenza.

TAVOLA CXXXII.



Una serie di esempi, la quale si presta bene a riassumere in sé i vari casi e le differenti eventualità che noi siamo venuti fin qui prospettando, è quella rappresentata nelle nostre figure 116, 117 e 118.

Si tratta, in sostanza, di una trave continua simmetrica a tre luci, la quale in un primo caso (fig. 116) è munita di un solo punto

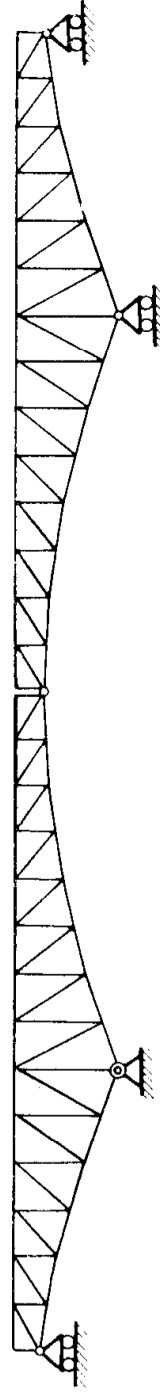


Fig. 116.

fisso e di tre appoggi semplici (aste verticali o carrelli scorrevoli su piani orizzontali); essa è inoltre dotata di una articolazione a cerniera in mezzera della campata centrale; in queste condizioni il sistema comporta evidentemente una sola incognita iperstatica.

Nel secondo caso (fig. 117), ferme restando le condizioni di vincolo esterno sopra descritte (un punto fisso e tre appoggi

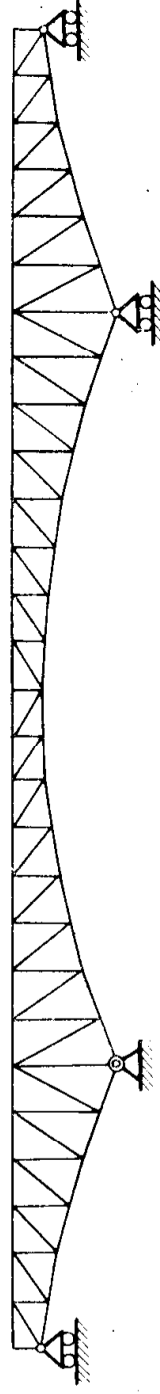


Fig. 117.

semplici), manca la cerniera in mezzera; è questo il caso tipico della classica trave continua a quattro appoggi; le incognite iperstatiche sono notoriamente due.

Finalmente nel terzo caso (fig. 118) i punti fissi sono portati a due, e due restano gli appoggi semplici: la campata centrale prende a funzionare come un arco; il sistema viene a dipendere da tre incognite iperstatiche.

Il paragone tra i tre casi è singolarmente interessante in quanto è possibile, con una oculata scelta delle incognite, risol-

vere i tre problemi iperstatici l'uno dopo l'altro in modo che i risultati ottenuti nello studio di uno di essi riescano, tali quali sono, immediatamente e direttamente utilizzabili per la risoluzione degli altri.

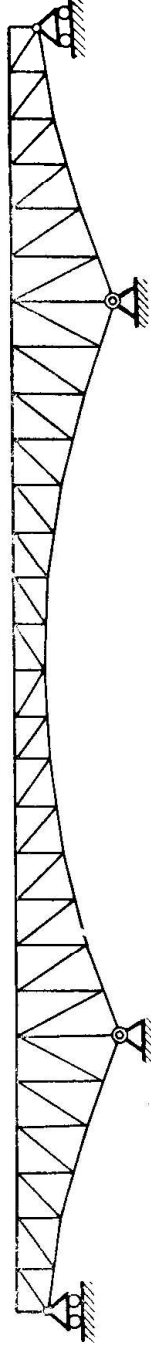


Fig. 118.

Con che ci riuscirà possibile mettere in evidenza l'influenza che l'aggiunta o la soppressione di un determinato vincolo sovrabbondante ha sul regime degli sforzi interni in generale, ed in particolare sulla forma della linea d'influenza relativa ad uno qualunque di questi sforzi.

**

Incominciamo col considerare il sistema semplicemente iperstatico rappresentato nella figura 116.

È naturale considerare come sovrabbondante il vincolo creato dalla cerniera in mezziera: più precisamente, la componente verticale della relativa reazione, in quanto la componente orizzontale riesce invece staticamente determinata.

Designeremo con Y questa componente verticale e converremo, tanto per fissar le idee, di considerarla come positiva allorché la reazione trasmessa dalla semitrave destra alla sinistra è diretta verso l'alto.

Nella tav. CXXXIII la linea d'influenza dell'incognita Y è stata tracciata come deformata del corrente superiore della trave per il solito arretramento unitario del vincolo.

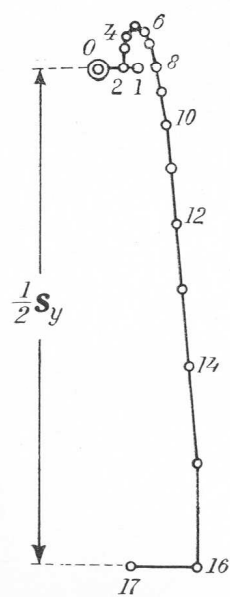
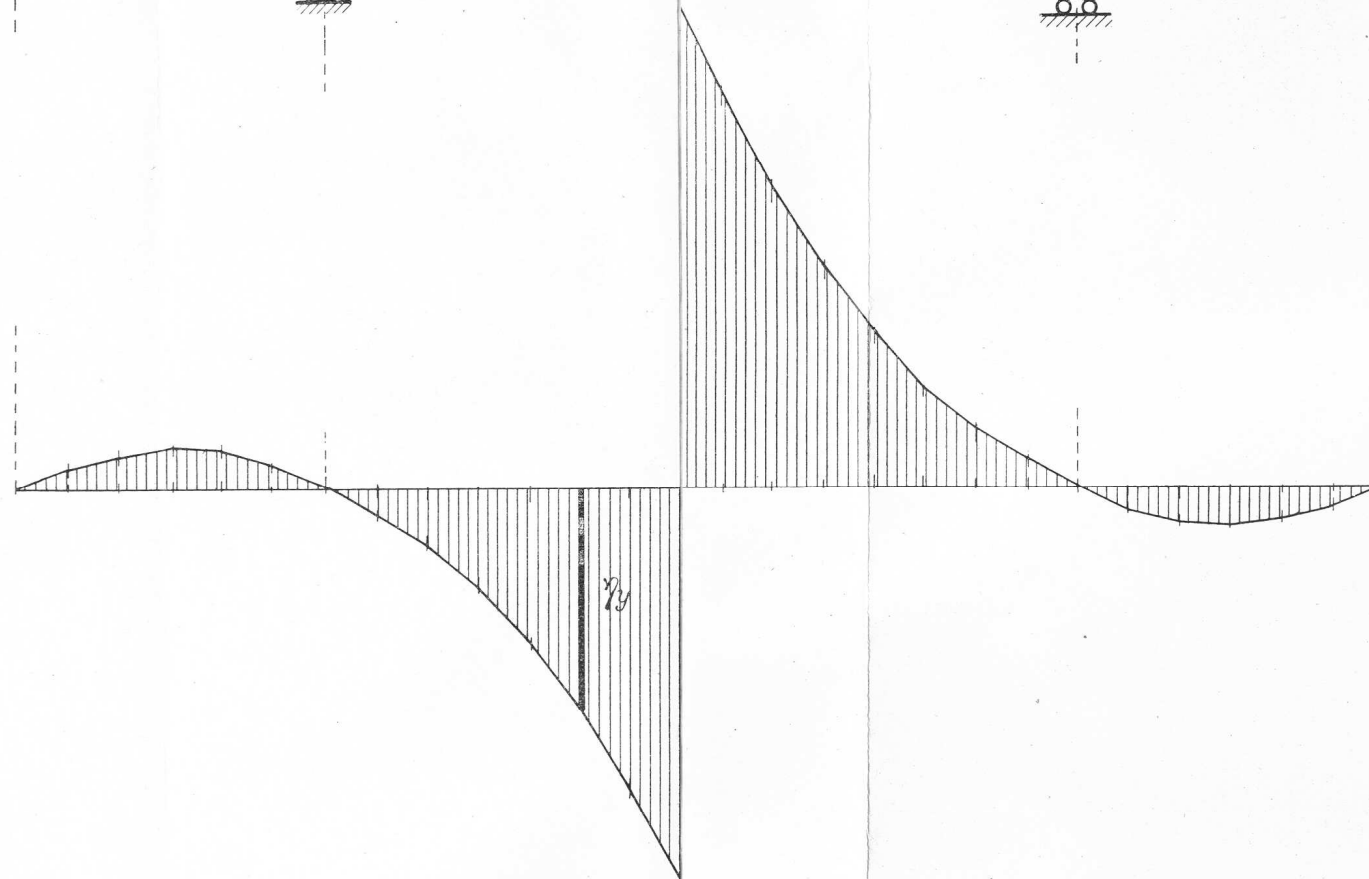
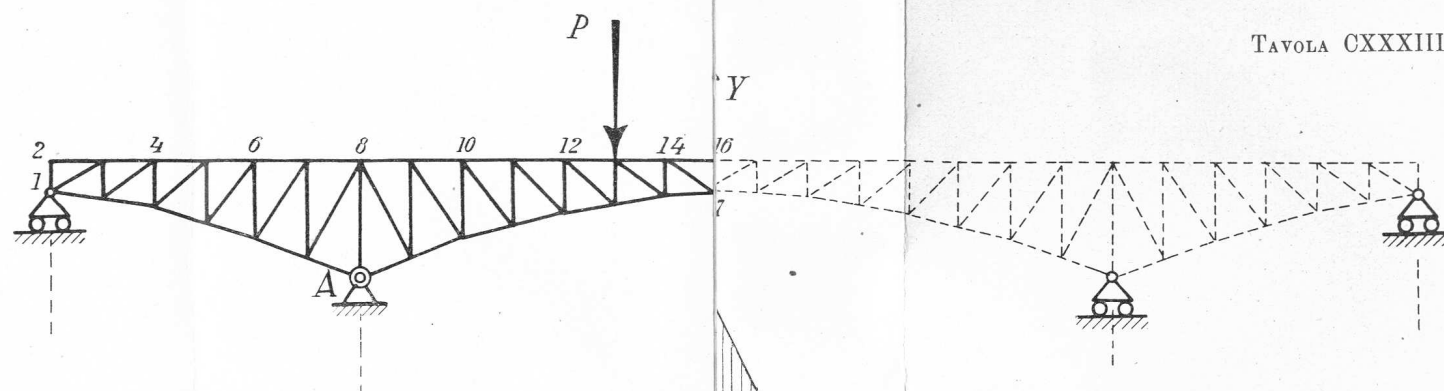
L'operazione non presenta nessuna difficoltà che noi non abbiamo già imparato a superare: si incomincia coll'immaginare applicata alla semitrave sinistra una Y negativa, si calcolano gli sforzi nelle aste (che sono tutti staticamente determinati), si deducono le relative variazioni di lunghezza; si costruisce infine un diagramma di Williot che fornisce subito gli spostamenti dei nodi; questi spostamenti si trovano registrati nel diagramma disegnato a sinistra; per proiezione se ne è tratta la deformata verticale del corrente superiore.

Analoghe operazioni si dovrebbero, generalmente parlando, ripetere per la semitrave destra. Se il sistema è simmetrico (ed è questo il caso delle nostre figure), tali operazioni si possono risparmiare, e la linea di influenza si può completare per simmetria.

Come unità di misura si deve al solito prendere l'arresto-mento del vincolo, vale a dire lo spostamento relativo delle due estremità delle semitravi già collegate dalla cerniera, misurato nella direzione del vincolo stesso. Nel caso della simmetria si otterrà l'unità \mathbf{s}_y raddoppiando semplicemente la proiezione verticale dello spostamento del punto di applicazione della Y negativa, in funzione della quale abbiamo calcolata la deformazione della semitrave sinistra.

Per un carico verticale qualunque $P=1$ si ha dunque colle notazioni della figura

$$Y = \frac{\eta_y}{\mathbf{s}_y}$$



Nella tav. CXXXIV la linea d'influenza della Y testè costruita è stata utilizzata per il tracciamento della linea d'influenza della reazione R' dell'appoggio estremo sinistro.

S'intende che il problema si deve ormai risolvere coi soli mezzi della statica dei sistemi rigidi. Si ha infatti per la sem-trave sinistra, e colle notazioni della figura 119,

$$R' = P \frac{d}{l'} + Y \frac{l}{l'}$$

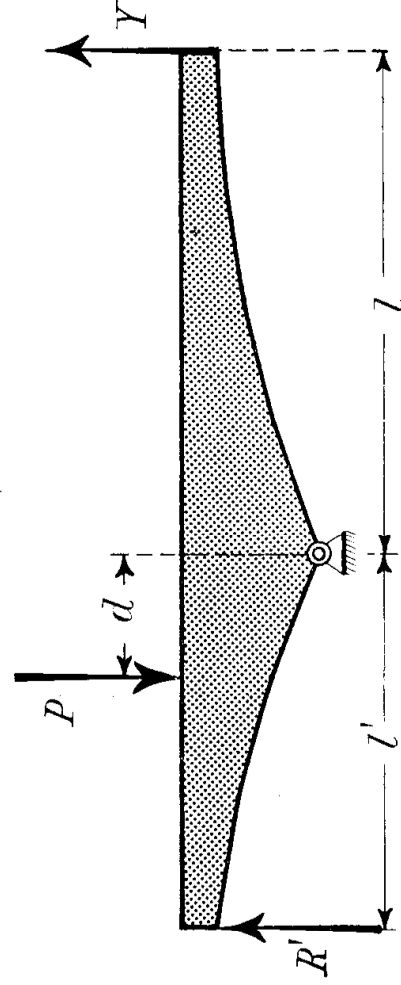


Fig. 119.

Tracciata pertanto la retta che, in una certa scala (corrispondente all'unità di misura s arbitrariamente scelta), rappresenta la legge di variazione del termine

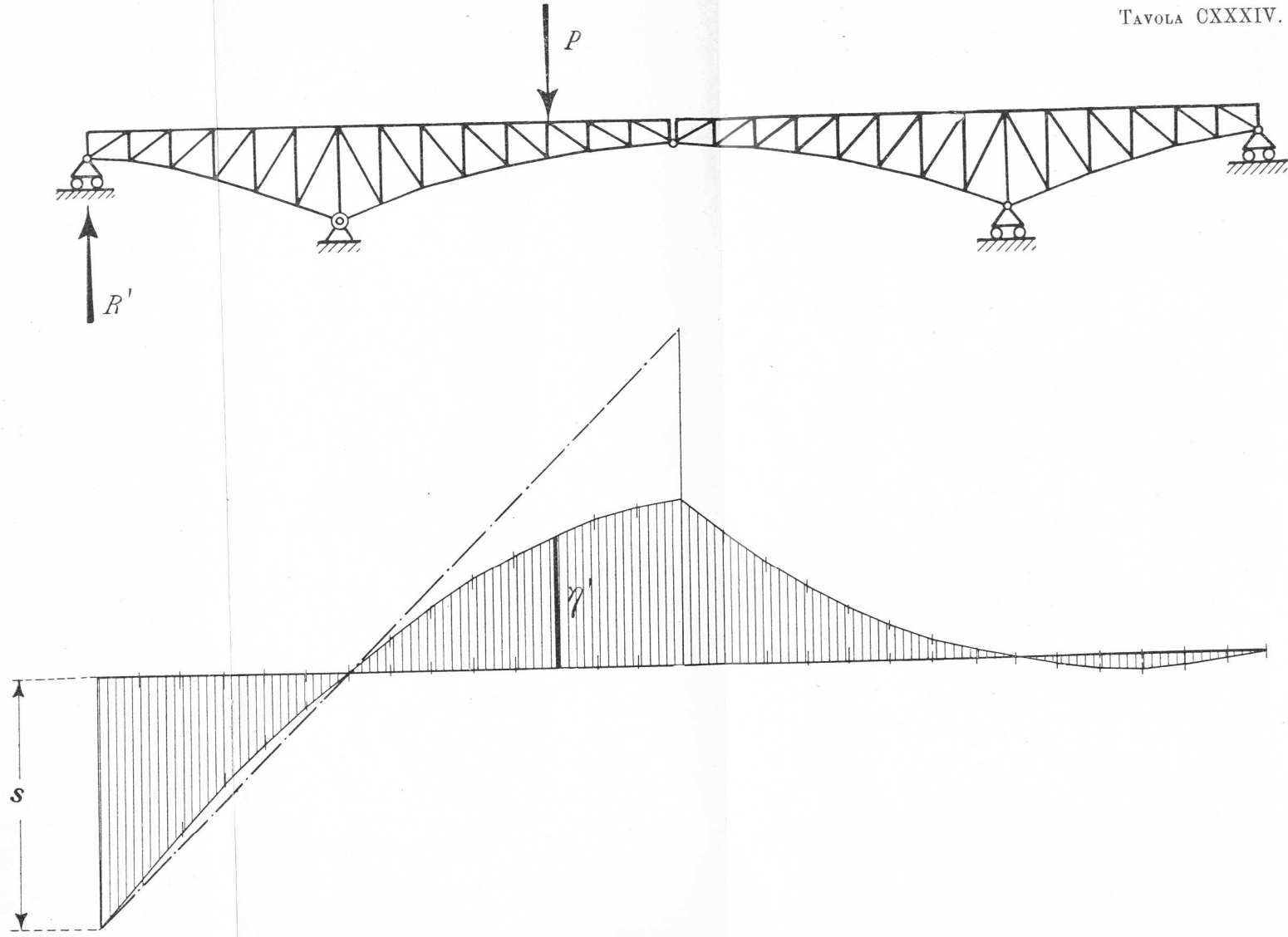
$$P \frac{d}{l'}$$

si tracci la linea le cui ordinate contate a partire da tale retta misurano, nella medesima scala, i valori

$$Y \frac{l}{l'} = P \frac{\eta_v}{s_v} \cdot \frac{l}{l'}$$

Detta η' l'ordinata generica di questa linea per rapporto alla fondamentale di riferimento, si avrà

$$R' = P \frac{\eta'}{s}$$



Quando poi il carico si trova sulla semitrave destra, si ha ancor più semplicemente

$$R' = Y \frac{l}{l'}$$

La metà destra della linea d'influenza si ottiene quindi direttamente dalla linea d'influenza della Y moltiplicandone le ordinate pel rapporto di l ad l' e riportandole poi in disegno nella nuova scala avente il segmento s per unità di misura.

Se il lettore vorrà tener presente che la nuova linea d'influenza così costruita altro non può essere che la deformata del corrente superiore della trave per il solito arretramento unitario dell'appoggio estremo sinistro, si renderà immediatamente conto del perchè in essa sia scomparso il salto brusco di ordinata che caratterizzava la linea d'influenza della Y , ma permanga in corrispondenza della cerniera in mezziera il punto angoloso.

Passiamo ora allo studio del sistema doppiamente iperstatico. La natura dei suoi vincoli (un solo punto fisso e tre appoggi

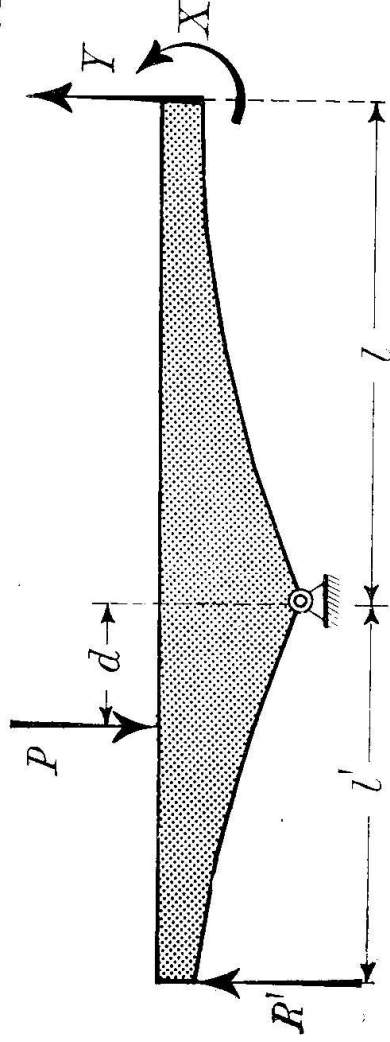


Fig. 120.

semplici) ci permette di asserire che la componente orizzontale dello sforzo che si trasmette attraverso la sezione in mezziera continua ad essere staticamente determinata.

Si possono pertanto assumere come incognite iperstatiche la componente verticale Y di tale sforzo ed il suo momento X rispetto alla sezione stessa (fig. 120).

Ed è facile constatare che queste due incognite si presentano fra loro indipendenti nel senso già altra volta precisato.

Basta, per convincersene, riflettere che, per ragion di simmetria, lo spostamento relativo delle estremità delle due semitravi nella variazione di configurazione determinata da una Y negativa (e rappresentata nella tav. CXXXIII) consisteva in una semplice traslazione (verticale) nella quale

$$\eta_{xy} = 0$$

Per la stessa ragione

$$\eta_{yx} = 0$$

deve cioè esser nullo lo spostamento verticale relativo delle

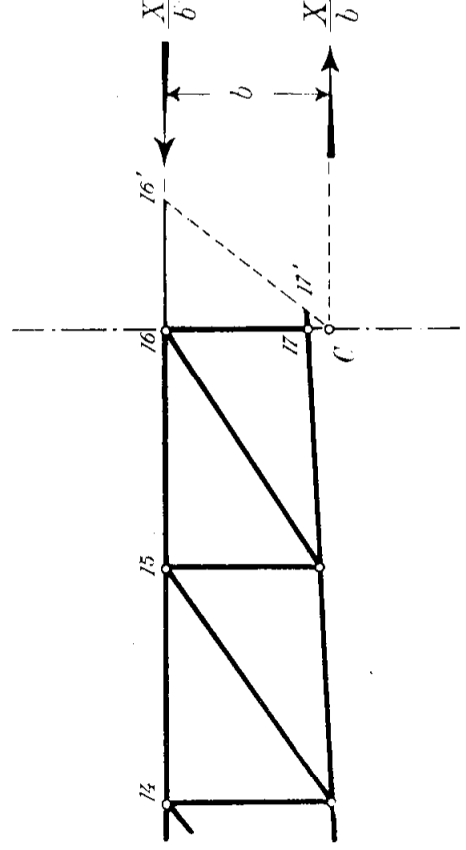


Fig. 121.

estremità delle due semitravi nella variazione di configurazione determinata da una X negativa: il che è quanto dire che questa variazione di configurazione deve dar luogo ad una rotazione relativa delle estremità delle due semitravi attorno ad un centro C situato sulla linea d'azione di Y .

La cosa riesce pienamente confermata dal diagramma degli spostamenti che noi abbiamo riprodotto, nei suoi elementi essenziali, nella nostra tav. CXXXV limitatamente alla semitrave sinistra.

In funzione degli spostamenti orizzontali dei due nodi situati sulla verticale in mezzeria si può anzi determinare la posizione di tale centro colla semplicissima costruzione grafica disegnata per maggior chiarezza in scala maggiore nella nostra figura 121.

La deformata del corrente superiore della trave (staticamente determinata) per questa particolare sollecitazione si può pertanto senz'altro interpretare come linea d'influenza della incognita X nel sistema doppiamente iperstatico dato.

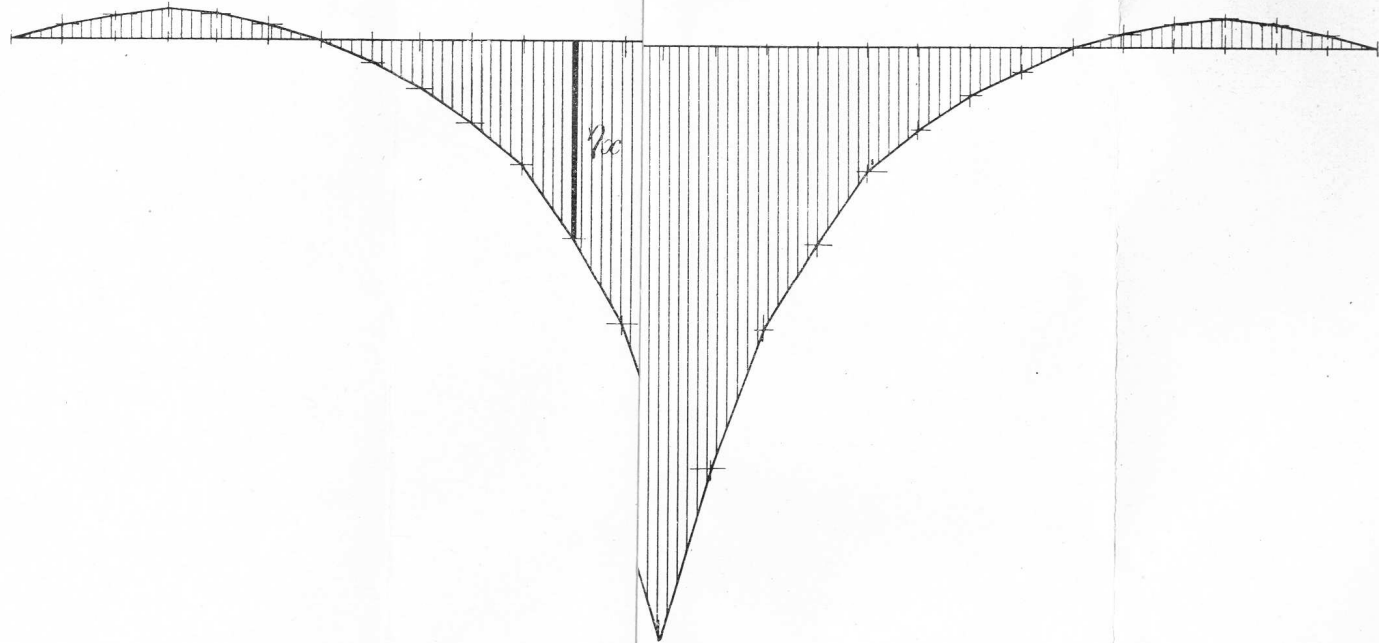
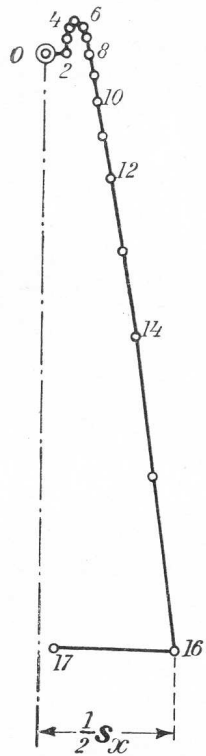
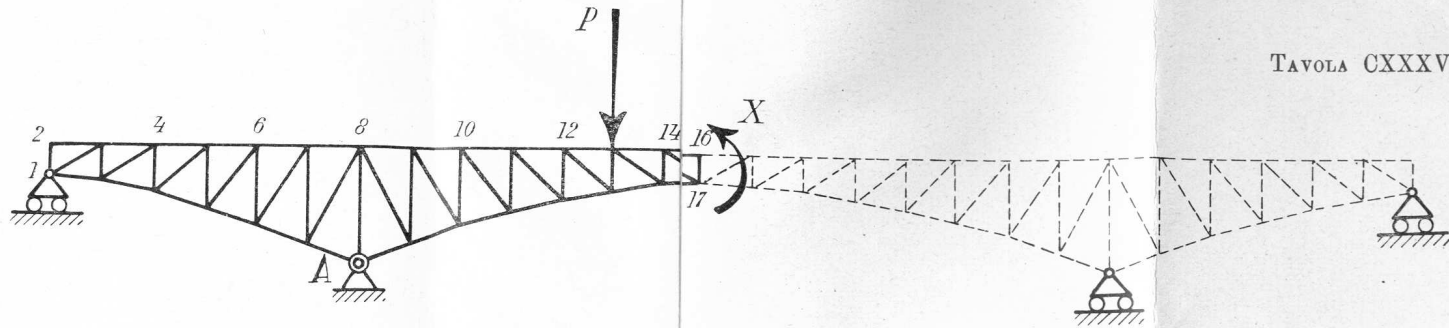
Resta soltanto a determinarsi l'unità di misura.

A tal fine si indichi con b la distanza del centro C dal corrente superiore (rettilineo) della trave, e si immagini la coppia X realizzata mediante due forze aventi per linea d'azione l'asse geometrico del corrente e la parallela per C (sicchè il braccio della coppia risulti precisamente eguale a b).

In queste condizioni la grandezza di ciascuna delle due forze per la condizione di carico $P = 1$, si può esprimere sotto la forma

$$\frac{X}{b} = \frac{\eta_x}{s_x}$$

dove s_x rappresenta lo spostamento (orizzontale) relativo dei due estremi del corrente superiore delle due semitravi.



Dalle due linee d'influenza di X e di Y rappresentate nelle due tav. CXXXIII e CXXXV si passa alla linea d'influenza della reazione R' coi soli mezzi della statica dei sistemi rigidi.

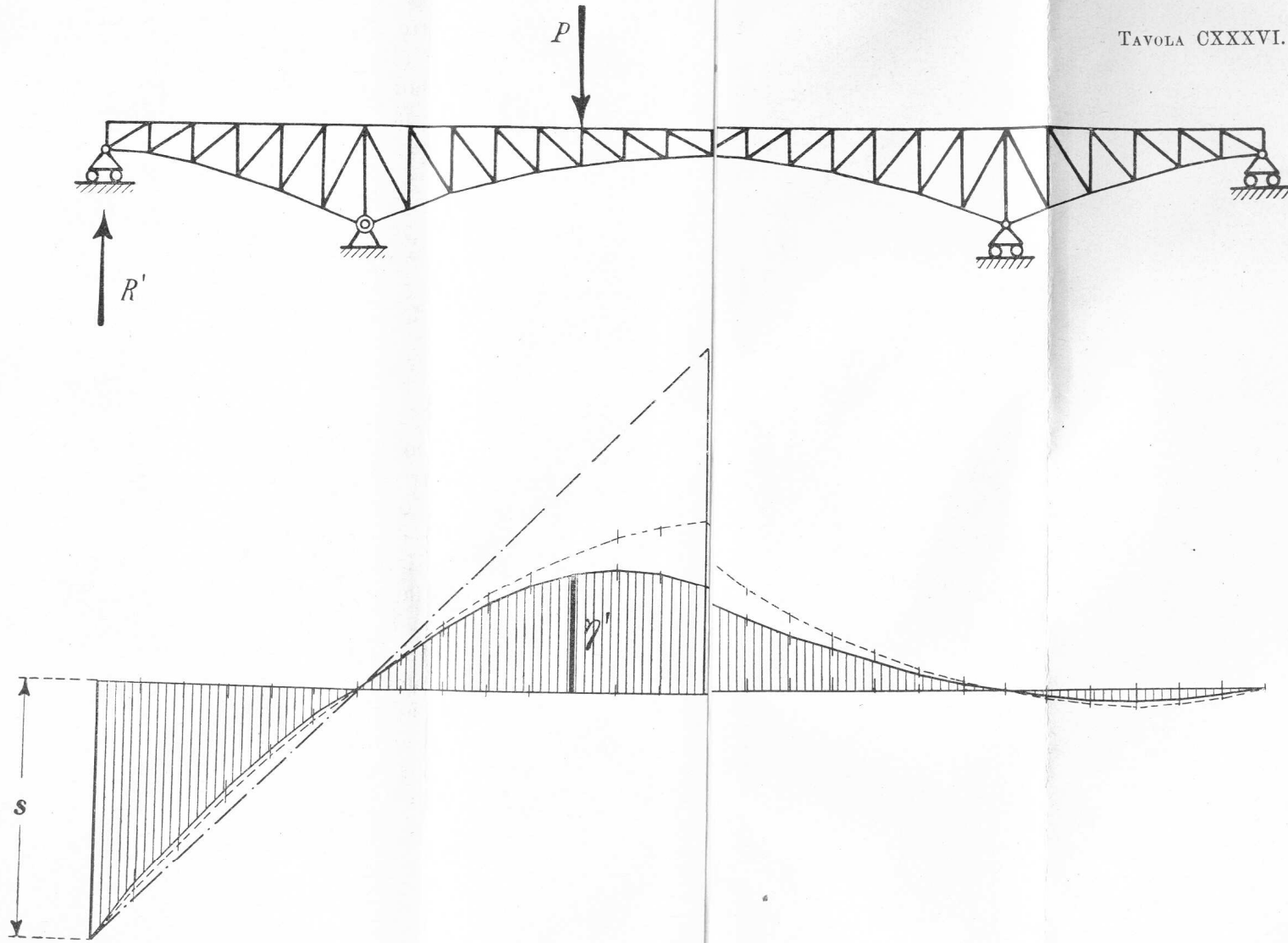
Si ha infatti, per la semitrave sinistra, e colle notazioni della figura 120,

$$R' = P \frac{d}{l} + \frac{X}{l} + Y \frac{l}{l}$$

Eseguite pertanto le operazioni già precedentemente descritte (tav. CXXXIV), si dovrà alla ordinata generica della linea d'influenza allora trovata sommare (algebricamente) l'ordinata

$$\frac{X}{l} = P \frac{\eta_x}{s_x} \cdot \frac{b}{l}$$

Lo stesso si farà per la semitrave destra, per la quale vale un'equazione simile a quella scritta per la semitrave sinistra, quando vi si ometta, come di dovere, il termine che contiene la P . Si otterrà così la nuova linea d'influenza della R' (tav. CXXXVI) nella quale il lettore vorrà notare gli effetti del nuovo vincolo aggiunto, consistenti essenzialmente nella scomparsa del punto angoloso in mezzzeria e nella diminuzione di valore della reazione d'estremità, immediata diretta conseguenza della maggior rigidità che ha acquistata la campata centrale.



Con gli elementi ormai acquisiti lo studio del sistema triplamente iperstatico non presenta più alcuna difficoltà.

Si tratta infatti soltanto di introdurre come terza incognita Z la componente orizzontale, non più nulla, dello sforzo che si trasmette attraverso la sezione in mezzera dalla semitrave sinistra alla semitrave destra.

Se come linea d'azione di questa componente si assume l'orizzontale passante per il centro C , se cioè si adottano la verticale e l'orizzontale per C (fig. 122) come assi cartesiani di riferimento

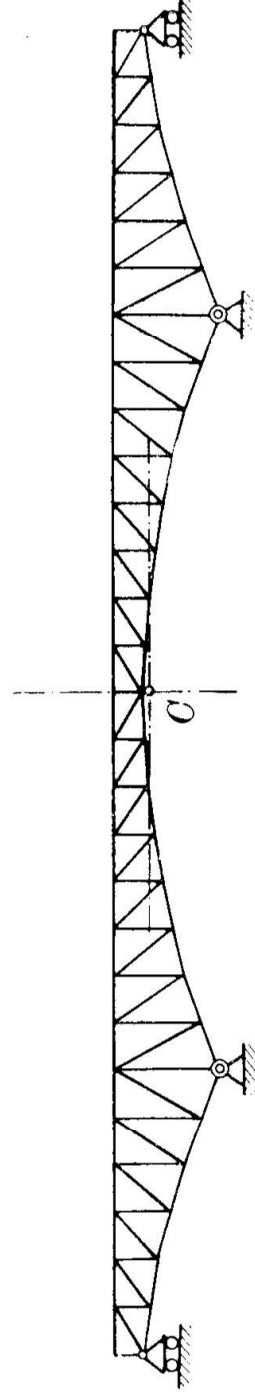


Fig. 122.

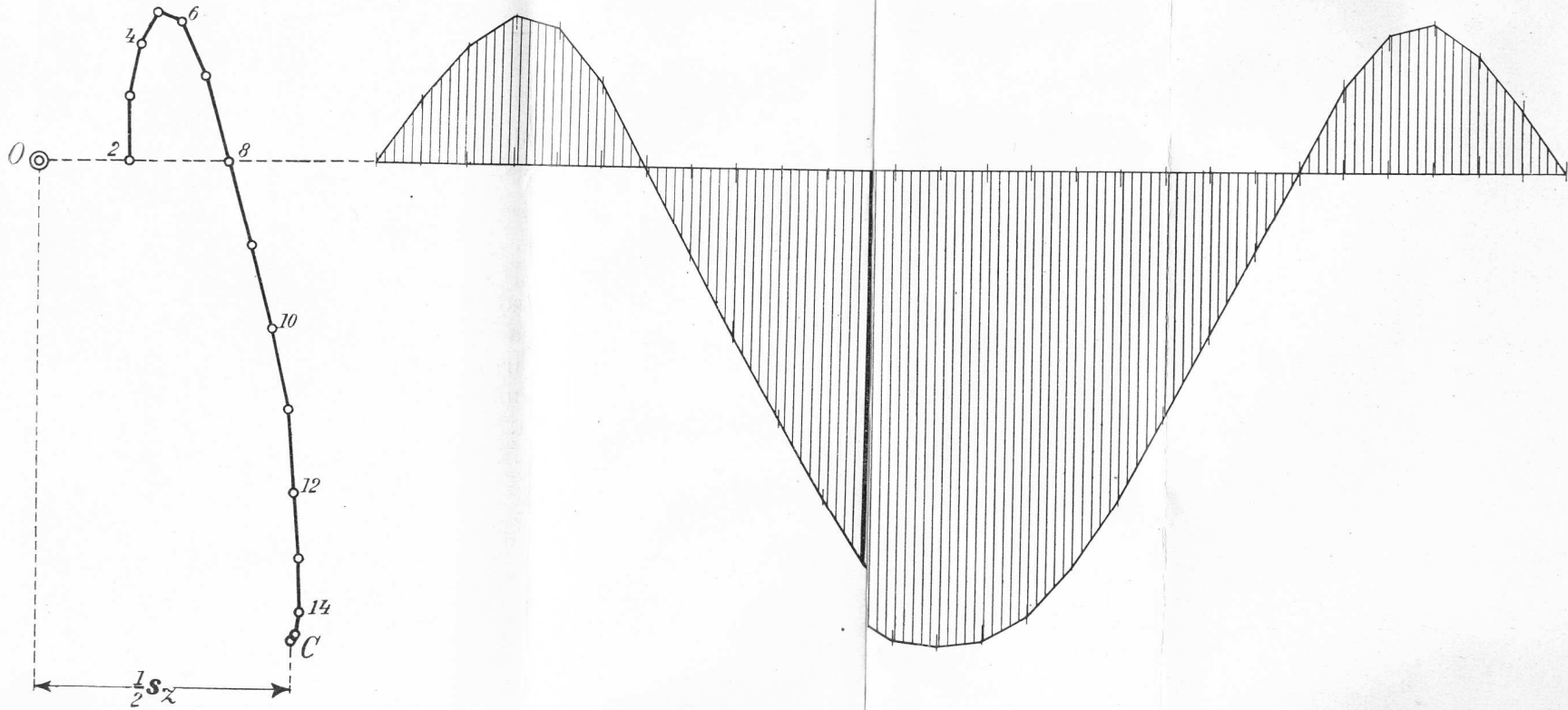
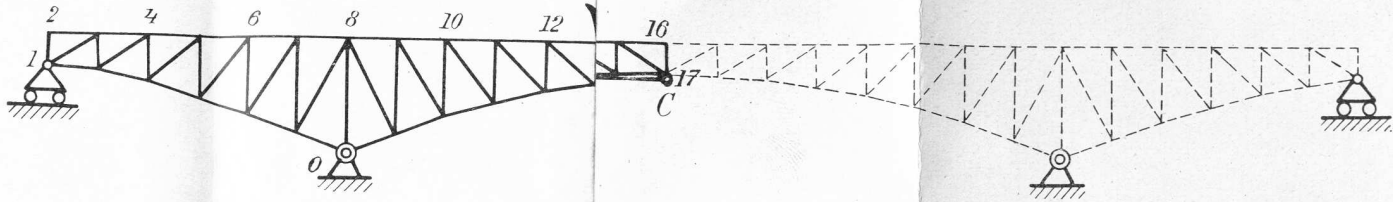
per quello sforzo incognito, l'indipendenza delle equazioni è senz'altro assicurata.

La deformata del corrente superiore della trave per una sollecitazione Z negativa applicata alle due semitrave rese idealmente indipendenti, epperò staticamente determinate, si può al solito interpretare come linea d'influenza della componente Z nel sistema triplamente iperstatico dato (tav. CXXXVII).

L'unità di misura è data al solito dallo spostamento relativo, certamente orizzontale, del punto C considerato come appartenente ad una delle semitrave rispetto allo stesso punto C considerato come appartenente all'altra.

Si ha pertanto, colle notazioni della figura, e per la solita condizione di carico $P = 1$,

$$Z = \frac{\eta_2}{s_2}$$



La linea d'influenza della reazione R' dell'appoggio estremo sinistro si deduce, al solito, tenendo presente che, in virtù delle leggi della statica dei sistemi rigidi, si ha per la semitrave sinistra, e colle notazioni della figura 123,

$$R' = P \frac{d}{l'} + \frac{X}{l'} + Y \frac{l}{l'} + Z \frac{h}{l'}$$

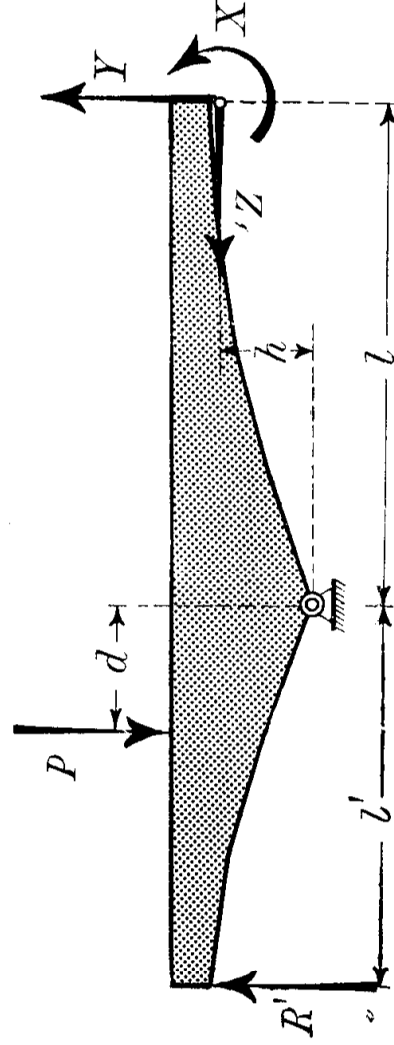
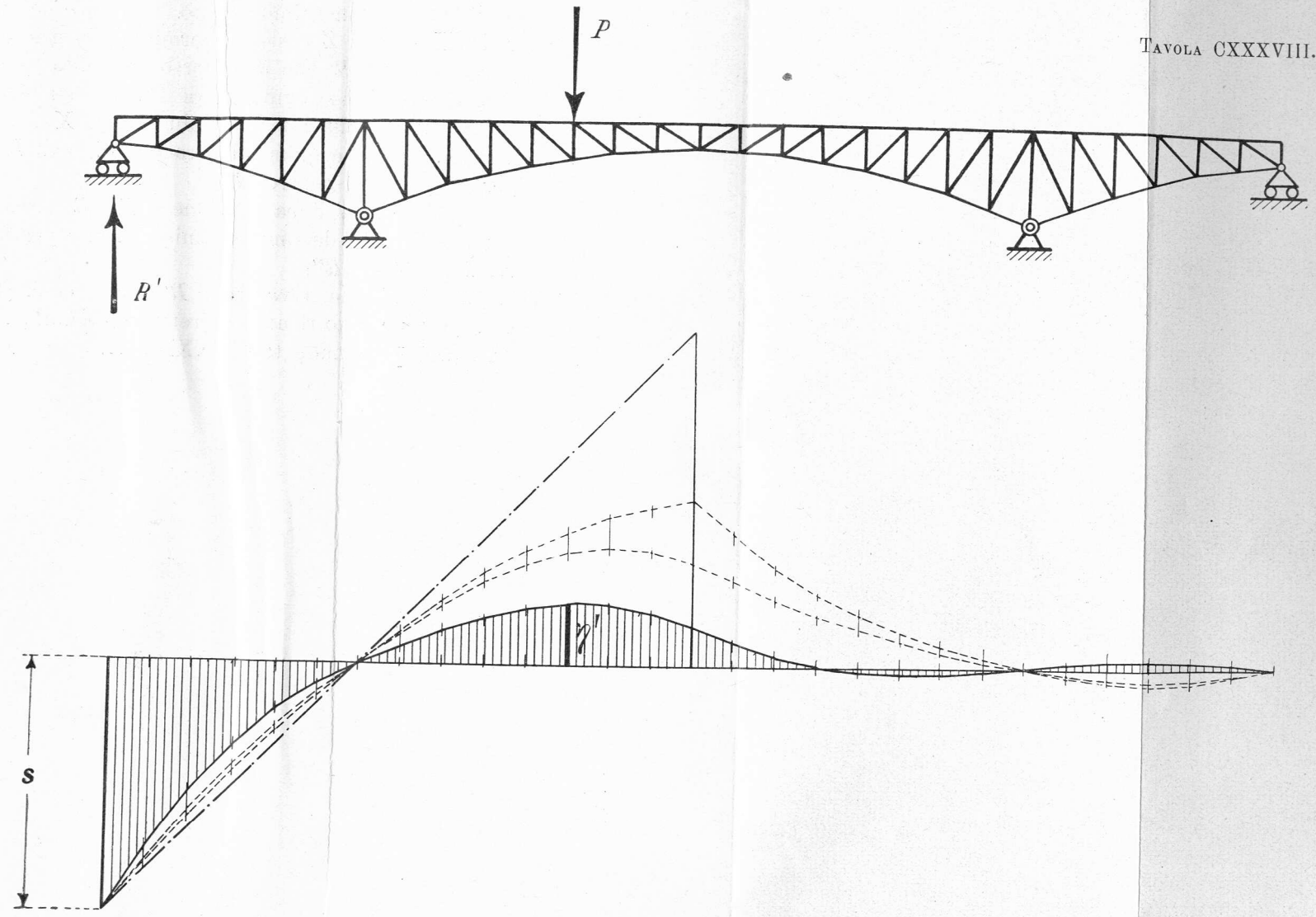


Fig. 123.

Alla ordinata generica della linea d'influenza tracciata nella tav. CXXXVI si dovrà quindi algebricamente sommare l'ordinata

$$Z \frac{h}{l'} = P \frac{\eta_z}{s_z} \cdot \frac{h}{l'}$$

Lo stesso si farà per la semitrave destra. Si otterrà così la nuova linea d'influenza della R' (tav. CXXXVIII) nella quale l'ulteriore irrigidimento della campata centrale della trave si rivela in un'ulteriore diminuzione del valore della reazione d'estremità.



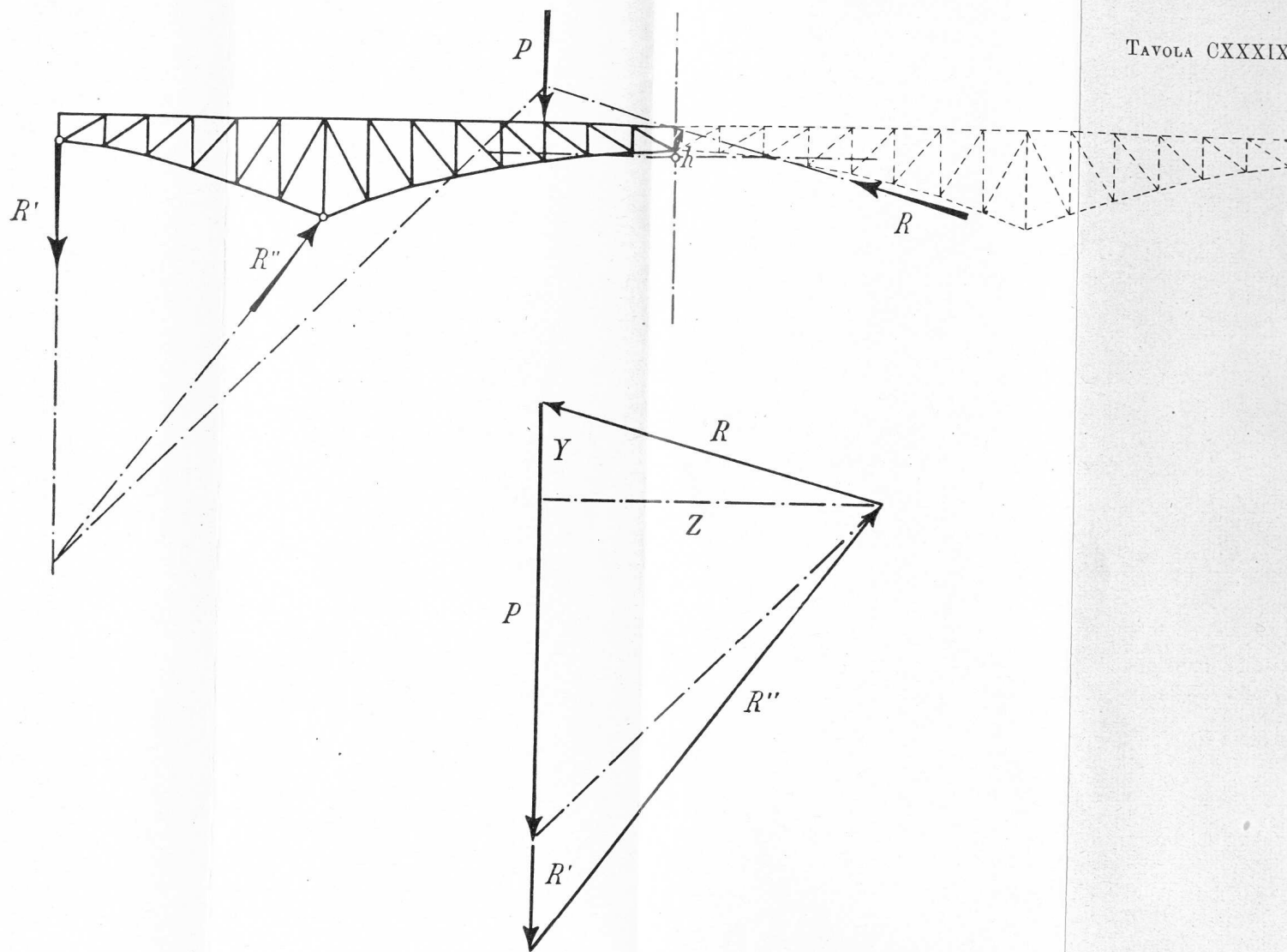
Nella tav. CXXXIX i risultati testè ottenuti sono stati utilizzati per la determinazione delle diverse reazioni cui dà origine la presenza della forza generica P .

Si sono in un primo tempo utilizzate le linee di influenza della Y e della Z e si è determinata in grandezza, direzione e senso la forza R che attraverso la solita sezione in mezzzeria si trasmette dalla semitrave destra alla sinistra.

Coll'aiuto della linea di influenza di X si è poi determinato il momento — e quindi il braccio di leva h — di tale forza per rapporto al centro C .

Nota così la linea d'azione della R , sono bastate le solite composizioni e decomposizioni di forze per farci conoscere le reazioni R' ed R'' .

Va da sè che il valore di R' risulta esser proprio quello che si sarebbe potuto ricavare direttamente dalla linea d'azione per esso disegnata nella tav. CXXXVIII.



Perchè appaia chiaro come per questa via si possa poi esaurire sotto ogni aspetto la trattazione del problema, facciamo ancora vedere come dalla linea d'azione della *R'* disegnata nella tav. CXXXVIII si possono immediatamente trarre le linee d'influenza degli sforzi nelle aste della prima campata.

Le costruzioni occorrenti sono state eseguite, servendoci di metodi che noi abbiamo già ampiamente spiegati a suo tempo, nelle due figure riprodotte nella tav. CXL; la prima di esse si riferisce ad un'asta del contorno superiore della trave, l'altra ad un'asta di parete (diagonale).

In entrambe le figure sono state disegnate in rosso le costruzioni occorrenti per la determinazione delle unità di misura.

