SISTEMI DOPPIAMENTE IPERSTATICI

Passare dallo studio dei sistemi semplicemente iperstatici a quello dei sistemi doppiamente iperstatici vuol evidentemente dire trovarsi di fronte a due invece che ad una sola asta sovrabbondante.

La conseguenza è questa: che nell'applicazione del secondo principio di reciprocità, allorquando si cerca di imprimere ad una delle aste quella certa variazione unitaria di lunghezza — o ad uno dei vincoli quel certo arretramento — di cui abbiamo tante volte parlato (cfr. pag. 457) la travatura di cui si deve calcolare la variazione di configurazione contiene ancora un'asta (od un vincolo) sovrabbondante.

Il calcolo degli sforzi nelle rimanenti aste della travatura non può quindi più eseguirsi per mezzo del solito diagramma Cremoniano, nè per mezzo di alcun altro dei metodi indicati per i sistemi staticamente determinati; tale calcolo implica necessariamente la preliminare risoluzione di un problema iperstatico.

Ma risolto che sia questo problema, determinata cioè l'incognita che esso contiene, il nostro studio potrà tranquillamente riprendere la via già tracciata. I metodi della statica saranno di nuovo suscettibili di venir utilizzati per la determinazione degli sforzi nelle singole aste rimanenti. In funzione degli sforzi si calcoleranno poi le variazioni di lunghezza, e, mediante il solito diagramma di Williot, gli spostamenti dei nodi.

E si perverrà così a quel certo diagramma di deformazione che, sempre a norma del secondo principio di reciprocità, può venire interpretato come diagramma di influenza dello sforzo in quella certa asta che per prima si era presa in considerazione.

Ciò premesso in linea generale, fermiamoci un momento sull'unico punto della trattazione che presenta qualche novità per rapporto alle trattazioni precedenti; sulla risoluzione cioè del problema iperstatico.

Incominceremo col riferirci, tanto per fissar le idee, al caso della trave continua, di cui ci siamo occupati nelle pagine che precedono, e prenderemo in considerazione un esempio concreto: quello di una trave (fig. 104) continua su quattro appoggi, cioè dotata di due vincoli sovrabbondanti.

Assumeremo come sovrabbondanti i due appoggi intermedii realizzati nella nostra figura mediante due aste verticali; ciò

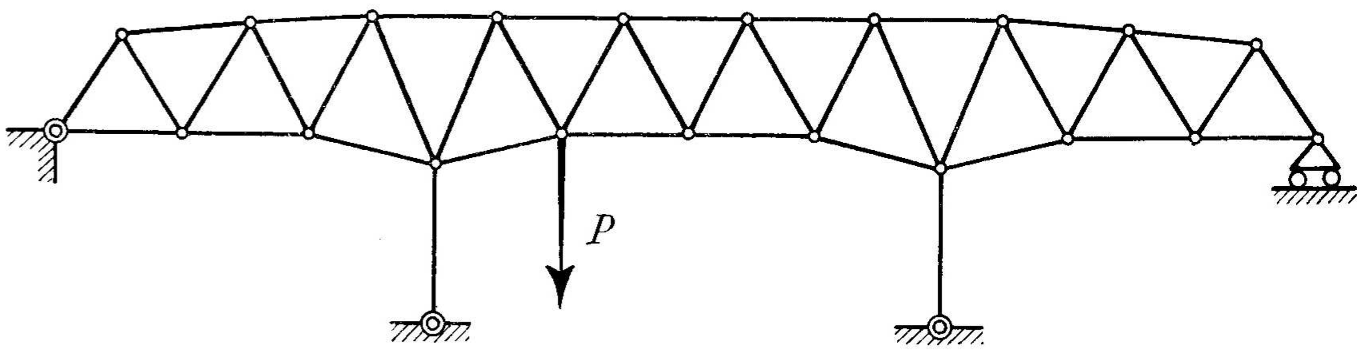


Fig. 104.

equivale a dire che assumeremo come incognite iperstatiche le reazioni X ed Y che si trasmettono attraverso a tali due aste.

Se ci si propone semplicemente di costruire la linea d'influenza di una di queste reazioni, nella solita ipotesi dei carichi verticali P, applicati, per esempio, al corrente inferiore della trave, il procedimento da seguire è, in linea teorica, sempre esattamente lo stesso che noi già ben conosciamo: si dovrà cioè tracciare la deformata verticale del corrente caricato, nella ipotesi che al vincolo sovrabbondante considerato venga impresso il solito arretramento unitario, fermi restando tutti gli altri vincoli del sistema.

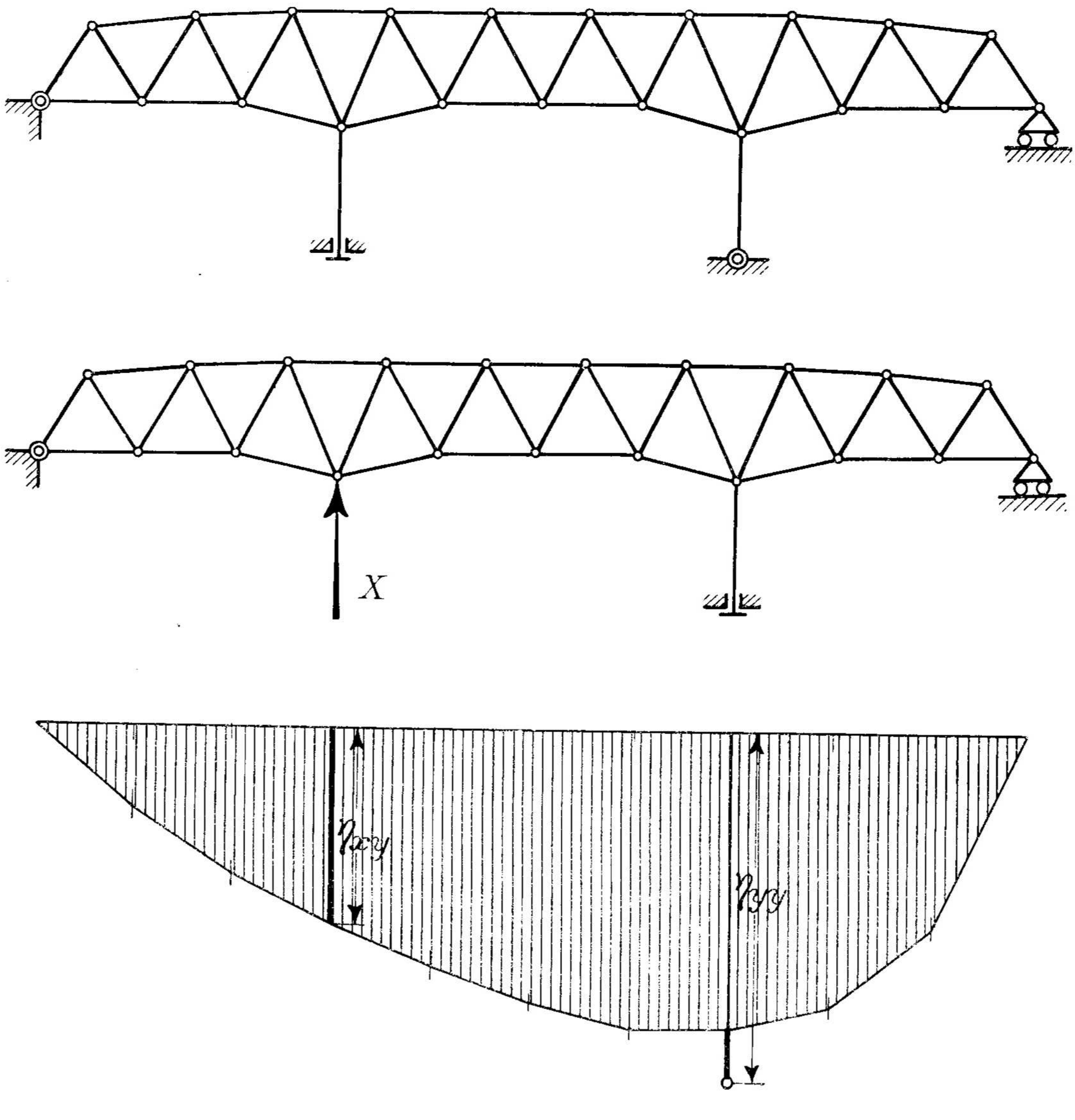
Al solito lo sforzo che questo vincolo sovrabbondante, per l'imposto arretramento, deve esercitare sul resto della travatura, avrà necessariamente la direzione ed il punto d'applicazione noti: la sua grandezza, che indicheremo con $-X$ (per rammentare che essa deve in ogni caso avere senso contrario a quello delle reazioni positive), può però restare per il momento indeterminata; in funzione di essa noi potremo egualmente calcolare la reazione Y che la presenza di $-X$ determina nell'altro vincolo sovrabbondante.

Questo calcolo dell'incognita iperstatica Y in un sistema che contiene ormai questa sola incognita, in quanto, rispetto ad esso, la $-X$ va trattata come un dato, si può fare utilizzando uno qualunque dei differenti metodi che noi conosciamo, da quelli analitici che fan capo ai teoremi di MENABREA e di CASTIGLIANO, a quelli grafici di cui ci siamo occupati proprio in queste ultime pagine.

Se si sceglie quest'ultima via si è immediatamente condotti ad utilizzare il procedimento illustrato nella tav. CXVI; e si giunge al tracciamento di una linea d'influenza del tipo di quella rappresentata in basso nella tav. CXIX; linea d'influenza di cui ci si potrà immediatamente servire per calcolare il valore che l'incognita Y assume quando la trave, libera da ogni qualsiasi carico esterno, è sottoposta soltanto alla sollecitazione $-X$.

Colle notazioni della figura si ha infatti

$$Y = X \frac{\eta_{xy}}{\eta_{yy}} .$$


X
η_{xy}
η_{yy}

In generale però lo scopo dell'indagine è quello di costruire le linee d'influenza di ambedue le incognite iperstatiche X ed Y.

Conviene allora incominciare col trattar ciascuna di queste incognite come se essa esistesse da sola: e costruire le due relative linee d'influenza com'è indicato nella tavola CXX. Ciascuna di queste linee può evidentemente venire utilizzata per la determinazione del valore che alla rispettiva reazione incognita spetta per una data condizione di carico della trave, a condizione che tra le forze applicate alla trave venga compresa anche la reazione (alla sua volta incognita) dell'altro vincolo.

Tenuto conto che le reazioni vengono, come si è detto a suo tempo, considerate come positive quando son dirette verso l'alto, e che perciò quando si vogliano comprendere fra le forze applicate bisogna necessariamente riguardarle come dei carichi negativi, si è così condotti a scrivere due equazioni del tipo

$$X = \sum P \frac{\eta_x}{\eta_{xx}} - Y \frac{\eta_{yx}}{\eta_{xx}}$$

$$Y = \sum P \frac{\eta_y}{\eta_{yy}} - X \frac{\eta_{xy}}{\eta_{yy}}$$

o, ciò che fa lo stesso,

$$\eta_{xx} X + \eta_{yx} Y = \Sigma P \eta_x$$

$$\eta_{xy} X + \eta_{yy} Y = \Sigma P \eta_y$$

Nel caso che la condizione di carico considerata si riduca ad una unica forza $P = 1$ si ha

$$\eta_{xx} X + \eta_{yx} Y = \eta_x$$

$$\eta_{xy} X + \eta_{yy} Y = \eta_y$$

Moltiplicando i due membri della seconda di queste equazioni per il rapporto

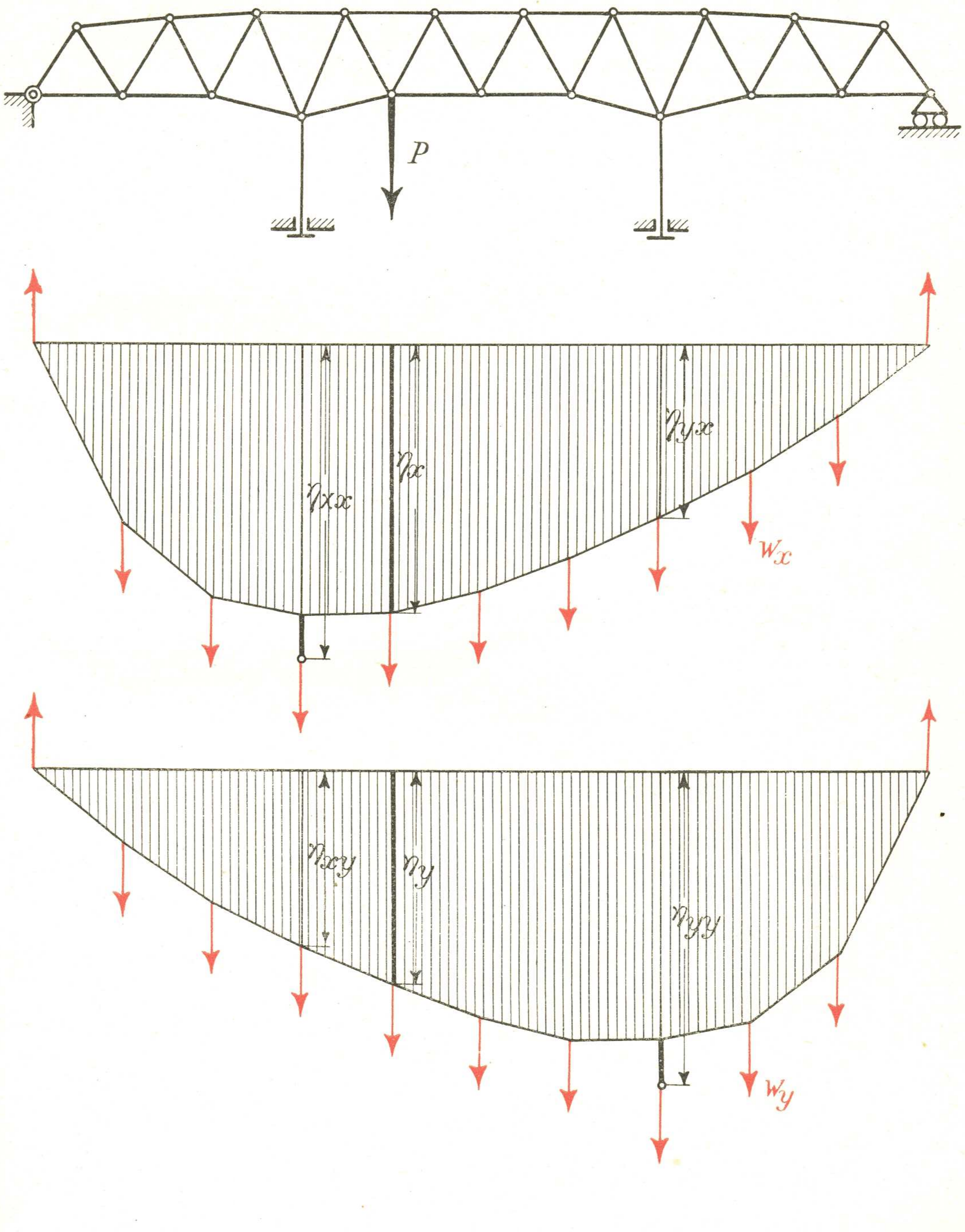
$$k = \frac{\eta_{yx}}{\eta_{yy}}$$

e sottraendola poi, termine a termine, dalla prima, si ottiene

$$(\eta_{xx} - k\eta_{xy})\, X = \eta_x - k\eta_y$$

ovvero

$$X = \frac{\eta_x - k\,\eta_y}{\eta_{xx} - k\,\eta_{xy}}$$


P
η_{xx}
η_x
η_{yx}
w_x
η_{xy}
η_y
η_{yy}
w_y

Ora, al variare della posizione della forza applicata, varia in quest'operazione il numeratore del secondo membro, non il denominatore. È dunque lecito concluderne che quel numeratore può essere assunto a rappresentare la legge di variazione dell'incognita X ove il denominatore diventi eguale ad uno; ove cioè si assuma il denominatore stesso come unità di misura.

Si otterrà pertanto la linea d'influenza della incognita X sottraendo dalle ordinate η_x della prima linea d'influenza della tav. CXX, le corrispondenti η_y della seconda, moltiplicate per il rapporto

$$k = \frac{\eta_{yx}}{\eta_{yy}}$$

ed adottando per la lettura delle ordinate-differenze l'unità di misura

$$\eta_{xx} - k\,\eta_{xy}$$

Ciò si può fare nel modo più semplice, sovrapponendo alla prima linea d'influenza della tav. CXX, la seconda ridotta nel rapporto indicato e leggendo poi le ordinate della prima a partire da questa seconda.

Così si è fatto nella tav. CXXI, e si è ottenuto il diagramma ivi disegnato superiormente: inferiormente lo stesso diagramma è stato riprodotto colle sue ordinate contate a partire da una retta orizzontale.

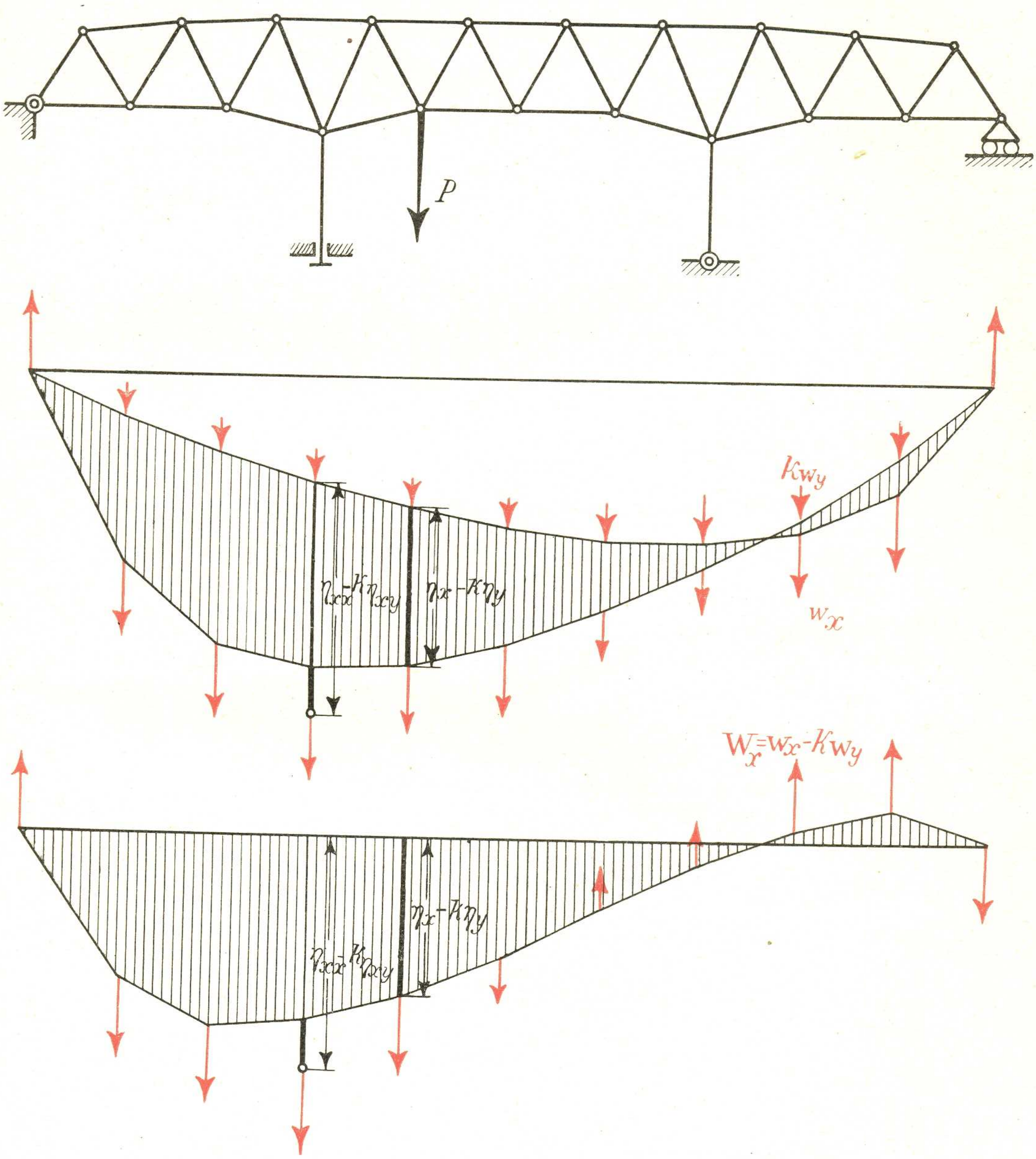
***

Se le linee d'influenza originarie (tav. CXX) sono state ottenute, o vengono interpretate, come poligoni funicolari di certi sistemi di pesi elastici w_x e w_y anche i diagrammi della tav. CXXI si potranno tracciare come poligoni funicolari.

Nel tracciamento del primo di tali diagrammi ci si potrà anzi giovare del fatto che la riduzione di scala del secondo dei due poligoni si può sempre ottenere nel modo più semplice moltiplicando pel rapporto inverso

$$\frac{1}{k} = \frac{\eta_{yy}}{\eta_{yx}}$$

la distanza polare da cui i pesi elastici w_y vengono proiettati.


P
$\eta_{xx} - k\eta_{xy}$
$\eta_x - k\eta_y$
kw_y
w_x
$W_x = w_x - kw_y$
$\eta_x - k\eta_y$
$\eta_{xx} - k\eta_{xy}$

Che se si vuole invece arrivare direttamente al tracciamento della linea d'influenza nella forma, indubbiamente più comoda, che è rappresentata nella figura inferiore, basterà procedere al calcolo dei nuovi pesi elastici

$$W_x = w_x - k\,w_y$$

S'intende poi che quel che si è detto a proposito dell'incognita X si può ora ripetere per la Y.

Ponendo infatti

$$k' = \frac{\eta_{xy}}{\eta_{xx}}$$

si ha

$$Y = \frac{\eta_y - k'\eta_x}{\eta_{yy} - k'\eta_{yx}}$$

Dal che si deduce che la linea d'influenza della Y si può ottenere sotto forma di poligono funicolare collegante dei pesi elastici del tipo

$$W_y = w_y - k'w_x$$

Concludendo si può dire che le linee d'influenza delle due incognite in un sistema doppiamente iperstatico si possono sempre dedurre per combinazione lineare da due deformate dello stesso sistema reso staticamente determinato.

***

Però un'ulteriore semplificazione è possibile.

Riprendiamo infatti in considerazione il sistema delle due equazioni

$$\eta_{xx}X + \eta_{yx}Y = \eta_x$$
$$\eta_{xy}X + \eta_{yy}Y = \eta_y$$

È evidente che se fosse verificata la condizione

$$\eta_{xy} = \eta_{yx} = 0$$

(e si noti bene che si tratta di *una sola condizione*, non di due, perchè η_{xy} ed η_{yx} son sempre identicamente eguali in virtù del teorema di BETTI) quelle due equazioni si potrebbero immediatamente risolvere rispetto alle incognite, e si otterrebbe

$$X = \frac{\eta_x}{\eta_{xx}}$$

$$Y = \frac{\eta_y}{\eta_{yy}}$$

In tal caso le due deformate aventi per ordinate generiche η_x ed η_y potrebbero senz'altro venire assunte come linee d'in-

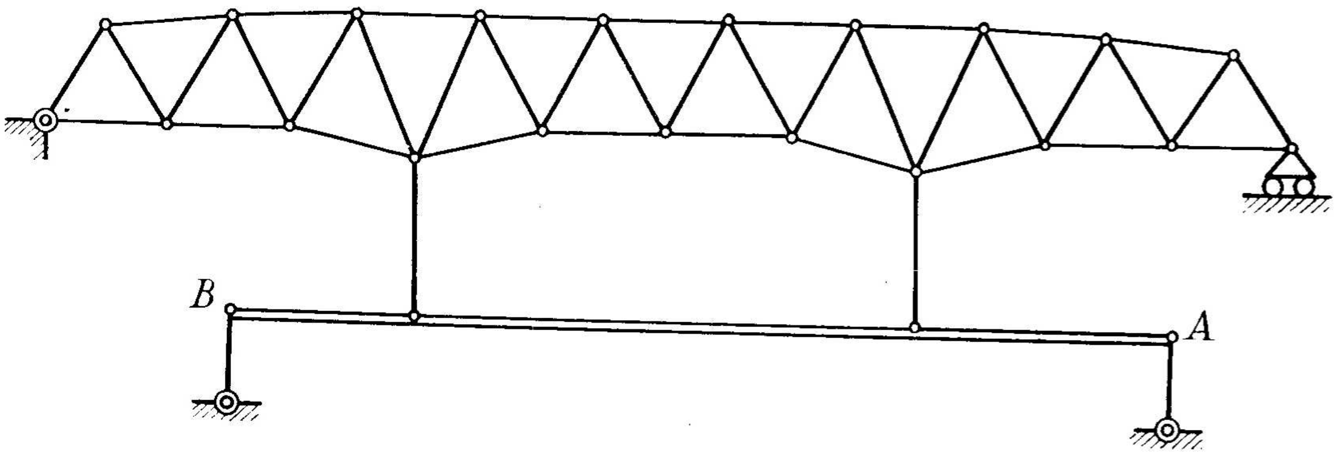


Fig. 105.

fluenza delle due incognite X ed Y adottando per unità di misura rispettivamente η_{xx} ed η_{yy}.

Si tratta di vedere in quali casi la condizione sopra indicata può riuscir verificata.

Perciò riferiamoci ancora una volta alla nostra trave continua su quattro appoggi, ed immaginiamo che i due vincoli sovrabbondanti si possano sostituire a volontà con altri, ad essi equivalenti a tutti gli effetti statici, ma aventi differenti punti di applicazione.

Per fissar le idee, immaginiamo che le due aste verticali che realizzano quei due vincoli vengano svincolate e collegate invece tra loro da un'asta rigida orizzontale, e che i vincoli siano di poi ricostituiti avendo per punti di applicazione due punti qualunque A, B dell'asta stessa, nel modo indicato nella nostra figura 105.

È evidente che, in queste condizioni, si è condotti ad assumere come incognite iperstatiche le due nuove reazioni X ed Y applicate rispettivamente in A ed in B, e che le reazioni primitive, vale a dire gli sforzi in quelle certe due aste verticali che prima funzionavano da aste di vincolo, sono delle funzioni lineari ed omogenee di queste.

È anche evidente che la linea d'influenza di una qualunque delle nuove incognite, per esempio della X, si può al solito

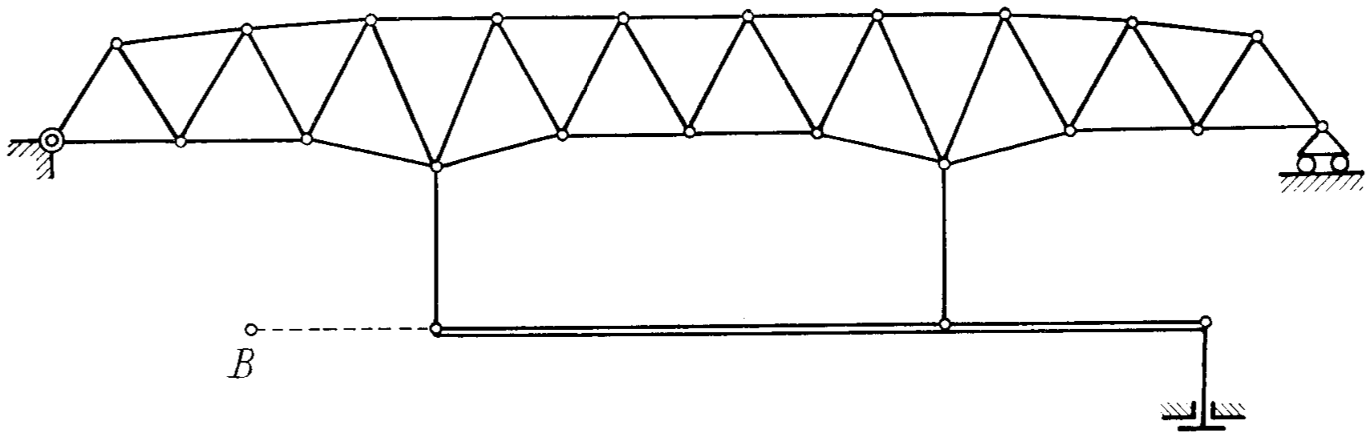


Fig. 106.

ottenere come deformata della trave se si immagina impresso al vincolo operante in A il solito arretramento unitario, nella ipotesi che il punto B sia intanto mantenuto fisso.

Ora immaginiamo che, scelta ad arbitrio la posizione del punto A, si imponga l'arretramento del vincolo ivi operante prescindendo completamente dall'esistenza dell'altro vincolo sovrabbondante (fig. 106).

Nella variazione di configurazione — staticamente determinata — che ne consegue, l'asta rigida di collegamento subirà una certa rotazione attorno ad un certo suo punto ben determinato.

Assumiamo questo centro di rotazione come punto B di applicazione del secondo vincolo sovrabbondante. Ecco che

$$\eta_{yx} = 0$$

Per conseguenza, in virtù del teorema di Betti, dovrà anche essere

$$\eta_{xy} = 0$$

Dovrà cioè accadere che, se si imprime il solito arretramento al secondo vincolo applicato in B, l'asta rigida di collegamento subisce una rotazione attorno ad A come centro (fig. 107).

Le due deformate del sistema staticamente determinato ottenuto liberando idealmente la trave da entrambi i vincoli sovrabbondanti, possono quindi, senza ulteriori trasformazioni, direttamente interpretarsi come le linee di influenza delle due incognite X ed Y nel sistema doppiamente iperstatico dato.

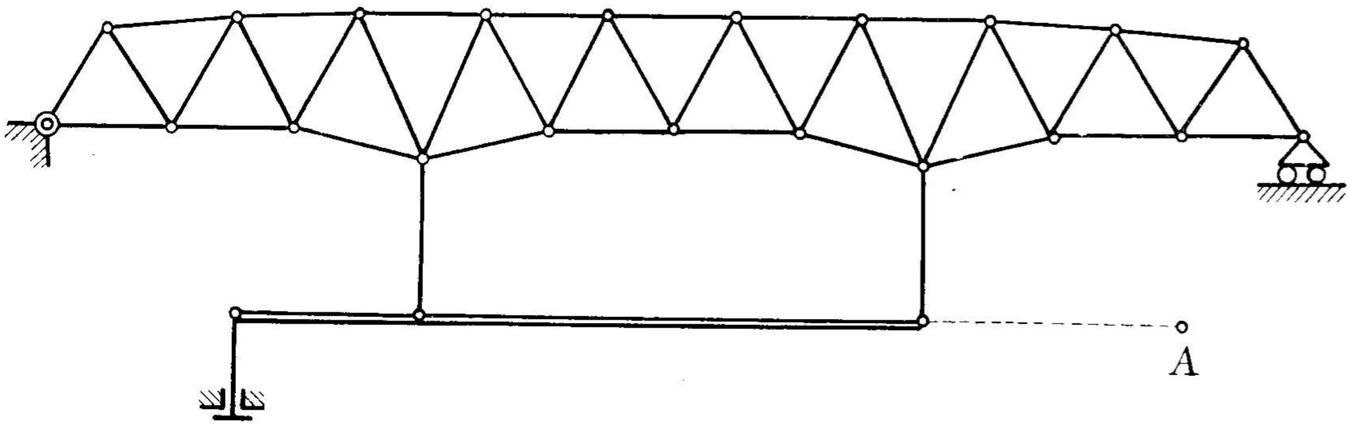


Fig. 107.

In pratica, tra le infinite coppie di punti $A \cdot B$ che così si vengono a definire, ve n'è una che è di tutte la più conveniente; ed è quella che si ottiene supponendo che uno di essi punti vada a coincidere col punto all'infinito dell'asta.

Una delle incognite X è allora un momento, e precisamente il momento di una coppia di forze che si possono sempre immaginar disposte come in figura 108, sicchè le loro linee d'azione coincidono senz'altro cogli assi delle aste di vincolo; l'altra è una forza verticale Y applicata in quel punto attorno a cui l'asta rigida di collegamento ruota sotto l'azione della coppia. Naturalmente sotto l'azione della forza Y l'asta stessa deve poi subire una semplice traslazione verticale.

Le due linee d'influenza assumono allora l'aspetto indicato nella nostra tav. CXXII; esse possono venir tracciate direttamente — vale a dire per proiezione di diagrammi di Williot relativi alla travatura resa staticamente determinata per soppressione di entrambi i vincoli sovrabbondanti, non diversamente da quel che si era potuto fare per le due deformate della tav. CXX — ed hanno il vantaggio di poter venire direttamente utilizzate per lo studio del sistema doppiamente iperstatico dato, senza cioè che si debba passare per il tracciamento di ulteriori linee del tipo di quelle della tav. CXXI.

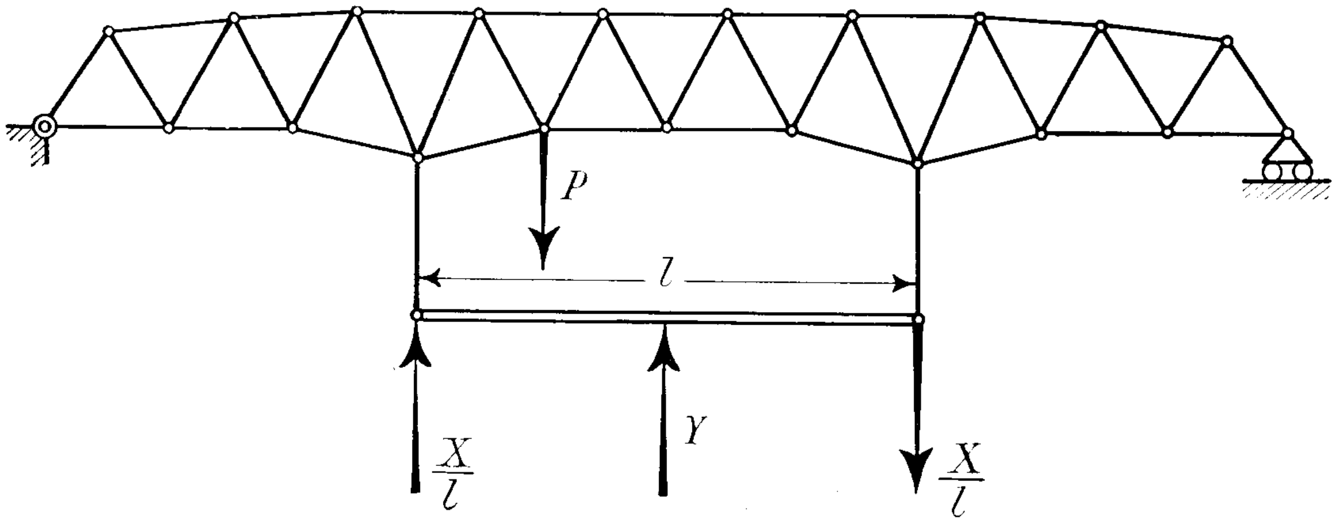


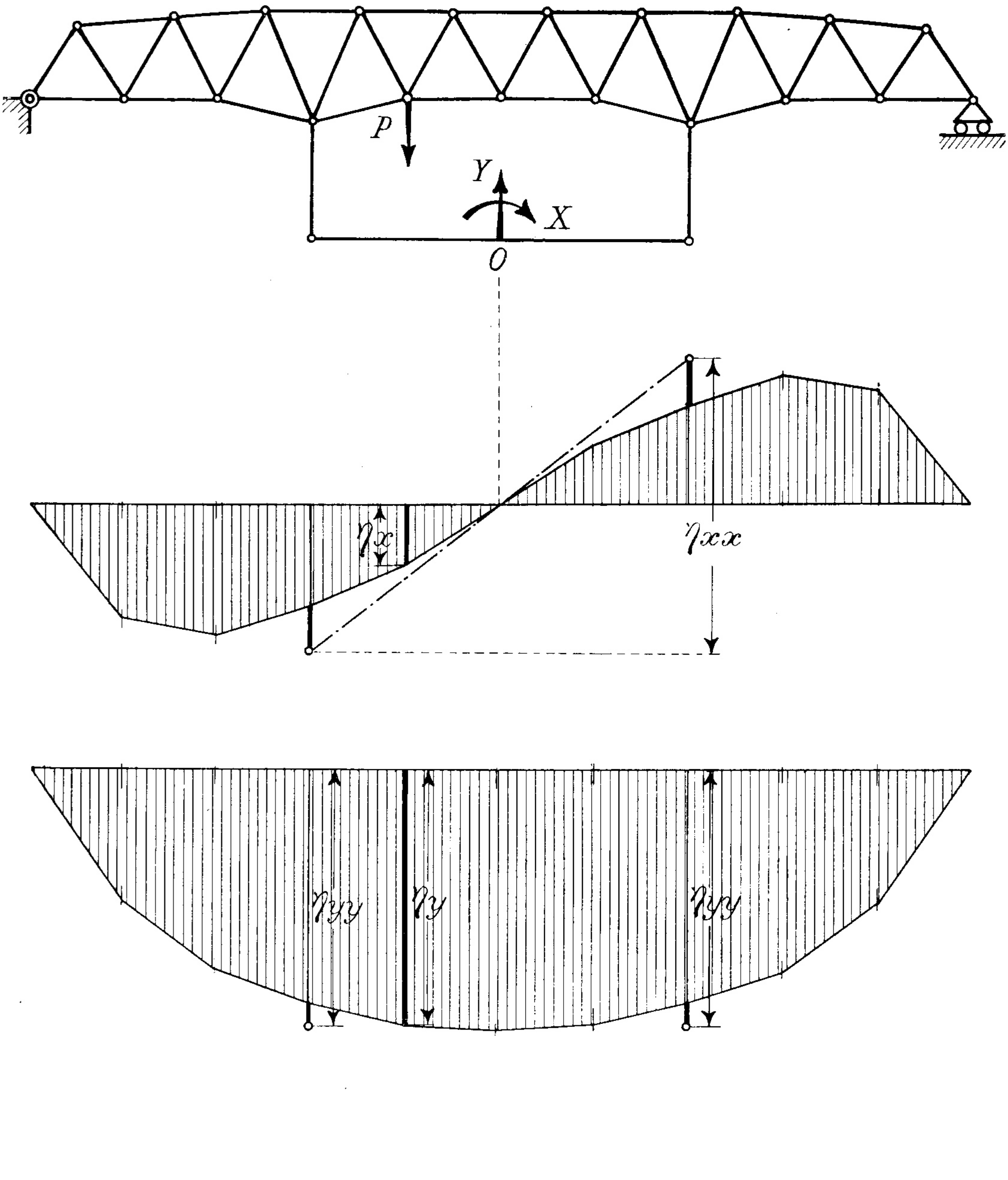
Fig. 108.

Si ha infatti, per un carico P qualunque, supposto di grandezza unitaria, e colle notazioni indicate in figura,

$$\frac{X}{l} = \frac{\eta_x}{\eta_{xx}}$$

$$Y = \frac{\eta_y}{\eta_{yy}}$$

con che il problema iperstatico è da considerarsi come completamente risolto.


P
Y
X
O
ηx
ηxx
ηyy
ηy
ηyy

La figura 109 ci presenta un altro esempio di travatura doppiamente iperstatica; si tratta di una travata a due luci dotata di un appoggio centrale semplice e di due cerniere d'estremità.

Una cerniera ed un appoggio semplice essendo notoriamente sufficienti per definire la posizione del sistema, l'altra cerniera è da considerarsi come sovrabbondante; come incognite iperstatiche si possono assumere le due componenti della relativa reazione secondo due direzioni arbitrarie.

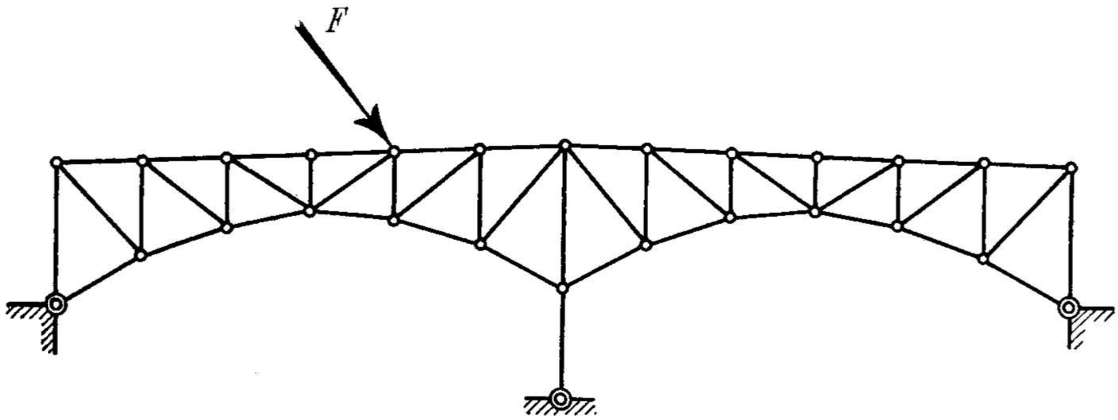
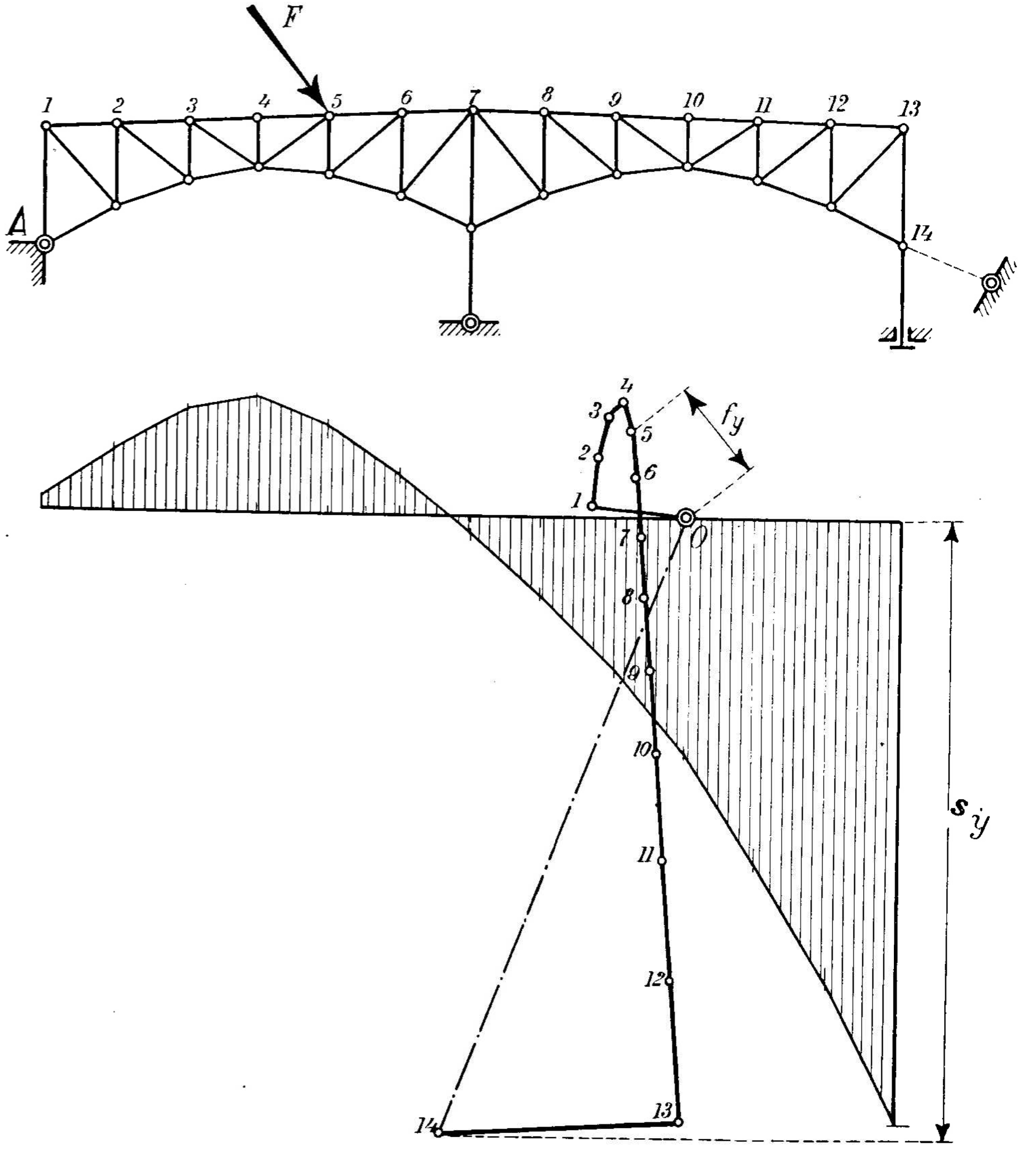


Fig. 109.

A prima vista si potrebbe pensar opportuno adottare per le dette due componenti due direzioni ortogonali, per esempio, la verticale e l'orizzontale; ma si arriva ben presto a riconoscere che le due deformate rispettive non sono, in generale, indipendenti e che perciò le due linee d'influenza non possono ottenersi se non attraverso ad un procedimento analogo a quello da noi esposto a pag. 487 a proposito della trave continua su quattro appoggi.

Più agevolmente e più direttamente si arriva al risultato desiderato se le due direzioni di cui si tratta vengono scelte secondo le norme seguenti.

Supponiamo che l'una di esse sia per esempio verticale, che cioè secondo la verticale sia disposta una delle aste di vincolo che noi immaginiamo facenti capo al nodo 14 (tav. CXXIII) in sostituzione della cerniera sovrabbondante.



F
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
A
f y
O
s y

Imprimiamo idealmente a tale vincolo il solito arretramento unitario ed in funzione dello sforzo (incognito) che in esso si genera calcoliamo gli sforzi nelle singole aste del sistema reso staticamente determinato, le conseguenti variazioni di lunghezza, ed infine gli spostamenti dei nodi. I risultati di tutto questo calcolo sono schematicamente raccolti (almeno per quel che si riferisce ai nodi contrassegnati con un numero) nel diagramma di deformazione rappresentato nella parte inferiore del nostro disegno. Vi compare fra gli altri lo spostamento *0·14* del nodo *14*.

Orbene immaginiamo che al nodo *14* faccia capo, oltre all'asta verticale di cui ci stiamo occupando, anche un'altra asta di vincolo. Se questa seconda asta di vincolo avesse direzione normale a quella del vettore *0·14* è ben evidente che essa non potrebbe in alcun modo opporsi allo spostamento sopra trovato; è ben evidente cioè che la sua presenza non influirebbe in alcun modo sulla variazione di configurazione da noi considerata, e che durante una tale variazione di configurazione la eventuale reazione di una tale nuova asta non farebbe alcun lavoro.

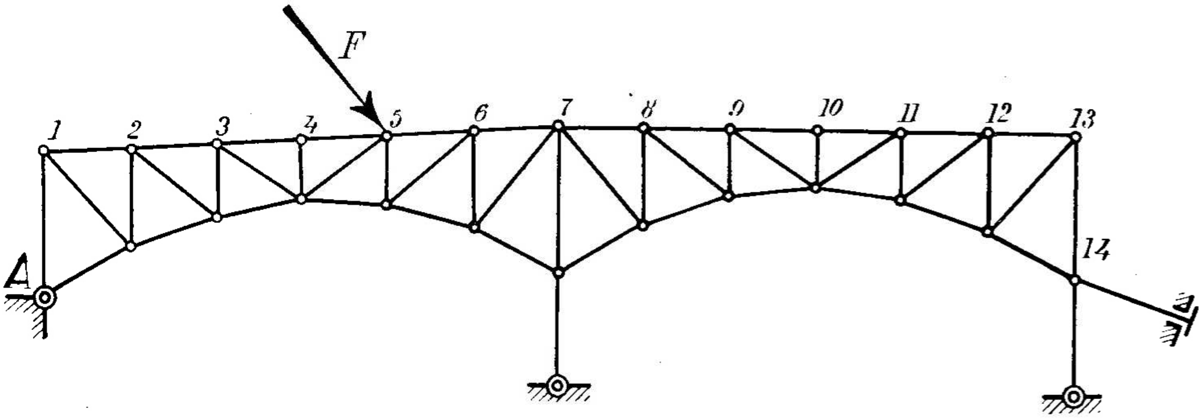
Viceversa, in virtù del teorema di Betti, non dovrebbe neppure far lavoro la reazione della prima asta di vincolo (verticale) qualora il sistema dovesse subire la variazione di configurazione determinata da un arretramento impresso al secondo vincolo; ciò è quanto dire che per tale arretramento lo spostamento del nodo *14* deve risultar diretto normalmente alla prima asta, cioè orizzontalmente.

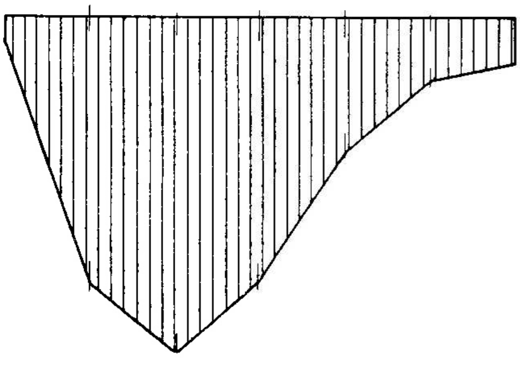
Questa seconda variazione di configurazione è stata rappresentata, nello stesso modo schematico (e limitatamente ai soli nodi contrassegnati con un numero), nella tav. CXXIV.

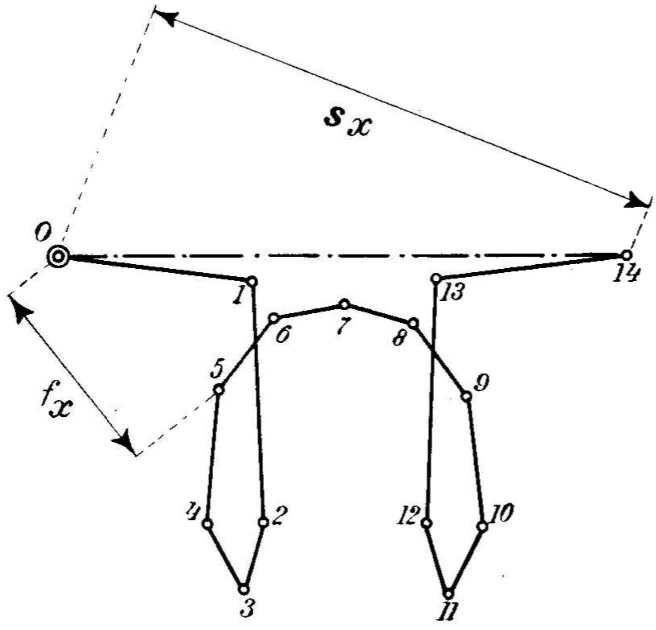
Detti X ed Y i valori delle reazioni che in tali due aste sovrabbondanti si determinano per effetto di una sollecitazione qualunque — nelle nostre figure abbiamo supposto trattarsi di un'unica forza F di grandezza unitaria applicata al nodo *5* della travatura — si ha allora, colle notazioni delle figure,

$$X = \frac{f_x}{\mathbf{s}_x}$$

$$Y = \frac{f_y}{\mathbf{s}_y}$$


F
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
A

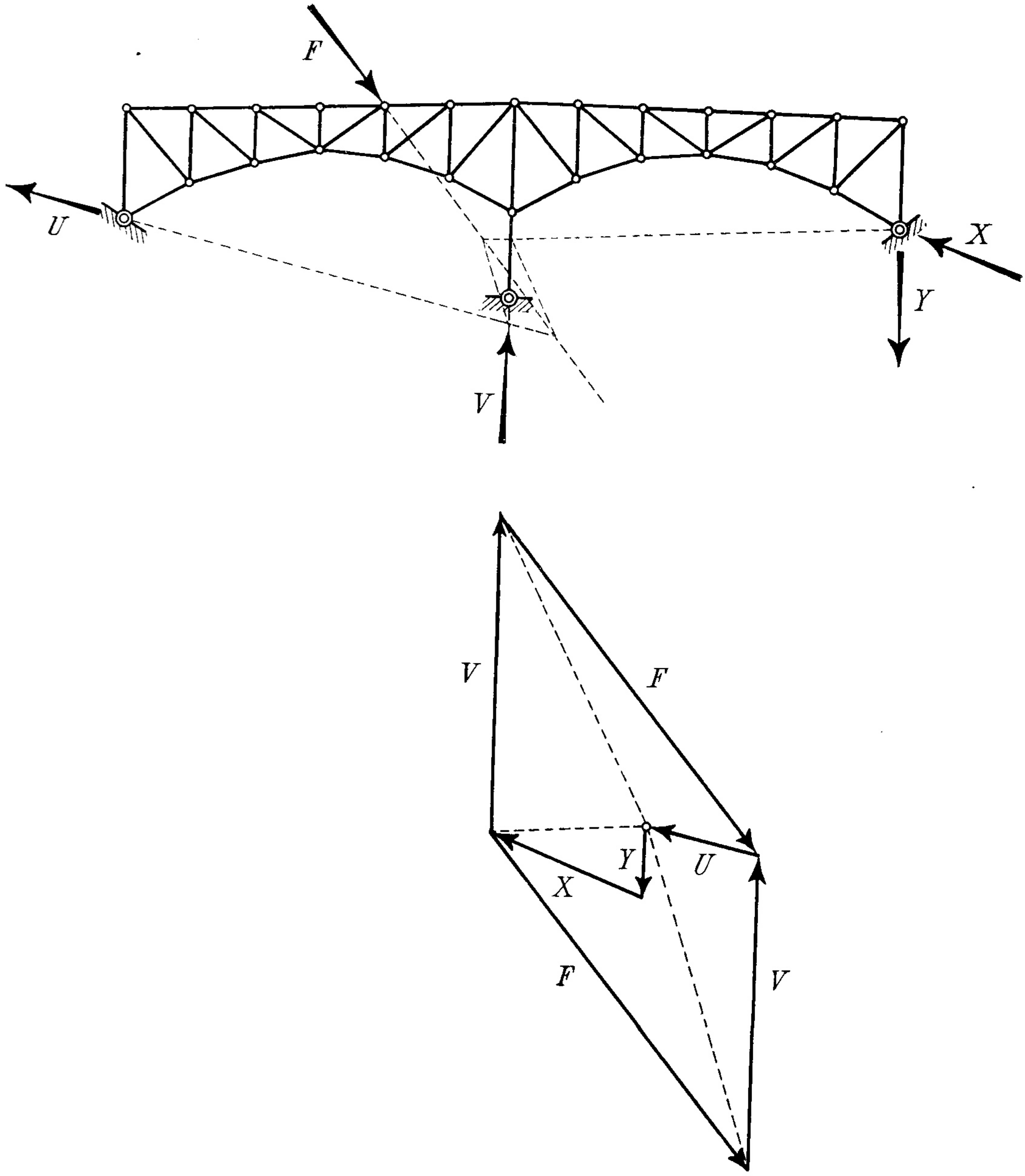



sx
O
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
fx

La distribuzione delle diverse reazioni di vincolo corrispondenti all'ipotesi di carico considerata si trova allora mediante semplici operazioni di composizione di forze nel modo che è chiaramente indicato nella tav. CXXV.

Se i carichi sono tutti diretti secondo un'unica direzione, conviene al solito passare dai diagrammi di deformazione alle deformate secondo la direzione voluta.

Ciò è stato fatto nelle tavole CXXIII e CXXIV nell'ipotesi che le forze siano tutte verticali ed applicate soltanto ai nodi del corrente superiore della trave.


F
U
X
Y
V
V
F
Y
U
X
F
V

Anche più caratteristico è il caso dell'*arco con cerniera in chiave* rappresentato nelle tavole CXXVI e seguenti. Qui il modo più semplice e spontaneo di rendere il sistema staticamente determinato è quello di abolire il duplice vincolo creato dalla cerniera svincolando tra loro le due parti dell'arco. Ad incognite iperstatiche si assumeranno allora le due componenti, secondo due direzioni opportunamente scelte, della reazione che, nel sistema dato, si trasmette attraverso la cerniera dall'uno all'altro semiarco.

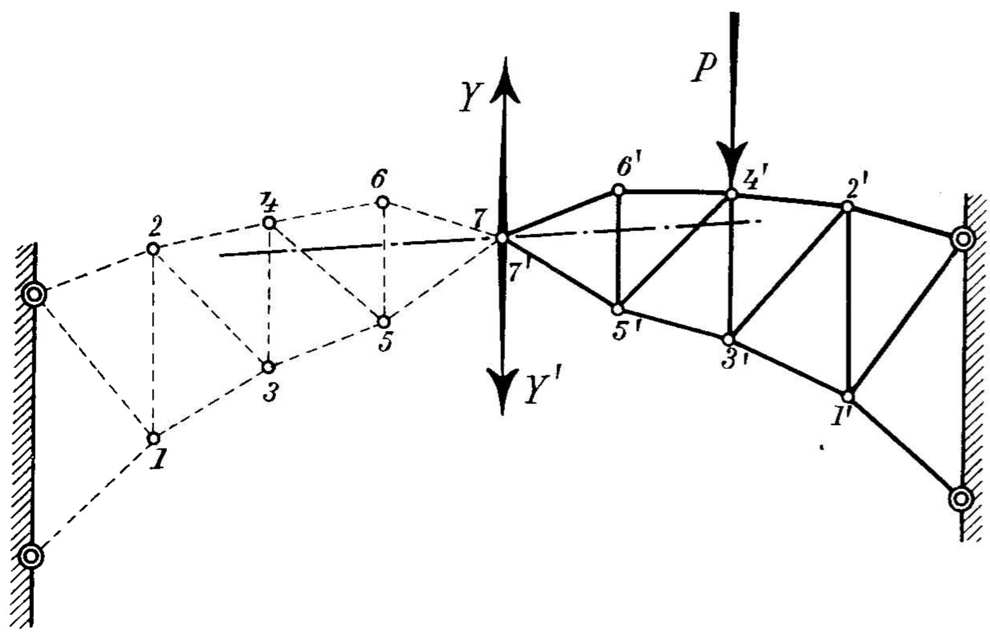
Abbiamo scritto: " secondo due direzioni opportunamente scelte ". In realtà dalla scelta di queste direzioni dipende la possibilità di un tracciamento diretto ed indipendente dalle due linee di influenza.

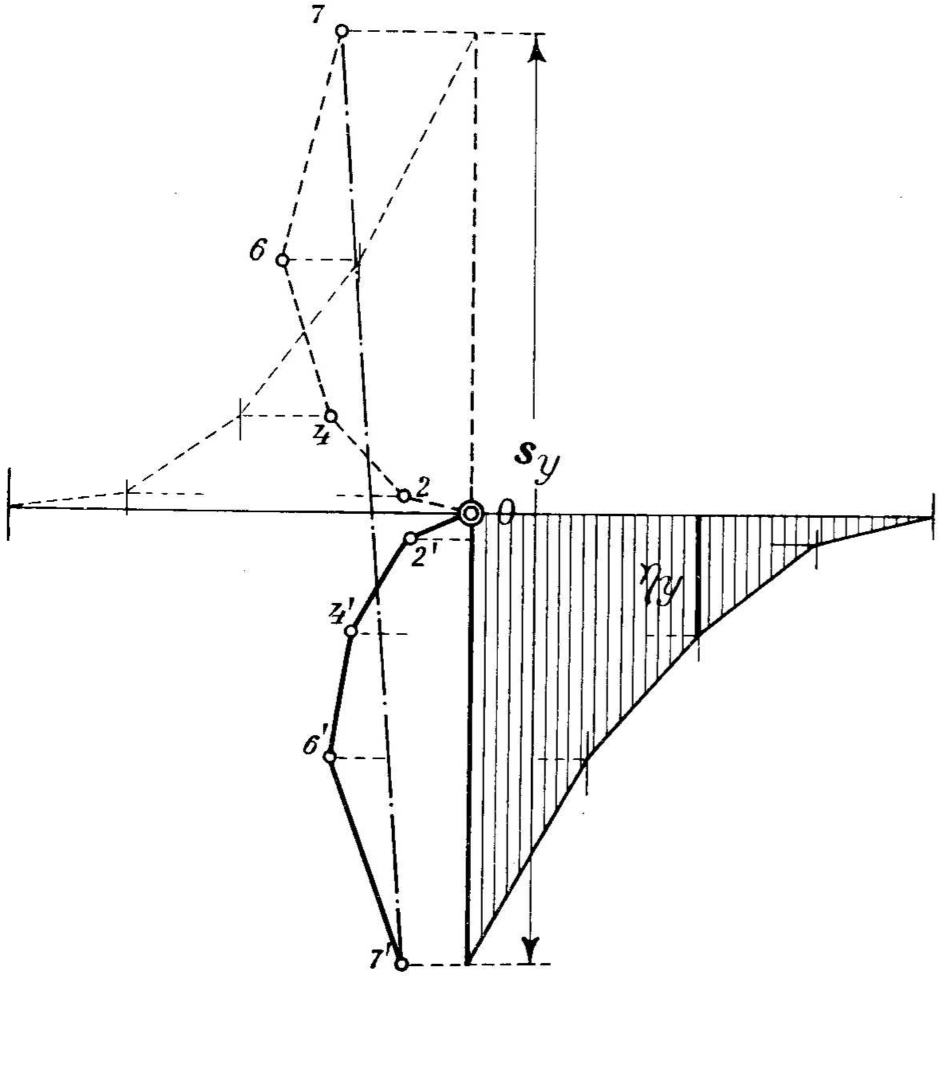
Si supponga invero che una di queste direzioni sia, per esempio, la verticale (tav. CXXVI); più precisamente si assuma come incognita Y una delle componenti (verticale, supposta diretta verso l'alto) dell'azione che in dipendenza di una qualunque condizione di carico il semiarco sinistro esercita, attraverso la cerniera, sul semiarco destro. Con $Y' = -Y$ si è in figura rappresentata l'azione, eguale e contraria, che, nella stessa ipotesi di carico, il semiarco destro esercita, attraverso la stessa cerniera, sul semiarco sinistro.

Supposta impersonata questa incognita in un vincolo semplice (asta verticale di collegamento del nodo 7 estremo di uno dei semiarchi al nodo $7'$ estremo dell'altro semiarco), immaginiamo impressa la solita variazione di lunghezza.

Il diagramma di deformazione che così si ottiene si vede rappresentato, limitatamente ai nodi del corrente superiore, nella figura inferiore della stessa tavola; e da esso è stata poi ricavata per proiezione la deformata verticale di quel corrente.

Rilevata la direzione dello spostamento relativo $7 \cdot 7'$, si assumerà la perpendicolare a tale direzione condotta per la cerniera come linea d'azione dell'altra componente X (tav. CXXVII), o, se si vuole, come asse dell'altra asta ideale con cui bisogna immaginare collegati i due nodi 7 e $7'$ se si vuol ricostituire integro il vincolo già rappresentato dalla cerniera.


P
Y
Y'
1
2
3
4
5
6
7
7'
6'
4'
2'
5'
3'
1'

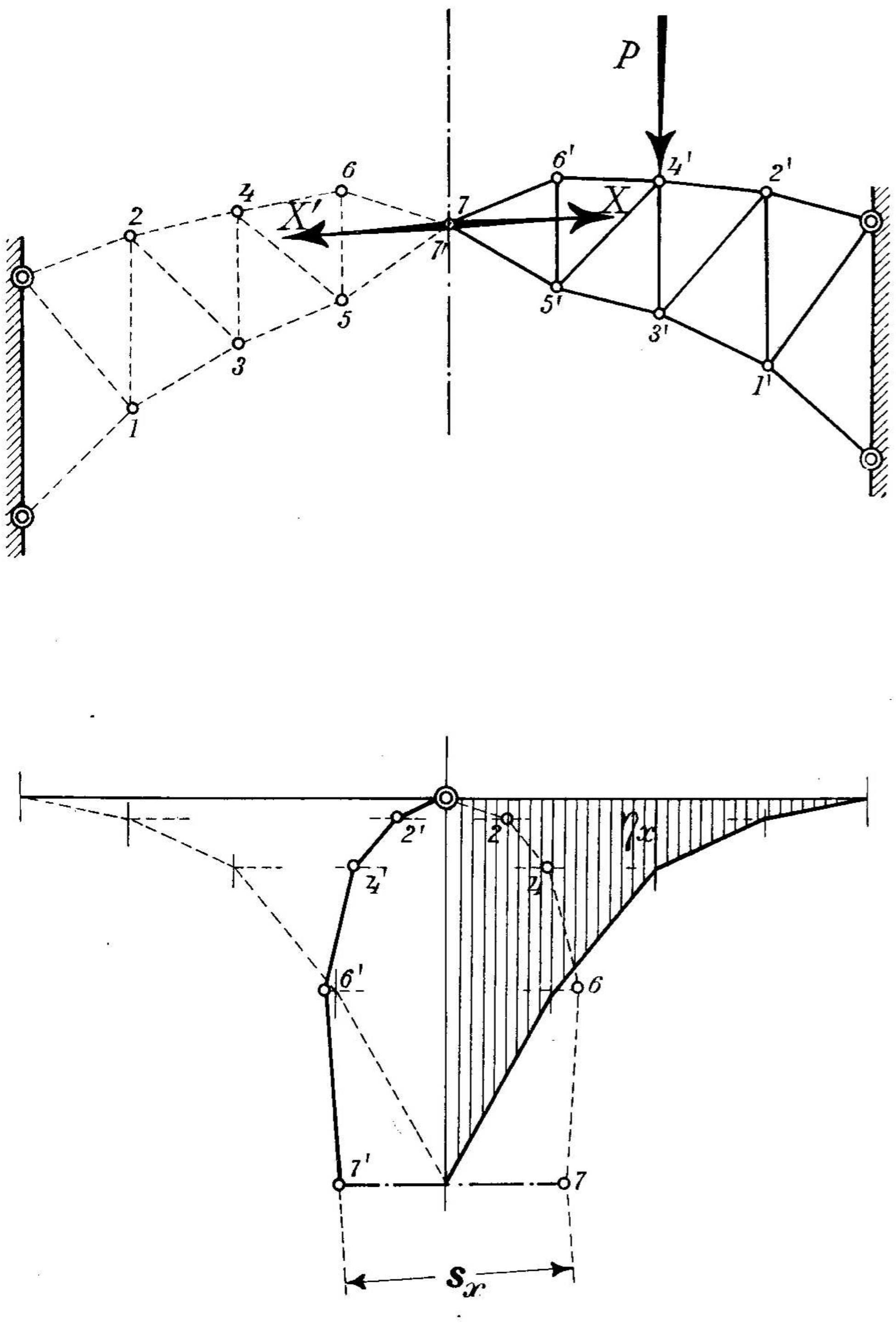

7
6
4
2
0
s_y
η_y
2'
4'
6'
7'

Sappiamo ormai che se si imprime la solita variazione di lunghezza a questa seconda asta, lo spostamento relativo $7 \cdot 7'$ deve riuscir diretto perpendicolarmente alla prima asta, cioè orizzontalmente. E tale esso si presenta in realtà nella figura inferiore della nostra tavola dove è disegnato il relativo diagramma di deformazione, sempre limitatamente ai nodi del corrente superiore, nonchè la conseguente deformata verticale dello stesso corrente.

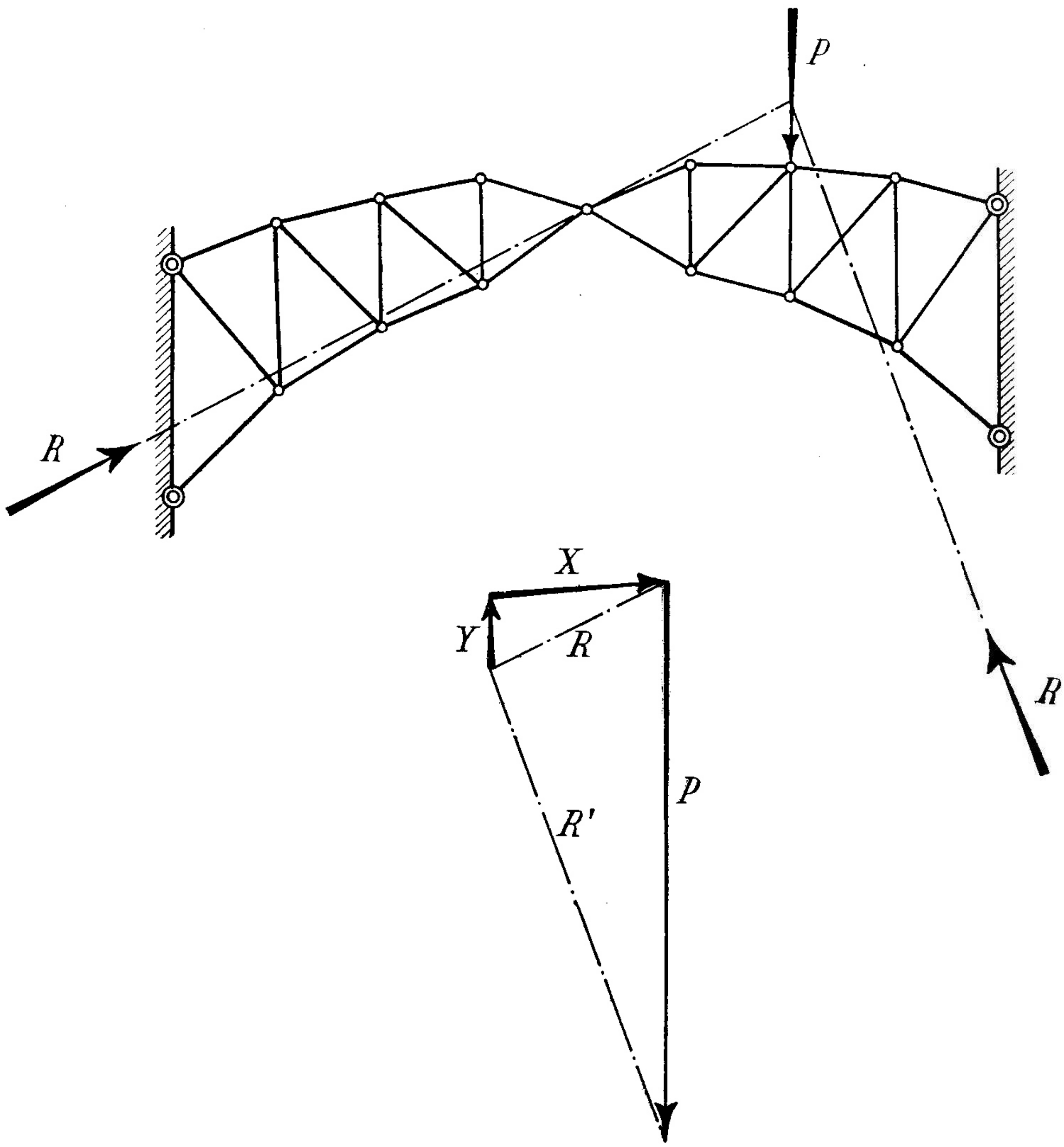
Per una condizione di carico come quella indicata nelle nostre figure, consistente in un'unica forza verticale P che supporremo di grandezza unitaria, si ha colle notazioni indicate

$$X = \frac{\eta_x}{\mathbf{s}_x}$$

$$Y = \frac{\eta_y}{\mathbf{s}_y}$$


P
X
X'
1
2
3
4
5
6
7
1'
2'
3'
4'
5'
6'
7'
η_x
s_x

Le reazioni R ed R' delle due spalle dell'arco si ottengono molto semplicemente colle costruzioni grafiche indicate nella tav. CXXVIII.


P
R
R′
X
Y
R
P
R′