

SISTEMI SEMPLICEMENTE IPERSTATICI

Consideriamo una travatura del tipo rappresentato nella fig. 96 (a pagina seguente) la quale non differisce da quella studiata a pag. 268 se non perchè qui i vincoli sono costituiti da due punti fissi; vi è dunque certamente un elemento sovrabbondante, facilmente identificabile quando si riguardano i due punti fissi come equivalenti a due coppie di vincoli semplici, per es.: a due coppie di aste facenti capo a punti del sistema fisso di riferimento (fig. 97).

Scelta, colle debite cautele, l'asta sovrabbondante, lo sforzo che in essa si verifica sotto l'azione di una qualsiasi condizione di carico si può sempre determinare facendo ricorso al *secondo principio di reciprocità*.

Noi abbiamo infatti dimostrato (a pag. 194) che:

Lo sforzo che si sviluppa in una qualsiasi asta di una travatura reticolare in equilibrio sotto l'azione di date forze esterne F, è misurato dal medesimo numero che misura il lavoro che le forze F eseguirebbero nella variazione di configurazione determinata nella travatura da una variazione unitaria di lunghezza impressa a quell'asta.

Ora, una sola differenza v'è tra l'applicazione che di questo teorema noi abbiamo fatto (a pag. 326 e segg.) nel caso dei sistemi staticamente determinati, e quella che stiamo ora per farne ai sistemi iperstatici. Ed è questa: che nel caso dei sistemi staticamente determinati la variazione di lunghezza impressa ad un'asta produce dei moti rigidi delle varie parti della travatura, ma non fa mai nascere in esse sforzi nè deformazioni elastiche di sorta; mentre nel caso dei sistemi iperstatici la variazione

di lunghezza dell'asta sovrabbondante non è compatibile col mantenersi immutate le lunghezze delle aste rimanenti, le quali da sole bastano a definire completamente la configurazione del sistema: quella variazione di lunghezza può pertanto venir realizzata solo a condizione che si determini un sistema di sforzi, e di conseguenti deformazioni elastiche, in tutte o parte delle altre aste della travatura.

Il problema della costruzione della *variazione di configurazione* cui il teorema si riferisce — problema che era, nel caso dei

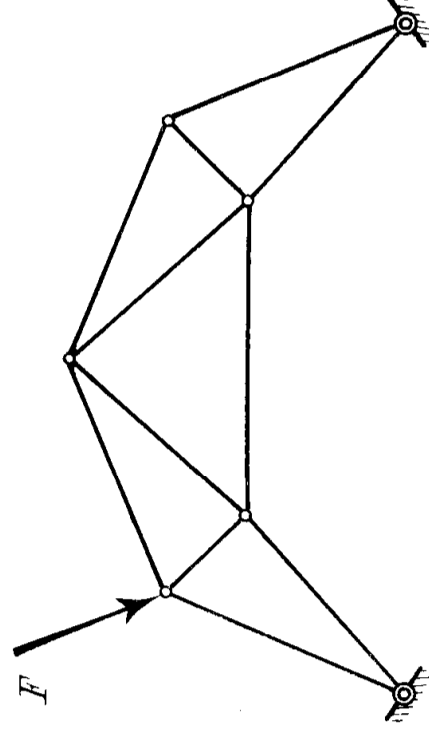


Fig. 96.

sistemi staticamente determinati, un semplice problema di cinematica — diviene, nel caso dei sistemi iperstatici, un problema di deformazione elastica.

Detto questo la nostra via è senz'altro tracciata: lo sforzo che l'asta sovrabbondante, mutando di lunghezza, deve esercitare sul resto della travatura, avrà necessariamente la direzione stessa dell'asta e sarà naturalmente applicato ai nodi cui l'asta fa capo; esso avrà sempre segno contrario a quello della variazione di lunghezza impressa da cui deriva — sarà cioè di compressione se all'asta si è voluto imprimere un allungamento; se invece nascerà sarà evidentemente di tensione — ma quel che più preme rilevare si è che la grandezza di questo sforzo può, almeno per il momento, restare affatto indeterminata; in funzione di essa noi potremo egualmente calcolare gli sforzi, e per conseguenza le variazioni elastiche di lunghezza, in tutte le altre aste della travatura.

Dopo di che il problema del tracciamento della linea d'influenza sotto forma di deformata si risolve immediatamente mediante la costruzione di un ordinario diagramma di Williot.

C'è però da fare un'avvertenza importante, ed è questa: In un sistema iperstatico — ed in particolare in un sistema semplicemente iperstatico, come son quelli di cui stiamo per occuparci — non conviene procedere al tracciamento delle linee di influenza degli sforzi nelle singole sue aste, ripetendo

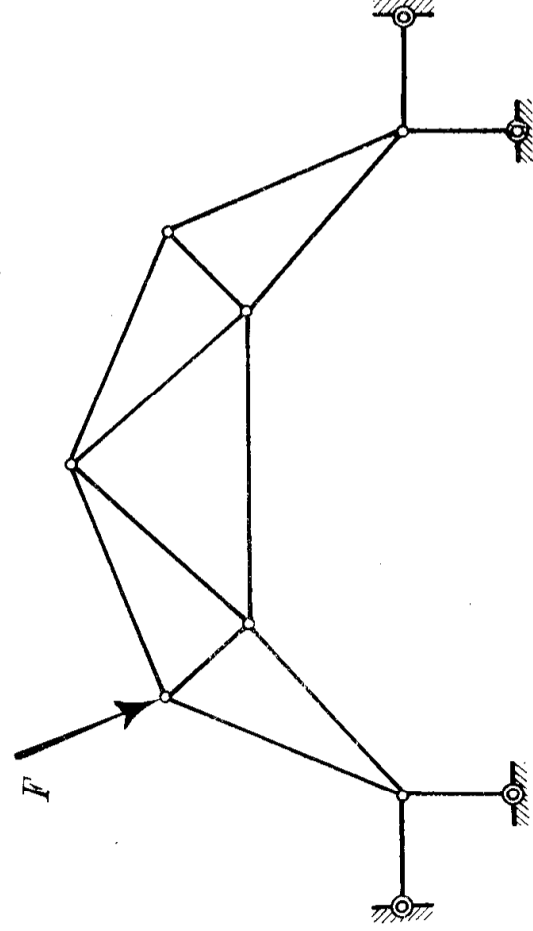


Fig. 97.

per ciascuna di esse il procedimento descritto. Conviene applicare questo procedimento alle sole aste sovrabbondanti — nel caso concreto all'unica asta sovrabbondante — e dedurre poi le linee di influenza degli sforzi in tutte le altre aste valendosi delle relazioni della statica, vale a dire operando sul sistema reso così staticamente determinato.

E ancora: per delle ragioni che sarebbe lungo illustrare qui, ma che appariranno chiare dal seguito della nostra trattazione, non conviene scegliere comunque, cioè in uno qualunque dei tanti modi leciti, le incognite iperstatiche. Conviene subordinare questa scelta alle eventuali semplificazioni che da essa possono derivare nella applicazione del procedimento di calcolo.

Così in tutti quei casi — e son moltissimi — in cui l'iperstaticità del sistema può essere considerata come dipendente da una sovrabbondanza di vincoli, si è senz'altro condotti a tracciar

per prima cosa le linee d'influenza del vincolo o dei vincoli sovrabbondanti; dopo di che non è raro il caso che il tracciamento delle linee d'influenza degli sforzi nelle aste propriamente dette (cioè di collegamento dei nodi a due a due) non presenti più alcuna difficoltà.

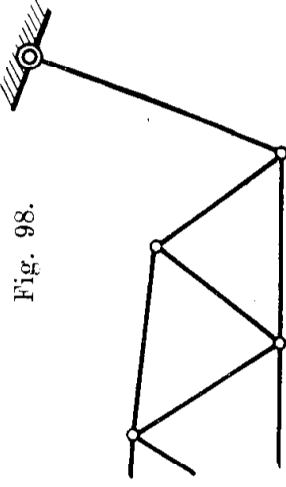


Fig. 98.

Ora, nello studio delle reazioni è invalsa la consuetudine di tener presenti le particolari caratteristiche costruttive del vincolo, e di considerarlo come positivo le reazioni se dirette in quel senso secondo il quale il vincolo è destinato *normalmente* a funzionare.

Così, se si tratta di un'asta collegante un nodo della travatura con un punto del sistema

fisso di riferimento, si usa distinguere in pratica il caso del *tirante di sospensione* previsto per lavorare a trazione (fig. 98), dal caso del *puntone d'appoggio* destinato e progettato in modo che resista a sforzi di compressione (fig. 99).

Nel primo caso si considera come positiva la reazione se l'asta è tesa; nulla vi è pertanto da mutare nelle nostre convenzioni secondo le quali abbiamo imparato a considerare positive le tensioni in considerazione del fatto che le conseguenti variazioni di lunghezza consistono in allungamenti, vale a dire in variazioni di lunghezza essenzialmente positive.

Nell'altro caso invece la consuetudine vuole che si consideri come positiva la reazione se si traduce in uno sforzo di compressione dell'asta che la trasmette; ed a questo caso va evi-

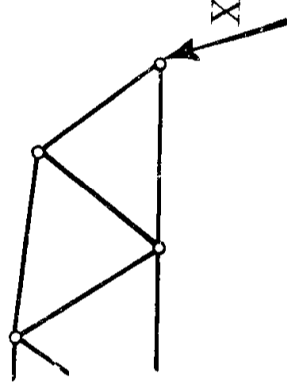
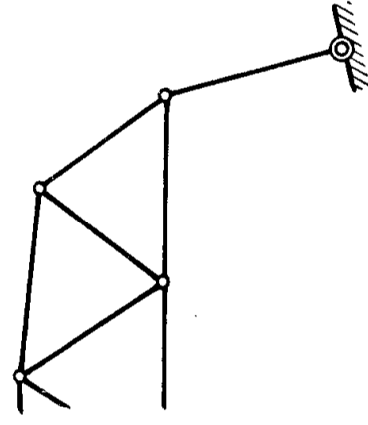
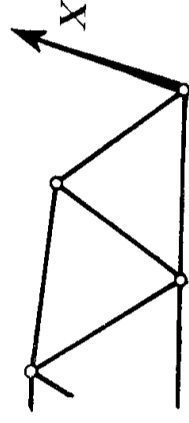


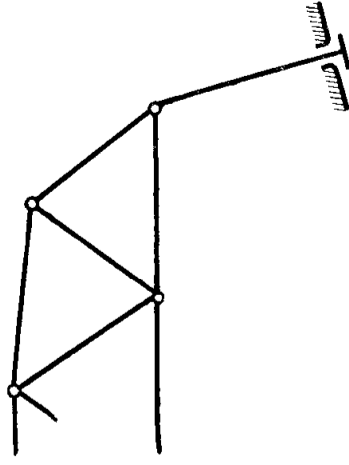
Fig. 99.

dentemente assimilato anche l'altro, frequentissimo nella costruzione dei ponti, in cui il vincolo è rappresentato da un carrello di dilatazione scorrevole sopra un piano fisso d'appoggio (fig. 100).

Per non violare questa consuetudine — la quale non manca, per verità, di qualche giustificazione pratica, e che comunque è ormai seguita da tutti gli Autori — noi faremo allora una deroga, d'altronde più formale che sostanziale, alle nostre convenzioni abituali; ed accetteremo di riguardar come positivo uno sforzo di compressione. Con la conseguenza, naturalmente, che allorché si tratterà di applicare in questi casi il secondo principio di reciprocità e di introdurre le nostre solite *variazioni di lunghezza impresse*, dovremo cambiar di segno anche a queste variazioni, e considerar come positivi gli *accorciamenti* impressi alle aste di vincolo o gli equivalenti *cedimenti* degli appoggi scorrevoli.

Volendo mantenere una certa uniformità di linguaggio, e comprendere in un'unica dicitura i vari casi concreti che nella pratica ci si potranno presentare, noi, in luogo di parlare del nostro solito *allungamento unitario dell'asta*, impiegheremo quì l'espressione *arretramento unitario del vincolo*, intendendo che il vincolo sia realizzato mediante un dispositivo di ancoraggio (fig. 101) al quale si possa imprimere a volontà uno spostamento in direzione opposta a quella delle reazioni positive.

Fig. 101.



Va da sè che, come un allungamento ad un'asta sovrabbondante non può essere impresso se non a condizione di far nascere in essa uno sforzo di compressione (cioè uno sforzo negativo), così un arretramento di un vincolo sovrabbondante non può essere impresso se non a condizione di far nascere in esso una reazione negativa.

On d'è che il calcolo degli sforzi, e delle conseguenti deformazioni, nel resto della travatura — la quale, se il primitivo sistema era semplicemente iperstatico, è ora staticamente deter-

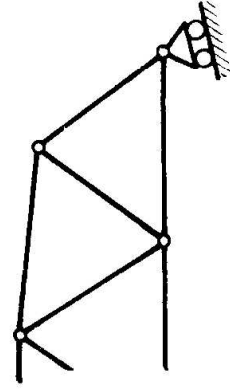


Fig. 100.

minata — si può sempre ed immediatamente eseguire supponendo che il vincolo sovrabbondante sia semplicemente sostituito dall'azione di una forza esterna

— X

di grandezza affatto indeterminata, e diretta nel senso opposto a quello delle reazioni positive.

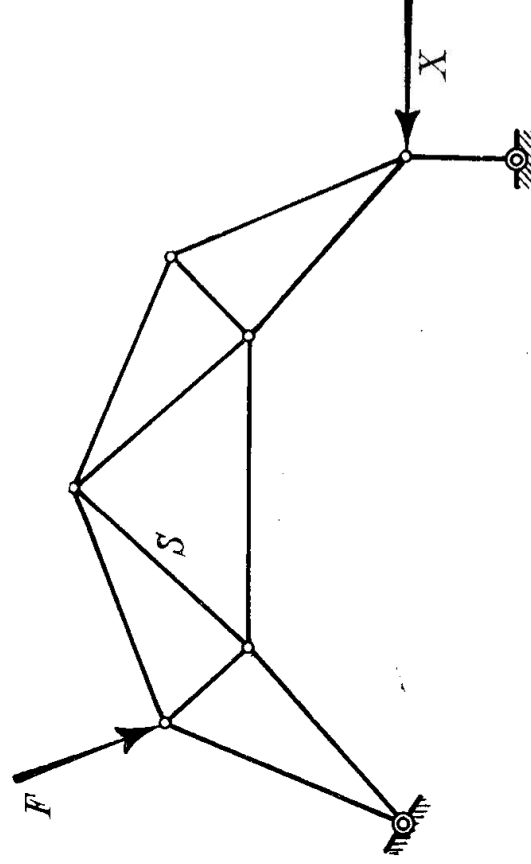


Fig. 102.

Se, tanto per fissar le idee sul problema concreto rappresentato nelle figg. 96 e 97, noi assumiamo come asta sovrabbondante l'asta di vincolo orizzontale destra, epperò come incognita iperstatica la grandezza X della reazione indicata in fig. 102, il problema che ci troviamo a dover risolvere rientra nell'ambito di quelli già trattati nella tav. XXII.

Nel caso attuale il diagramma Cremoniano assume l'aspetto indicato nella fig. 103, nella quale esso è stato tracciato supponendo

$$X = 1$$

Di questo diagramma noi potremo evidentemente servirci per calcolare gli sforzi, e quindi le variazioni di lunghezza, nelle singole aste della travatura, per il valore $-X$ della reazione di vincolo. E, sempre in funzione di questo valore, noi potremo immediatamente passare al tracciamento del diagramma di Williot.

Questo, nel caso concreto, tenuto conto della simmetria del sistema, ha potuto venir costruito nella tav. CVII, partendo dalla

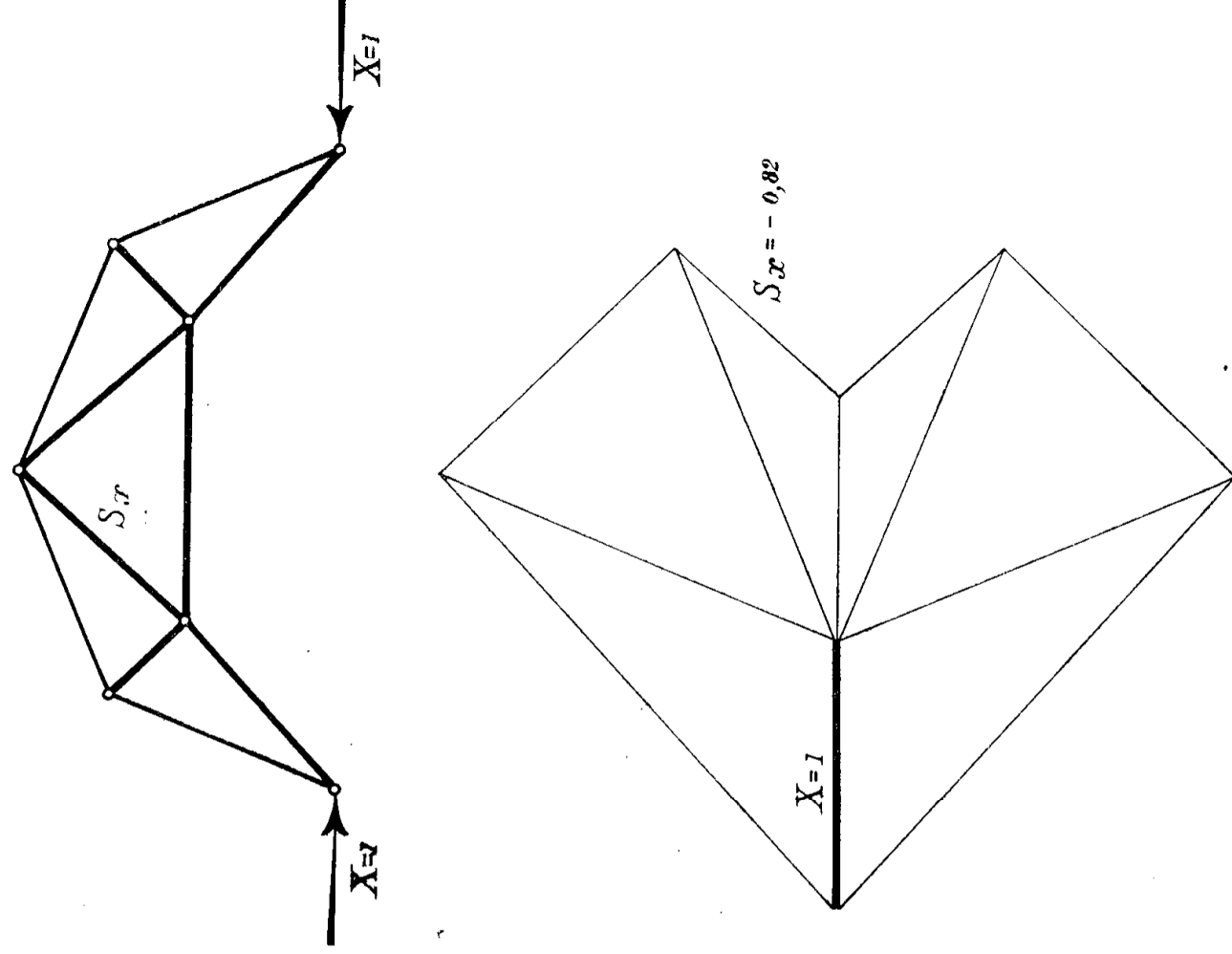


Fig. 103.

duplice ipotesi che, nella deformazione determinata dal supposto arretramento del vincolo (0, ciò che fa lo stesso, dalla sollecitazione $-X$), rimanesse fisso il punto di mezzo dell'asta 1.5 ed immutabile la direzione di quest'asta. Questa seconda parte dell'ipotesi essendo in realtà verificata, il diagramma è atto a

fornire senz'altro gli spostamenti effettivi, purché, a costruzione eseguita, si operi lo spostamento del polo occorrente per correggere l'errore indotto dalla prima parte dell'ipotesi, che non è verificata. Su di esso diagramma si potranno allora leggere direttamente così lo spostamento orizzontale s_x del nodo b , *avvertimento impresso al vincolo*, come lo spostamento f di un qualsiasi nodo (2) nella direzione della forza F ad esso nodo eventualmente applicata.

In virtù del secondo principio di reciprocità, la grandezza X dello sforzo sviluppato dall'asta sovrabbondante allorché la travatura è soggetta all'azione della forza esterna F è determinata dall'equazione

$$X \cdot s_x = F \cdot f$$

Se invece di una sola forza esterna ve ne son diverse, si scriverà naturalmente

$$X \cdot s_x = \Sigma F \cdot f$$

Porre in questa equazione, come suggerisce l'enunciato del teorema,

$$s_x = 1$$

ovvero risolvere l'equazione rispetto alla X e scrivere

$$X = \sum F \cdot \frac{f}{s_x}$$

equivale sempre ad assumere il segmento s_x , qualunque sia risultato dalle nostre costruzioni, come unità di misura per la lettura degli spostamenti f .

Resta così confermato che la grandezza della forza sviluppata dal vincolo sovrabbondante nell'atto in cui ad esso viene impresso il voluto arretramento, può restare senza inconvenienti indeterminata.

Non solo, ma la scala stessa in cui si intendono rappresentare le deformazioni nella costruzione del diagramma di Williot può venire assunta affatto ad arbitrio, tenendo conto soltanto delle opportunità grafiche che di volta in volta possono presentarsi.

Il risultato a cui noi tendiamo non dipende infatti che dai rapporti delle deformazioni; non occorre quindi conoscer di queste i valori assoluti; qualche volta riesce comodo calcolarle

soltanto a meno di una costante indeterminata. Quanto alla scala in cui verranno rappresentate in disegno, la migliore sarà quella che meglio si presta a determinar graficamente quei rapporti colla maggior possibile esattezza.

Se i carichi applicati alla travatura sono, come a volte accade, sempre e tutti verticali, delle deformazioni calcolate interessano le sole componenti verticali.

Giova allora sostituire al diagramma degli spostamenti effettivi rappresentato nella tav. CVII, il diagramma degli spostamenti verticali che è stato disegnato nella tav. CVIII per i nodi del corrente superiore. Si ottiene così quella che, in base alle nostre solite convenzioni, chiameremo la *linea d'influenza dell'incognita iperstatica X* per carichi verticali applicati sul corrente superiore della travatura, o su di una sovrastruttura ad esso corrente collegata nel modo abituale.

S'intende che l'unità di misura con cui vanno lette le ordinate di questa linea d'influenza resta sempre il segmento s_x della tav. CVII.

A questo proposito dobbiamo fare un'osservazione.

È noto — e risulta anche da quanto abbiamo avuto occasione di dire e di dimostrare nella nostra "Teoria generale delle trature reticolari", — che il diagramma degli spostamenti (o deformata) secondo una data direzione può ottenersi direttamente sotto forma di poligono funicolare di certi pesi elastici le cui grandezze si calcolano facilmente quando son note le dimensioni delle singole aste e le grandezze degli sforzi a cui esse sono soggette.

Vi sono pertanto molti Autori i quali preferiscono ricorrere a questa via per tracciare le linee d'influenza delle incognite iperstatiche.

Ora, salvo qualche caso particolarissimo, del quale ci riserviamo di far cenno in seguito, la costruzione di quei poligoni funicolari conduce bensì a determinare la forma della linea d'influenza, ma ne lascia indeterminata la scala. Resta, in altri termini, da trovarsi l'unità di misura s_x , per la determinazione della quale quegli Autori sono costretti a suggerire un calcolo

TAVOLA CVIIL.

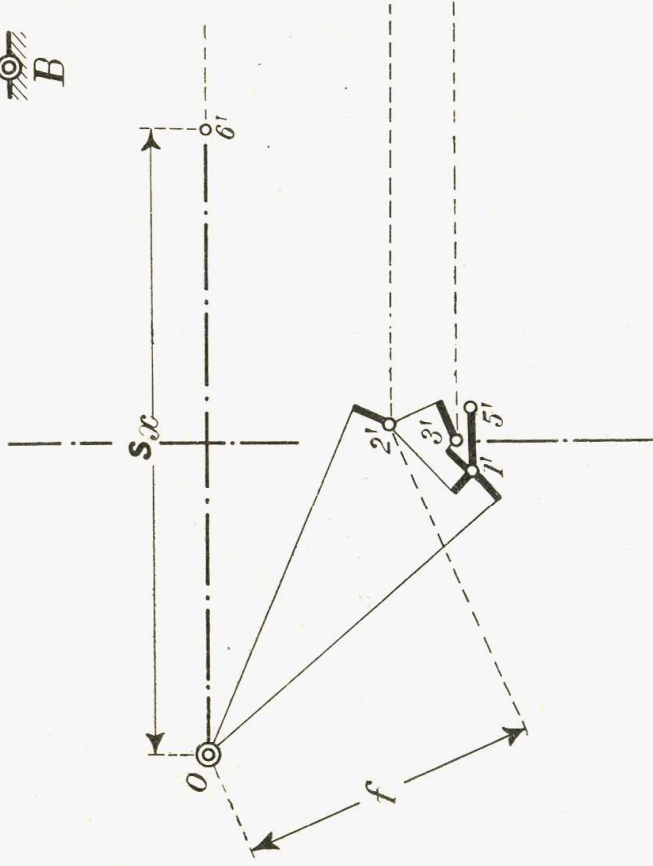
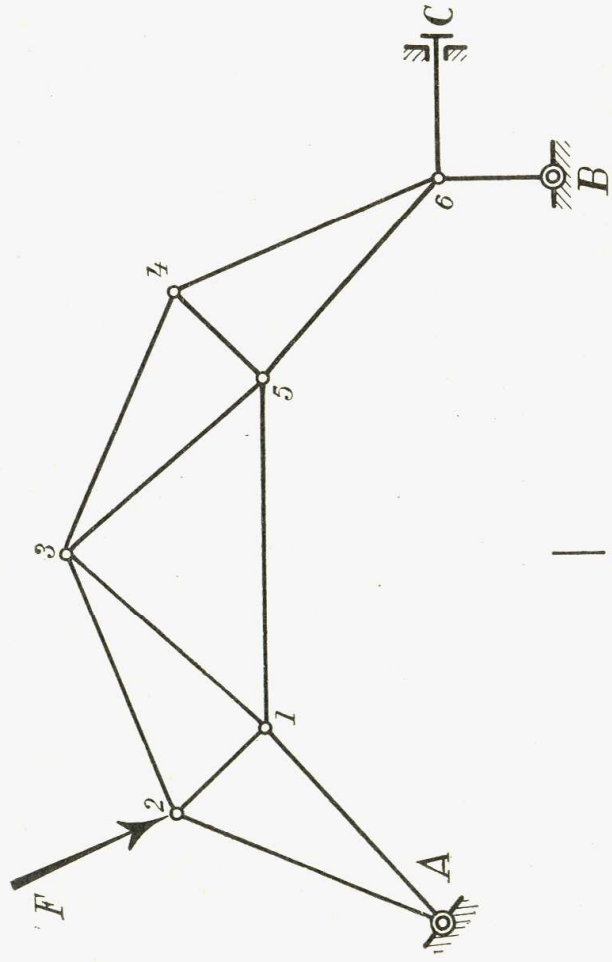
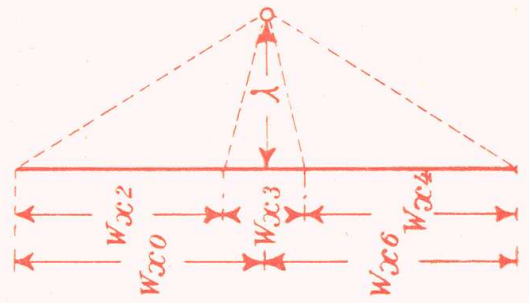
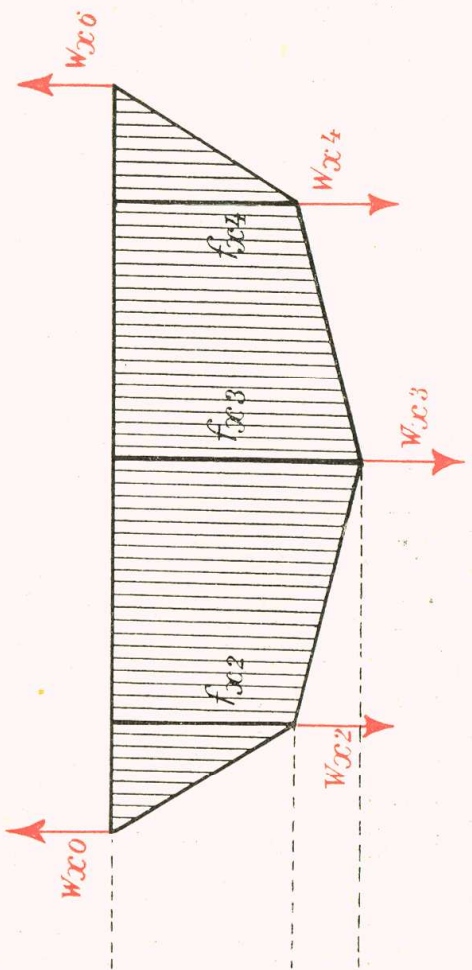
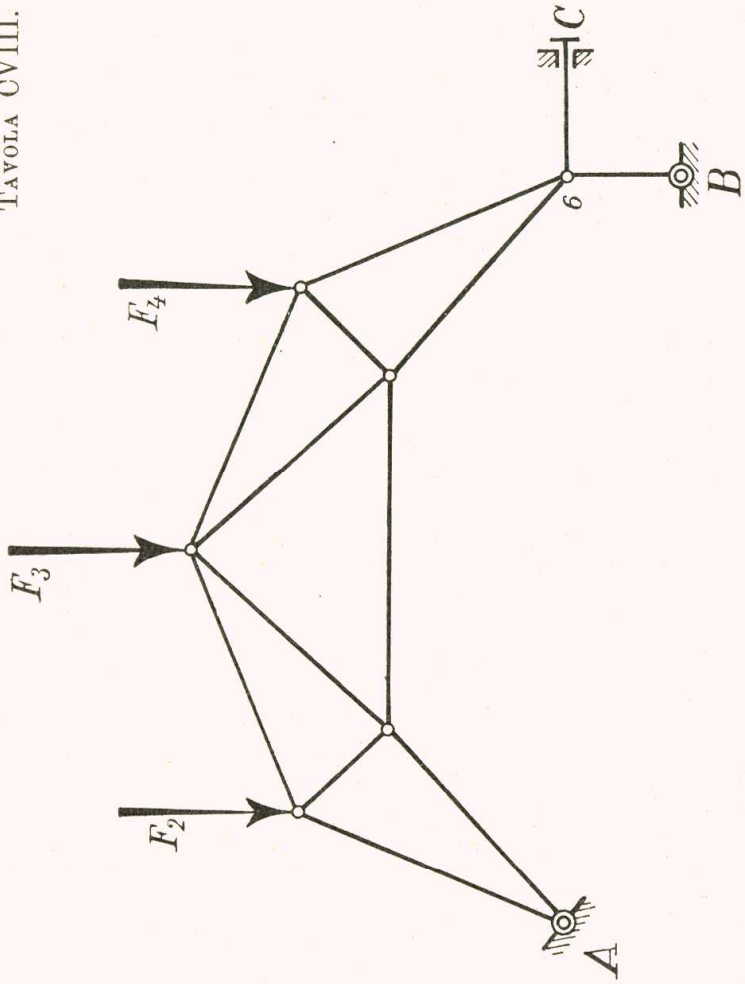


TAVOLA CVIII.



a parte: potrà trattarsi in qualche caso di costruire una nuova deformata secondo un'altra direzione; più frequentemente converrà servirsi di un procedimento analitico, come quello a cui conduce l'applicazione del teorema delle derivate del lavoro (teorema di CASTIGLIANO).

Chi scrive ritiene senza esitazione che, tanto dal punto di vista della approssimazione raggiungibile nei risultati, come da quello della probabilità di accorgersi subito dei possibili errori grossolani, sia sempre meglio ricavar l'unità di misura dalla stessa costruzione grafica di cui ci si serve per tracciare la linea d'influenza; e considera pertanto la soluzione impostata sull'uso del diagramma di Williot come generalmente preferibile alle altre cui qui si è accennato.

Ciò appare tanto più vero se si tien conto che il metodo di Williot permette anche, quando non si richieda una precisione assoluta di risultati, delle semplificazioni notevoli: quella, per esempio, di trascurare le deformazioni delle aste di parete.

Basta infatti che noi ci soffermiamo un momento a confrontare i risultati delle costruzioni riprodotte nelle tavole XC, XCI, XCII e XCIII, perchè ne risulti subito la piccola importanza che sui risultati stessi, vale a dire sulla grandezza degli spostamenti dei nodi, ha la diversa disposizione delle aste di parete. L'esperienza dimostra che, nella maggior parte dei casi pratici, l'errore che si commette trascurando addirittura la deformabilità di queste aste non è molto grande.

Quando poi lo scopo del calcolo non è quello di trovare i valori assoluti degli spostamenti dei vari nodi, ma si limita, come accade nel caso di cui ci stiamo occupando, alla ricerca dei rapporti di questi spostamenti, l'errore relativo che si commette trascurando la deformabilità delle aste di parete diviene quasi sempre piccolissimo e può essere con tutta tranquillità tollerato.

**

Risolto il problema iperstatico — determinato cioè il valore X che alla reazione del vincolo od allo sforzo nell'asta assunta come sovrabbondante spetta per una qualsiasi condizione di carico — il calcolo degli sforzi nelle aste rimanenti non deve più presentare alcuna difficoltà sostanziale.

Intanto è evidente che, noto lo sforzo X nel vincolo o nell'asta sovrabbondante, questa può venire idealmente soppressa e sostituita a tutti gli effetti statici dal detto sforzo, da trattarsi come una qualunque delle forze esterne date. Con ciò la travatura diviene staticamente determinata ed il suo studio si può in ogni caso eseguire con uno dei metodi che noi conosciamo.

Per esser più precisi basterà ricordare che lo sforzo S in un'asta generica si può sempre esprimere sotto la forma (pag. 142)

$$S = S_p + S_x X$$

dove S_p è quello che abbiamo a suo tempo chiamato lo sforzo principale — vale a dire lo sforzo che nella stessa asta generica verrebbe prodotto dal sistema dato di forze esterne, nella travatura resa staticamente determinata per soppressione del vincolo o dell'asta sovrabbondante — epperò può sempre determinarsi mediante un diagramma Cremoniano.

$$S_x = \frac{dS}{dX}$$

è invece lo sforzo che, nella stessa asta generica della stessa travatura staticamente determinata, verrebbe prodotto, in assenza di forze esterne, dalla sollecitazione

$$X = 1$$

il suo valore si può quindi senz'altro leggere sul diagramma Cremoniano da noi costruito in fig. 103.

È poi ovvio che la formola scritta non serve solo a calcolare il valore dei diversi sforzi S nelle diverse aste della travatura per una qualsiasi condizione di carico, previa la costruzione di un diagramma Cremoniano relativo alla condizione di carico stessa; essa formola può anche servire a farci conoscere la legge secondo cui ciascuno di quegli sforzi varia al variare dell'ipotesi di carico.

Incominciamo col considerare il caso più semplice: quello in cui le forze esterne applicate alla travatura son tutte verticali.

Allora la formola ci consentirà di dedurre la linea d'influenza di un qualunque sforzo S dalla linea d'influenza del corrispondente sforzo S_p che noi abbiamo imparato a tracciare a pag. 338

(tav. LV) e da quella dell'incognita X della cui costruzione ci siamo occupati testè (tav. CVIII).

Designata infatti con f_p l'ordinata generica della prima di queste linee e con f_x la corrispondente ordinata della seconda — nell'ipotesi che esse siano state tracciate, o che siano state ridotte successivamente, nella medesima scala; che cioè valga per entrambe la stessa unità di misura — l'ordinata generica η della linea d'influenza dello sforzo S si potrà subito scrivere sotto la forma

$$\eta = f_p + S_x f_x$$

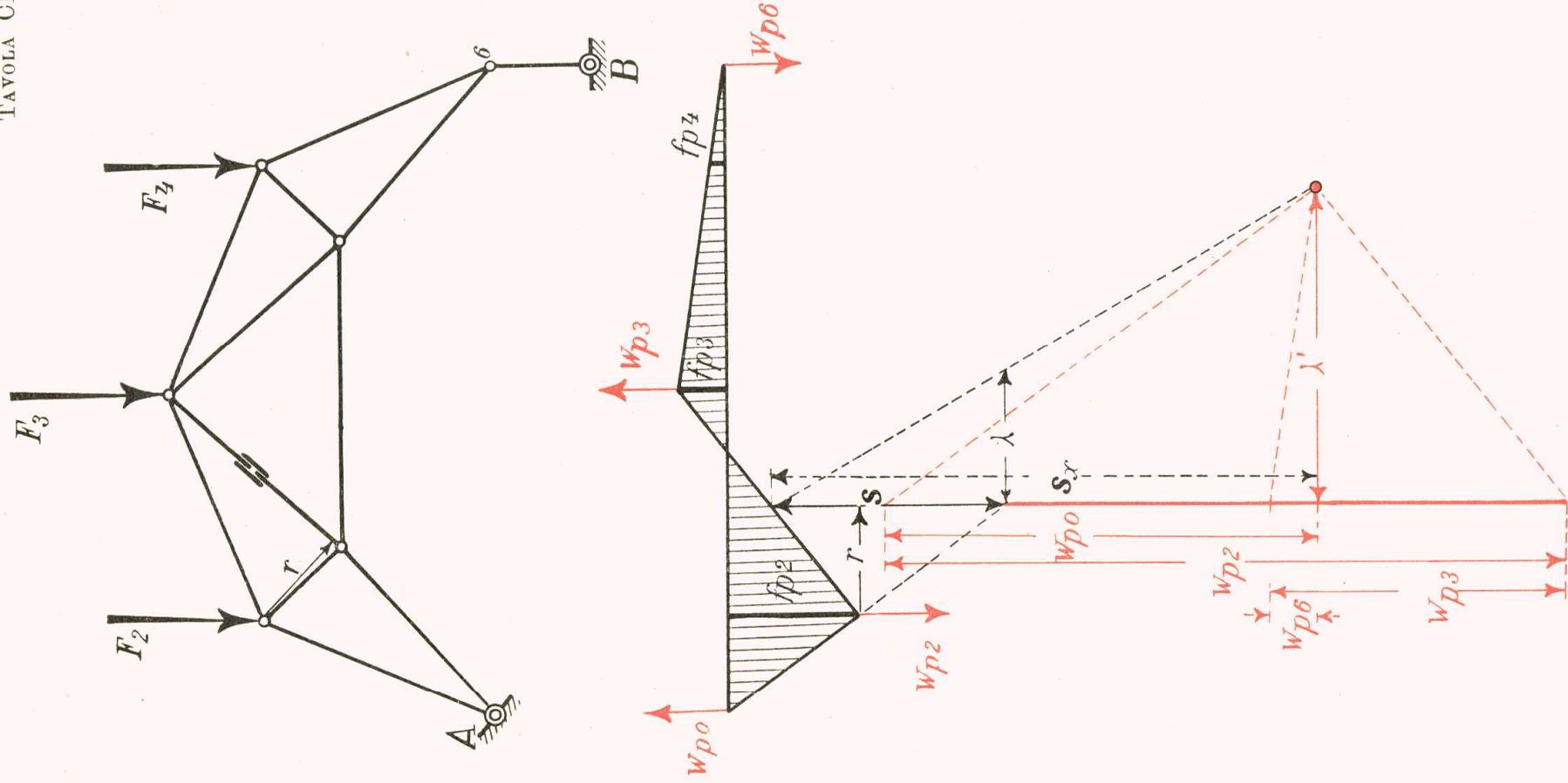
Qualche volta può esser utile considerare le varie linee di influenza di un medesimo sistema come poligoni funicolari di opportuni pesi elastici; e ciò, si noti bene, anche indipendentemente dalla possibilità, già altrove accennata, di servirsi dei pesi elastici per costruire tali linee.

In verità, anche quando una linea d'influenza è stata tracciata per proiezione di un diagramma di Williot, nulla ci impedisce di introdurre il concetto di *peso elastico*, risalendo dall'andamento della linea al valore dei pesi elastici mediante la semplicissima costruzione grafica che, per la linea d'influenza di X , è stata indicata in rosso nella tav. CVIII.

La stessa costruzione è stata ripetuta nella tav. CIX per la linea d'influenza di S_p già da noi trovata nella tav. LV.

Soltanto per tener conto delle diverse scale in cui le due linee erano state originariamente tracciate, si è in questa seconda costruzione adottata una distanza polare λ' che sta alla distanza polare λ impiegata nella tavola precedente nel rapporto inverso delle unità di misura s ed s_x .

TAVOLA CIX.

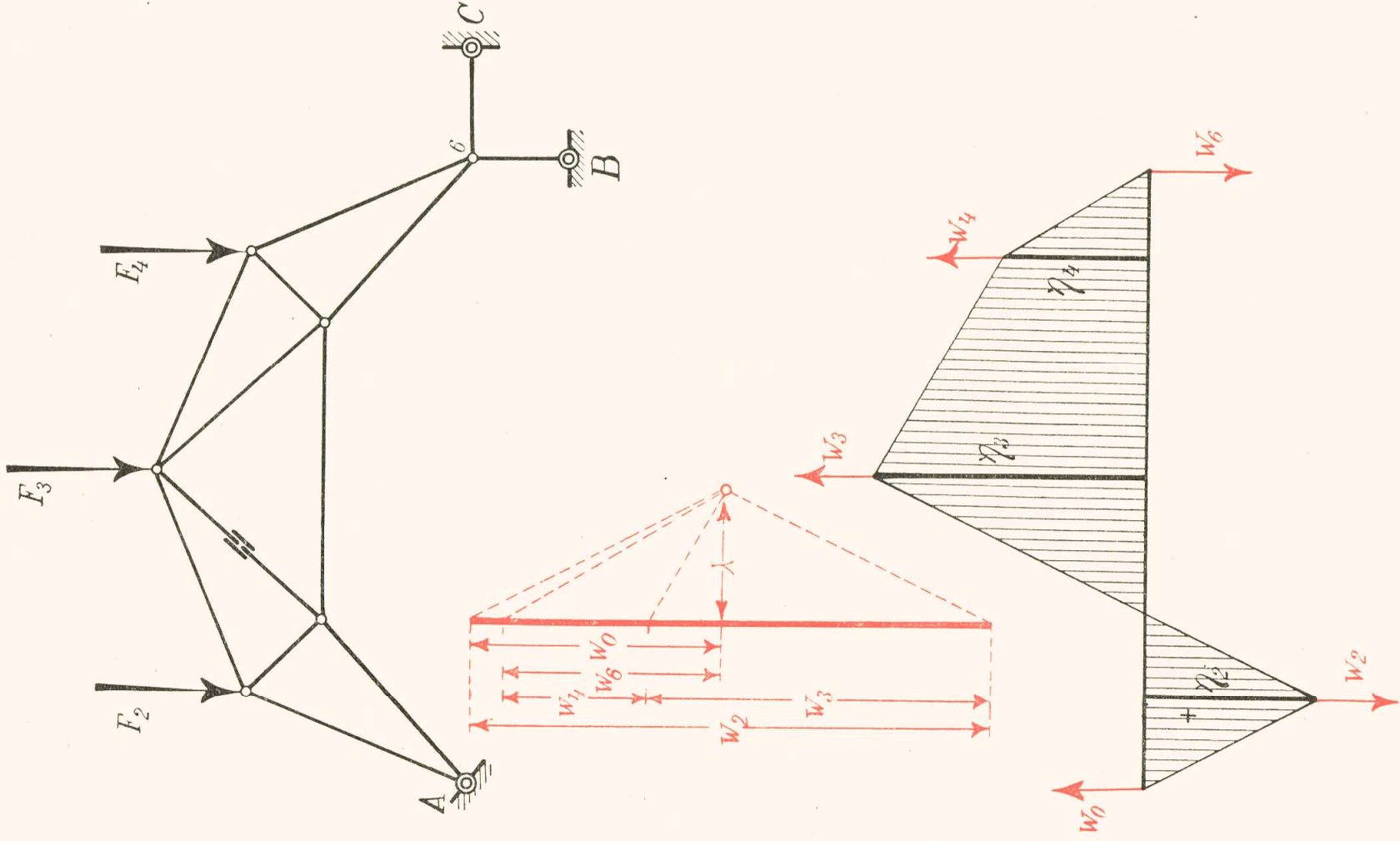


Dopo di che è facile dimostrare che la linea d'influenza dello sforzo S si può anche ottenere collegando con un poligono funicolare un sistema di pesi elastici del tipo

$$w = w_p + S_x w_x$$

La costruzione grafica assume l'aspetto indicato nella tav. CX. E siccome la distanza polare in essa adottata è quella stessa λ che già servì nella tav. CVIII per il calcolo dei w_x , la nuova linea d'influenza risulterà tracciata nella medesima scala della linea d'influenza della X ; dovrà cioè essere letta adottando per unità di misura quella contrassegnata colla lettera s_x nella tav. CVII.

TAVOLA CX.



Le cose si complicano naturalmente un poco quando si pretende di risolvere il problema per forze comunque dirette. Conviene allora riprendere direttamente in considerazione i diagrammi di deformazione costruiti nella tav. LIV e nella tav. CVII e combinarli insieme in modo da ottenere il diagramma di deformazione per una variazione data di lunghezza dell'asta 1.3 nell'ipotesi che il nodo 6 sia mantenuto fisso.

Ciò si otterrà ovviamente quando, nella travatura resa al solito staticamente determinata, lo spostamento del nodo 6 dovuto alla variazione di lunghezza impressa all'asta 1.3 risulti esattamente eguale e contrario allo spostamento che lo stesso nodo 6 viene a subire per effetto della deformazione elastica determinata nel sistema dalla reazione X sviluppata dal vincolo sovrabbondante.

Va da sé che, anche questa volta, l'imporre una tal condizione equivale già a determinare la grandezza incognita X .

Si tratta infatti di combinare geometricamente insieme i due diagrammi di deformazione sopra ricordati, previo un mutamento di scala di uno di essi, tale che lo spostamento risultante per il nodo 6 riesca identicamente nullo.

Teoricamente sarebbe naturalmente il secondo dei due diagrammi che andrebbe mutato di scala; sono infatti i suoi vettori-spostamenti quelli che, essendo stati calcolati per $X = -1$, dovrebbero venire moltiplicati per $-X$.

In pratica poco importa che si conservi immutata la scala di uno o quella dell'altro dei due diagrammi, semprechè ci si contenti di adottare poi per la lettura dei risultati una unità di misura conveniente.

Nella costruzione eseguita a titolo di esempio nella nostra tav. CXI noi abbiamo conservata immutata la scala del diagramma di deformazione relativo alla X . I vettori-spostamenti calcolati nella tav. CVII sono stati infatti qui riportati tali e quali; e sono quelli disegnati con tratto nero.

In rosso si vede sovrapposto un diagramma affine a quello costruito nella tav. LIV, con rapporto di affinità tale da conferire al vettore-spostamento 0.6 la grandezza voluta.

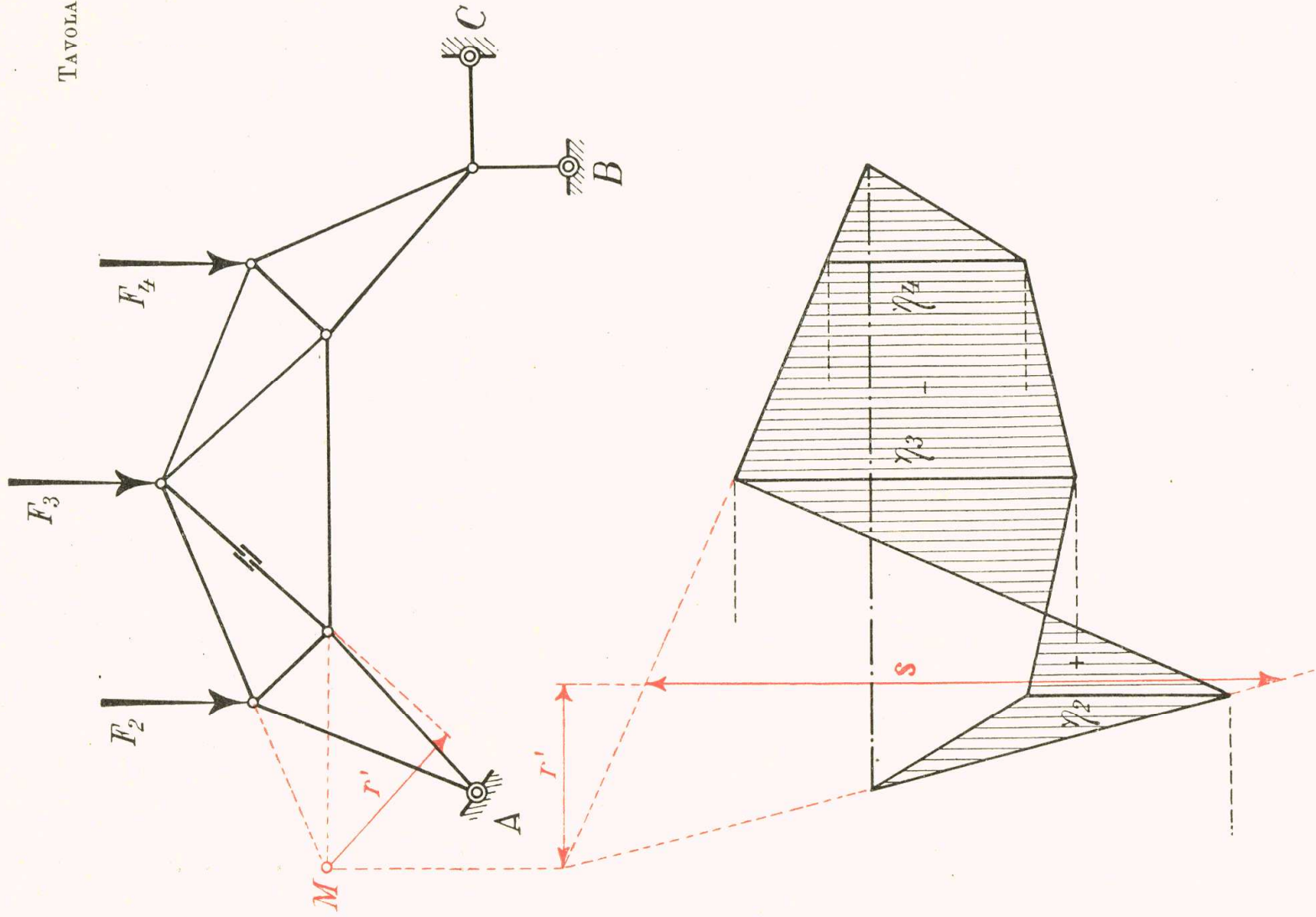
I vettori che nella figura così ottenuta hanno per origine il punto contrassegnato col numero rosso e per termine il punto contrassegnato col corrispondente numero nero, rappresentano gli spostamenti risultanti.

L'unità di misura s , dovendo al solito essere eguale alla variazione di lunghezza impressa all'asta 1.3 (spostamento relativo delle due faccie del taglio idealmente praticato attraverso tale asta) si determinerà, a cose fatte, nel modo istesso che è già stato indicato nella costruzione della tav. LIV.

Occorre appena avvertire che — quando la ricerca è stata condotta a termine in condizioni così generali — la linea di influenza per forze aventi una direzione fissa qualunque si può poi sempre dedurre per semplice proiezione sulla direzione stessa.

Così, se si tratta soltanto di studiar gli sforzi determinati nella solita asta 1.3 da forze verticali applicate al corrente superiore della travatura, conviene dal diagramma degli spostamenti dianzi descritto trarre il diagramma d'influenza raffigurato nella tav. CXII, la cui unità di misura è quella stessa già determinata per il diagramma degli spostamenti, ma può al solito ritrovarsi direttamente con una qualunque delle costruzioni grafiche che noi abbiamo descritte ed applicate nella tav. LV.

L'identità dei risultati che così si ottengono con quelli a cui noi eravamo pervenuti direttamente (tav. CX) non ha bisogno di essere illustrata: i due diagrammi sono infatti sostanzialmente identici.

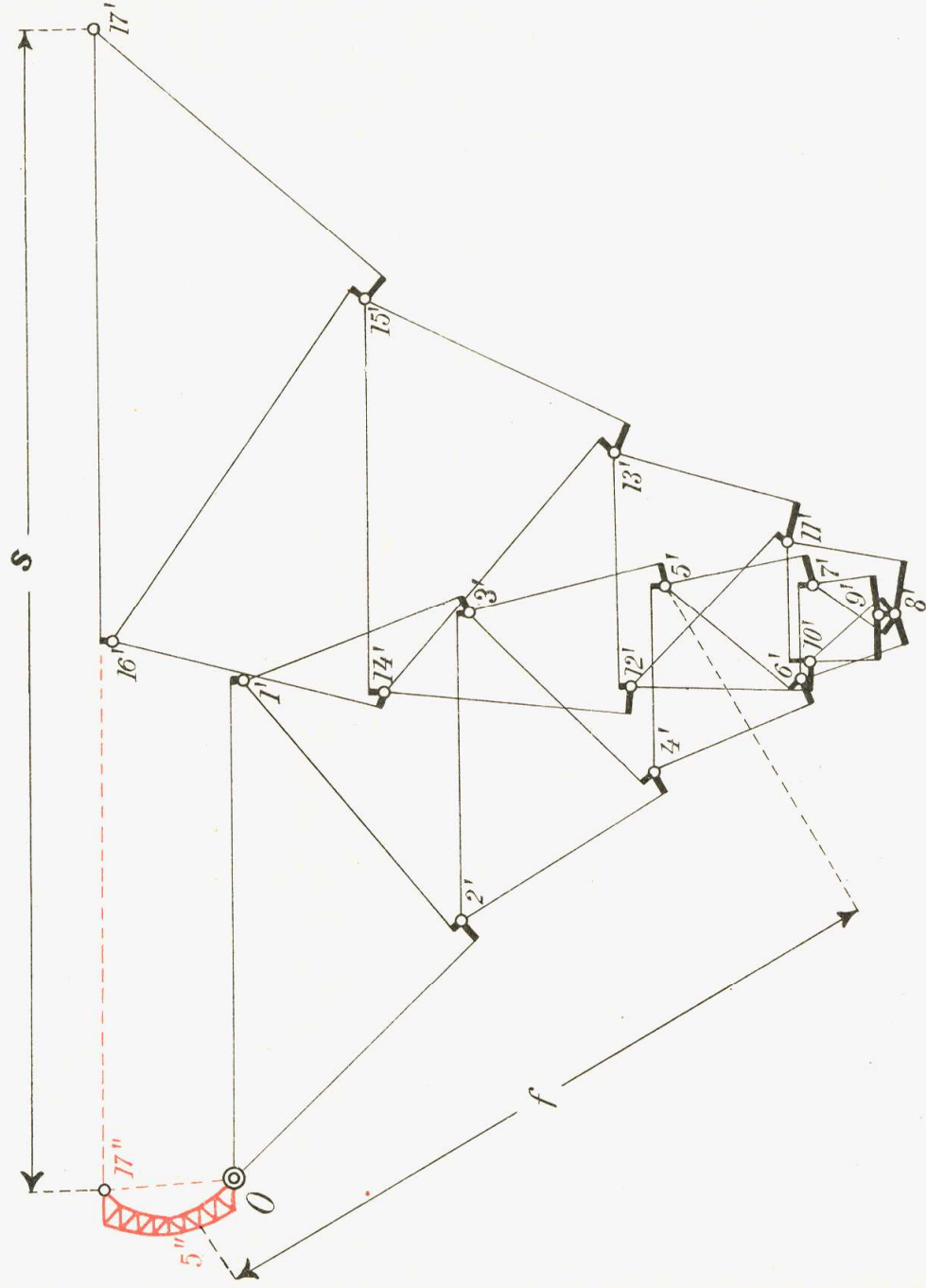
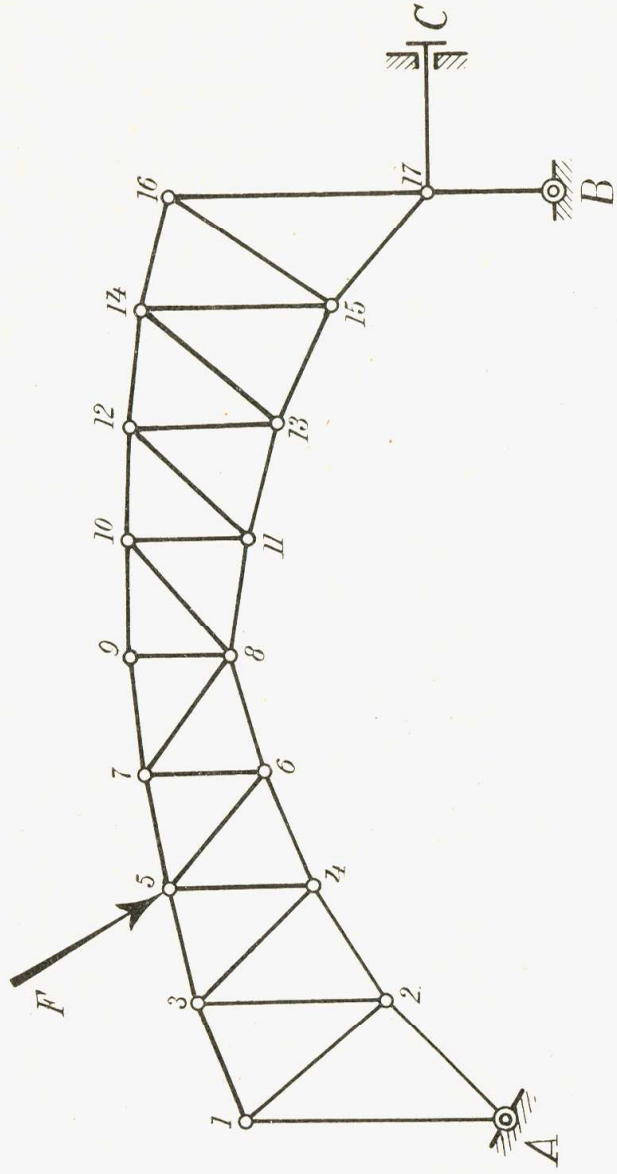


Di quanto si è detto fin qui abbiamo nella tav. CXIII fatta una applicazione al caso di un arco dissimetrico a due cerniere.

Il diagramma di Williot relativo all'arretramento \mathbf{s} arbitrariamente impresso al vincolo orizzontale — diagramma che è stato costruito dapprima supponendo fisso il nodo \mathcal{S} ed invariabile la direzione dell'asta $\mathcal{S} \cdot \mathcal{I}$ e poi correggendo l'errore insito in tale ipotesi mediante il solito spostamento del polo e la debita rotazione attorno ad A — permette il calcolo della reazione X del detto vincolo orizzontale per una qualsiasi condizione di carico, costituita da un qualunque sistema di forze F , per mezzo della solita formola

$$X = \sum F \frac{f}{s}$$

TAVOLA CXIII.



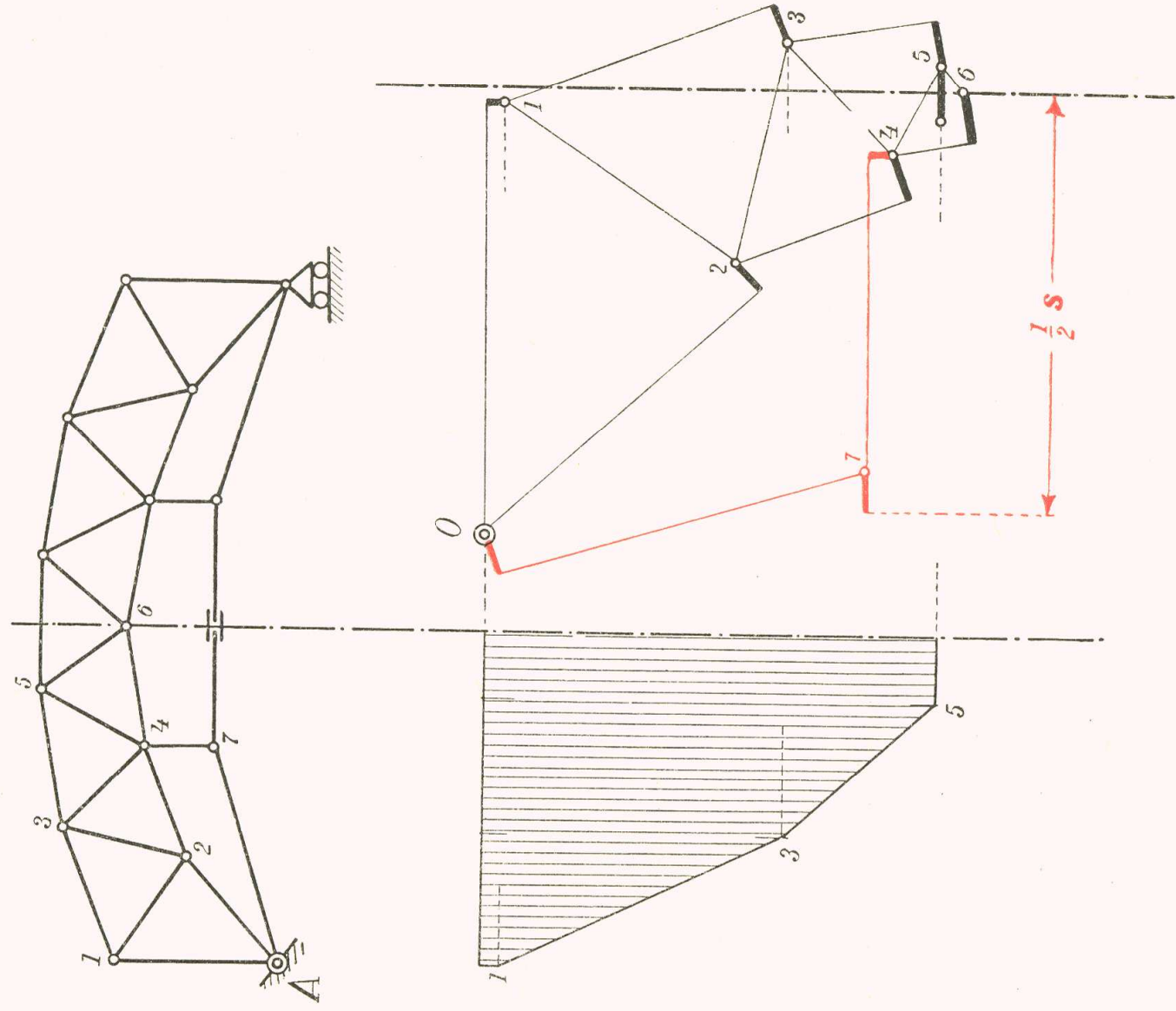
Ed ecco due esempi di travature la cui iperstaticità non dipende da sovrabbondanza di vincoli, ma di aste. Per primo citiamo il caso dell'arco con catena, raffigurato nella tav. CXIV.

Ad incognita iperstatica è stata assunta la tensione nella catena.

Per semplicità il sistema è stato supposto simmetrico rispetto alla sua verticale di mezzo. Inoltre nella costruzione del diagramma di Williot sono state trascurate le deformazioni delle aste di parete 1.2, 2.3, 3.4, ... La parte del diagramma tracciata in nero si riferisce all'arco propriamente detto; in rosso è stata invece indicata quella che si riferisce al sistema funzionante da catena; più precisamente sono rappresentati con tratto rosso gli allungamenti (negativi) delle aste A.7 e 4.7 nonché della metà sinistra della catena vera e propria.

In una sola figura hanno così potuto trovar posto tanto il diagramma degli spostamenti come la linea d'influenza per carichi verticali applicati al corrente superiore, che dal diagramma stesso si deduce per proiezione.

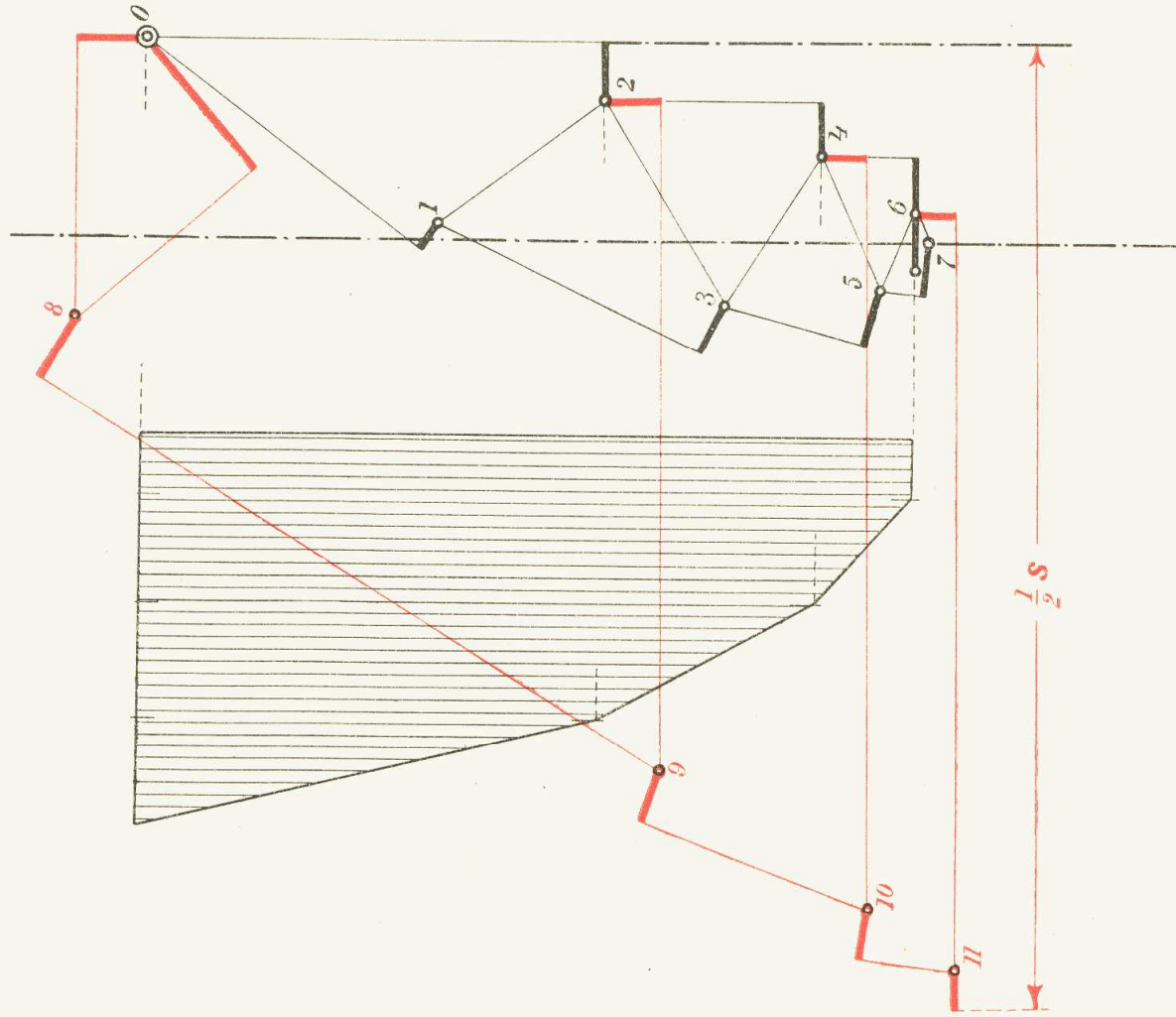
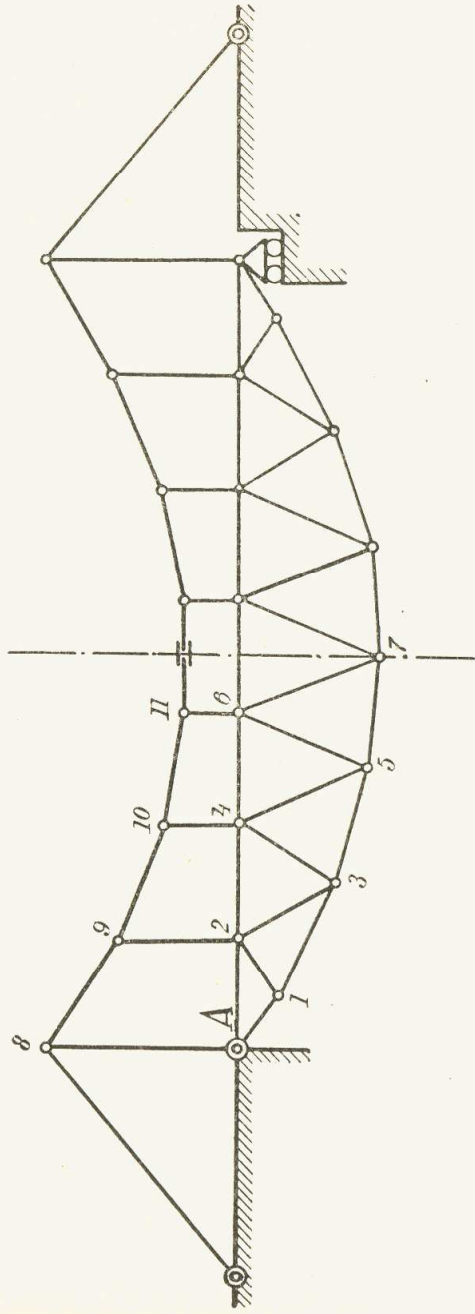
Come unità di misura si assumerà naturalmente il valore s dell'allungamento impresso all'asta assunta come sovrabbondante.



Nella tav. CXV è invece rappresentato il caso di una sospensione irrigidita da una trave. Si è assunta come incognita iperstatica la tensione in una delle aste della sospensione. La costruzione grafica del diagramma di Williot è stata fatta colle stesse semplificazioni di cui si è già detto a proposito della tavola precedente; anche qui è stata tracciata in nero la parte del diagramma che si riferisce alla trave, in rosso quella che si riferisce alla sospensione.

Per la metà sinistra del sistema è poi stata tracciata, per proiezione, la linea d'influenza della tensione incognita per carichi verticali applicati al corrente superiore (rettilineo) della trave.

TAVOLA CXV.

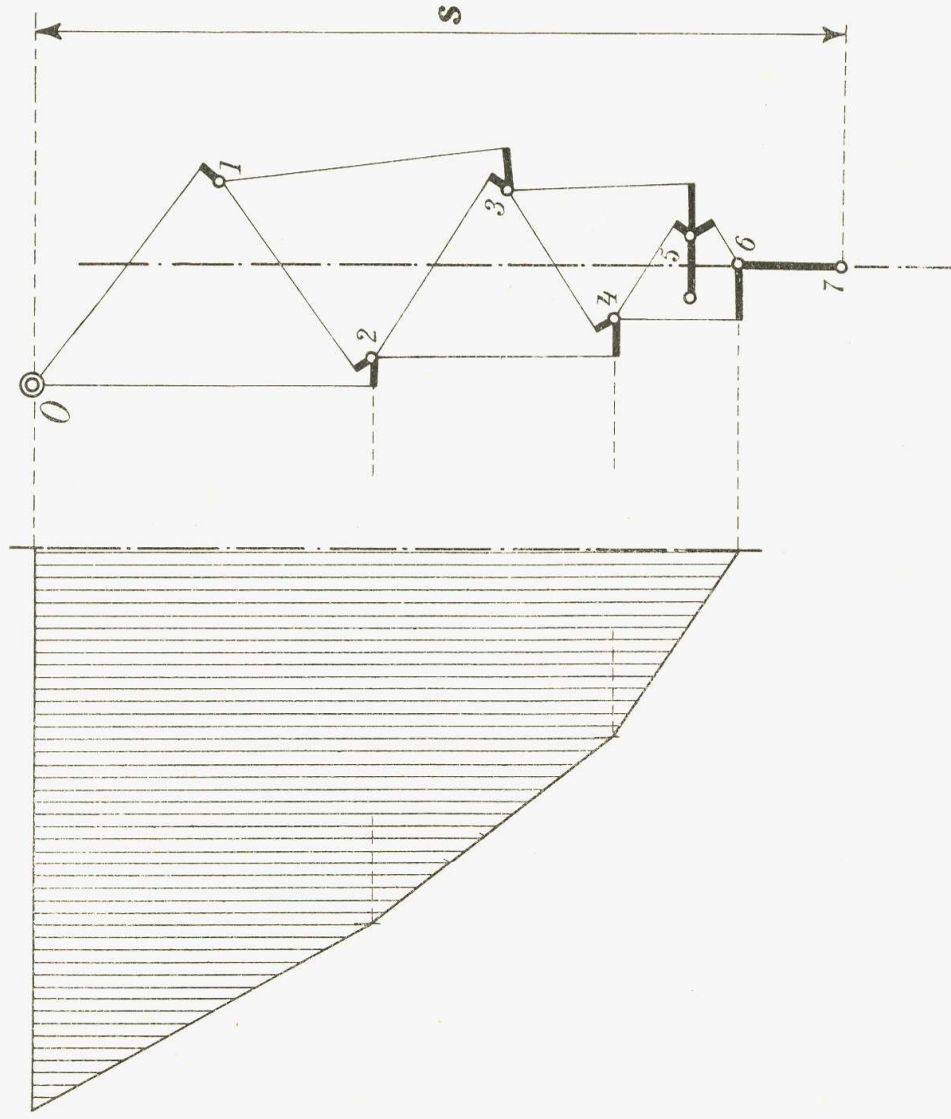
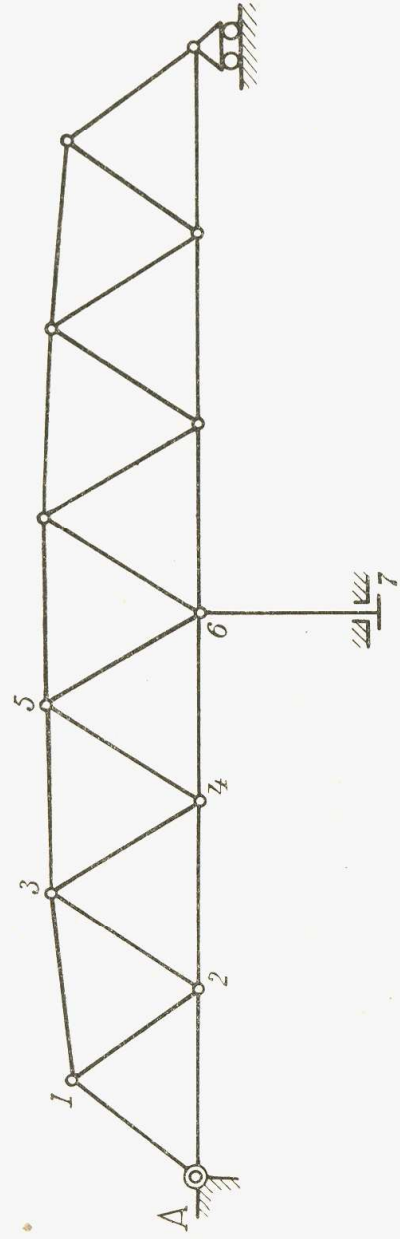


Tra tutti gli altri esempi, svariatiissimi e quanto mai numerosi, che di questo passo si potrebbero ancora proporre, uno ve n'è che per la sua importanza veramente singolare, e per certe semplificazioni a cui si presta, merita una speciale attenzione. Si tratta della trave continua su tre appoggi.

Assunta come incognita iperstatica la reazione di uno degli appoggi, per esempio di quello di mezzo, la costruzione del diagramma di Williot e la deduzione della linea d'influenza per carichi verticali applicati al corrente inferiore (rettilineo) della trave, non presentano più alcuna difficoltà.

Nella tav. CXVI, in cui tali operazioni sono state eseguite, abbiamo voluto, pur riferendoci ad una trave simmetrica rispetto all'appoggio di mezzo, eseguire le diverse costruzioni nelle condizioni più generali. Perciò non si sono più, questa volta, trascurate le deformazioni delle aste di parete; e si è inoltre messa in evidenza l'influenza della deformabilità del montante 6.7 che realizza il vincolo sovrabbondante. Vale la pena di rilevare che questa influenza non si manifesta nella forma della linea d'influenza, bensì soltanto nella determinazione dell'unità di misura.

TAVOLA CXVI.

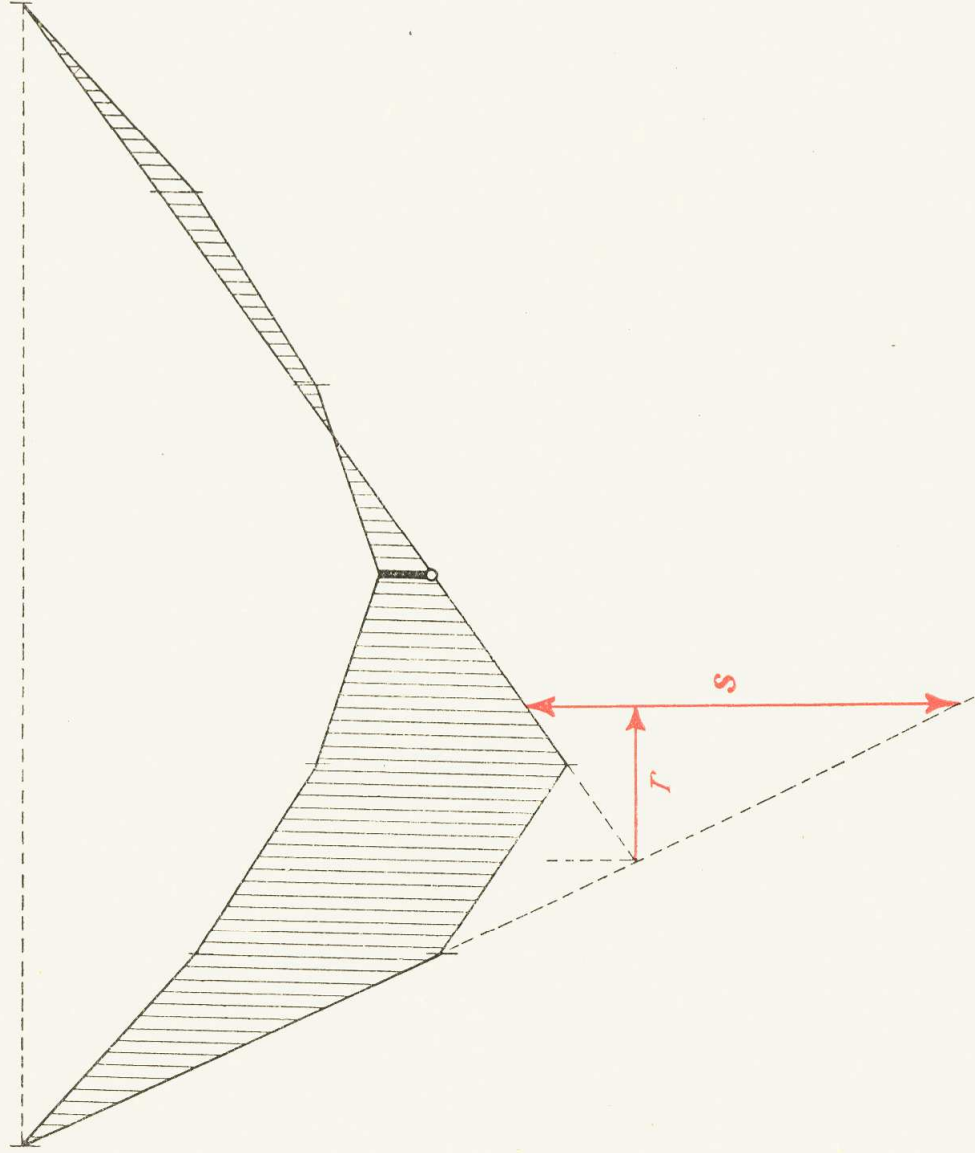
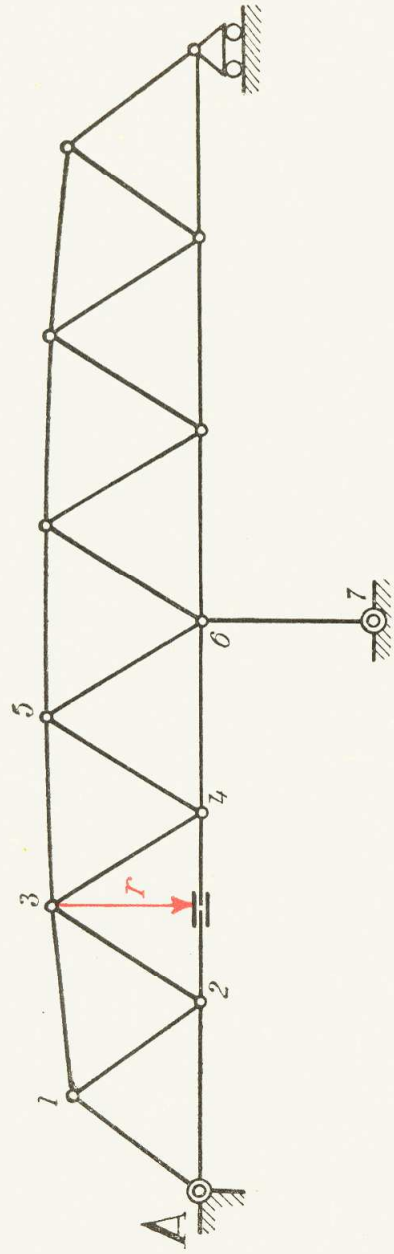


Nella tav. CXVII si è costruita la linea d'influenza dello sforzo nell'asta 2.4 del corrente inferiore.

Si tratta, al solito, di imprimere una variazione ideale di lunghezza a tale asta, supposto che il punto 7 venga mantenuto fisso. La relativa deformata può evidentemente ottenersi per combinazione lineare della deformata relativa a tale variazione impressa nella trave resa staticamente determinata per soppressione del vincolo sovrabbondante, e della deformata già costruita come linea d'influenza dell'incognita iperstatica, quando si ponga per condizione che lo spostamento risultante del punto 7 sia identicamente nullo.

Ciò è stato fatto nella tav. CXVII partendo dalla detta linea di influenza dell'incognita iperstatica — riprodotta, per ragioni di spazio, in scala metà di quella usata nella tavola precedente. Alla ordinata di tale linea rappresentante lo spostamento verticale del nodo 6 è stata aggiunta, nella medesima scala, la variazione di lunghezza dell'asta 6.7: si è così ottenuto lo spostamento verticale del punto 7, che va annullato mediante uno spostamento eguale e contrario nella variazione di configurazione dovuta alla variazione di lunghezza impressa all'asta 2.4. Ma, come abbiamo imparato a suo tempo, la deformata verticale relativa a questa ipotesi è costituita semplicemente da una bilatera (avente il vertice sulla verticale condotta per il nodo 3 dell'asta considerata) e dalla relativa corda in corrispondenza del campo 2.4 occupato dall'asta. Basterà dunque disegnare tale deformata in una scala tale che la sua ordinata sulla verticale di 7 eguagli lo spostamento dianzi trovato, e sovrapporla alla linea d'influenza dell'incognita iperstatica nel modo indicato in figura. Per differenza si otterrà il diagramma di influenza cercato. L'unità di misura, dovendo esser eguale alla variazione di lunghezza impressa all'asta 2.4, si troverà nel modo solito (tav. LI e seg.).

TAVOLA CXVII.



La tav. CXVIII rappresenta l'applicazione del medesimo principio alla costruzione della linea d'influenza dello sforzo in un'asta di parete 2.3. Le operazioni grafiche relative al tracciamento della deformata della trave resa staticamente determinata per soppressione di un appoggio, nonché quelle necessarie per la determinazione dell'unità di misura, sono state rappresentate in rosso nel nostro disegno; si confronterà utilmente in proposito la tav. LVIII.

TAVOLA CXVIII.

