

DIAGRAMMI DI WILLIOT

Travature a nodi canonici.

La tav. XCI (a pag. 417) rappresenta l'esempio più semplice ed ovvio di applicazione del procedimento ideato dal WILLIOT (e da noi spiegato a pag. 90 e seguenti) per la determinazione grafica delle deformazioni elastiche di una travatura reticolare piana a nodi canonici, in equilibrio sotto l'azione di un dato sistema di forze esterne.

L'esempio prescelto è quello stesso per il quale si è eseguita nella tav. IV (a pag. 233) la determinazione degli sforzi nelle aste col metodo di CREMONA.

Sulla base degli sforzi così determinati, e facendo uso della formola (da noi stabilita a pag. 89)

$$s = \frac{S \cdot l}{E \cdot A}$$

previe opportune ipotesi sulle dimensioni delle aste e sul valore da attribuire al modulo di elasticità normale del materiale, si sono calcolate le variazioni di lunghezza delle singole aste.

Riteniamo inutile soffermarci qui su questo genere di calcoli. Nei casi pratici lunghezza, sezione di ciascun'asta e modulo di elasticità del materiale, per chi si accinge al calcolo delle deformazioni, sono da riguardarsi come dei dati, nel senso che *tali sono realmente* se si ha a che fare con una costruzione già eseguita o almeno già definitivamente progettata in tutte le sue parti, o che *tali sono da considerarsi* agli effetti del presente problema anche se si tratti di elementi assunti provvisoriamente ad arbitrio durante l'elaborazione di un progetto e suscettibili di venir poi modificati in dipendenza dei risultati che il calcolo ci fornirà.

Il problema di cui ci vogliamo qui occupare è quindi da riguardarsi come circoscritto nei termini seguenti: data la variazione di lunghezza che ciascun'asta subisce sotto l'azione dei carichi applicati ai singoli nodi della travatura, trovare come questa travatura si deforma; più precisamente: trovare (in grandezza, direzione e senso) lo spostamento di ciascun nodo.

Poche parole devono bastare ad illustrare la costruzione grafica che presentiamo nella tav. XCI, dato che in essa si è fedelmente seguito il procedimento di Williot.

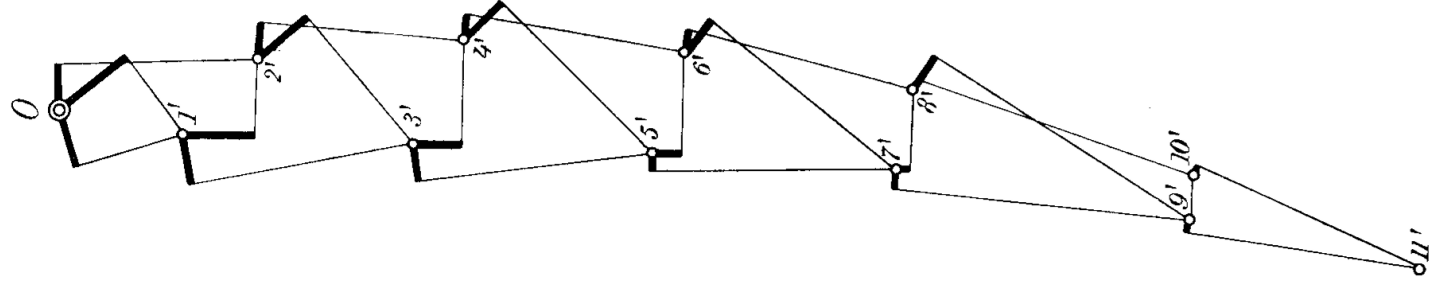
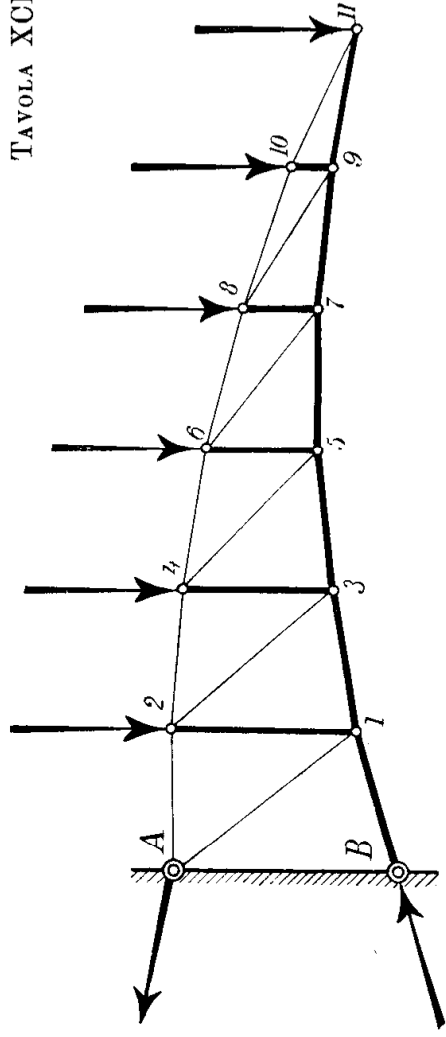
Poichè la travatura possiede due punti fissi A e B e che il nodo I è collegato a quei due punti da due aste, lo spostamento di questo nodo in dipendenza di certe ben determinate variazioni di lunghezza di dette aste, si deve ottenere (in grandezza, direzione e senso) eseguendo puramente e semplicemente la costruzione da noi spiegata a pag. 90.

A partire da un'origine O , scelta ad arbitrio nel piano della figura, si traccieranno due vettori i quali rappresentino, in grandezza, direzione e senso, le variazioni di lunghezza delle due aste di collegamento. A tal fine sarà stata scelta una opportuna scala per la rappresentazione delle deformazioni; scala la quale, data la supposta piccolezza di queste deformazioni per rapporto alle dimensioni della costruzione, dovrà naturalmente esser diversa dalla scala che ha servito per la rappresentazione della travatura.

Quanto alla direzione ed al senso, se ne terrà conto attribuendo ai vettori rappresentativi delle variazioni di lunghezza la direzione dell'asta a cui si riferiscono, col senso che va dall'estremo fisso all'estremo mobile se la variazione di lunghezza è positiva, vale a dire se si tratta di un'asta tesa, la quale quindi sotto l'azione dello sforzo si è allungata; col senso opposto nel caso contrario, vale a dire quando si ha a che fare con un'asta compressa, la quale sotto l'azione dello sforzo ha subito un accorciamento.

Abbiamo già avuto occasione di rilevare a suo tempo che i due vettori così individuati rappresentano, in grandezza, direzione e senso, gli spostamenti che il nodo I , considerato come estremità libera di ciascuna delle due aste di collegamento, subirebbe qualora le aste stesse (supposte svincolate fra loro) presentassero le dovute variazioni di lunghezza senza mutar di direzione.

TAVOLA XCI.



Va da sè che questi due spostamenti non sono fra loro compatibili; che cioè i due estremi delle aste, se queste si allungassero o si accorciassero senza ruotare, cesserebbero di coincidere in un unico punto.

In realtà, le due variazioni piccolissime di lunghezza delle aste sono accompagnate da opportune loro rotazioni, pure piccolissime, attorno ai due punti fissi a cui esse fanno capo.

Perciò allo spostamento del nodo I considerato come estremo dell'asta $A \cdot I$ si dovrà sommare geometricamente un altro spostamento derivante da una rotazione dell'asta attorno al suo estremo fisso A ; spostamento che, data la sua piccolezza, potrà sempre venir rappresentato con un vettore diretto normalmente alla direzione $A \cdot I$.

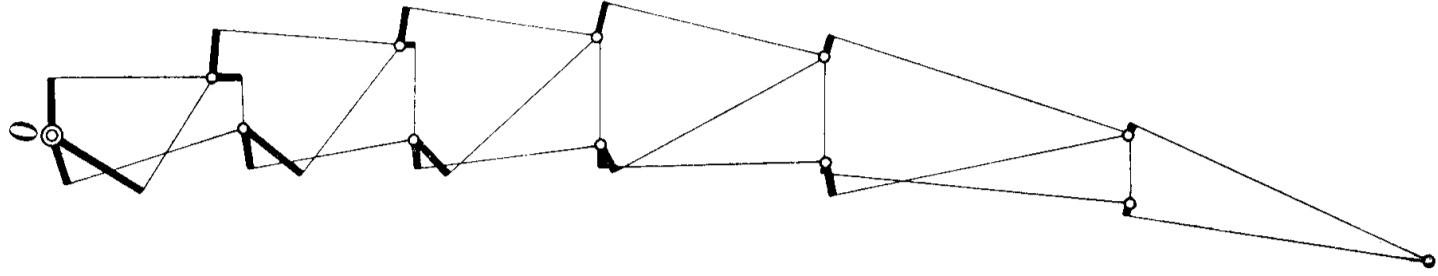
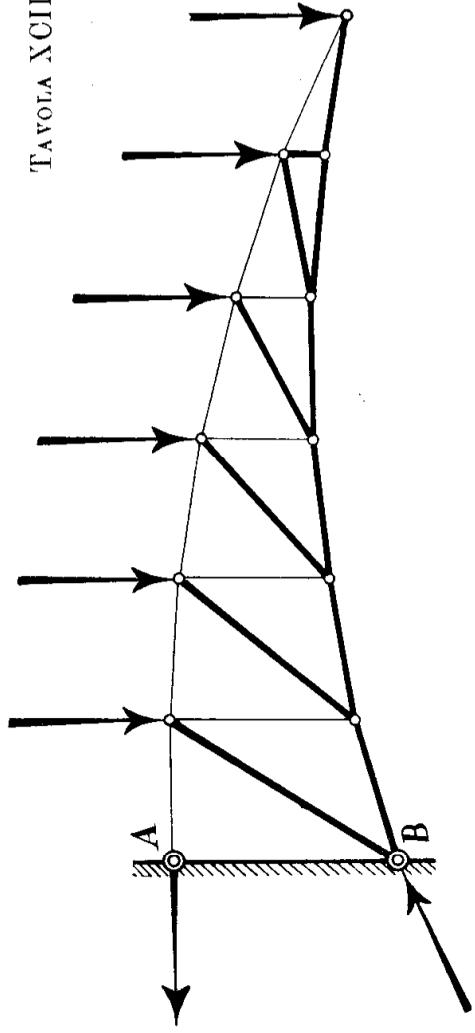
Similmente allo spostamento del nodo I considerato come estremo dell'asta $B \cdot I$ si dovrà sommare geometricamente un altro spostamento derivante da una rotazione di I attorno a B epperò rappresentabile con un vettore diretto normalmente alla direzione $B \cdot I$.

Con ciò il vettore $\theta \cdot I'$ capace di rappresentare lo spostamento del nodo I allorquando in esso convergono insieme le due aste deformate riesce perfettamente determinato.

Questa costruzione può essere successivamente ripetuta per tutti i nodi di una travatura a nodi canonici, semprechè questi si considerino nell'ordine in cui vanno assunti perchè il montaggio della travatura possa eseguirsi mediante le successive aggiunte di due aste per ciascun nuovo nodo. Basta aver l'avvertenza di tenere di volta in volta nel dovuto conto che i nodi a cui vengono ancorate le successive aste di collegamento non sono più dei punti fissi, ma hanno già subiti certi ben determinati spostamenti. Ciò si farà conducendo i vettori rappresentativi delle variazioni di lunghezza delle nuove aste non a partire dall'origine θ bensì a partire dagli estremi dei vettori che rappresentano gli spostamenti dei nodi a cui quelle aste fanno capo.

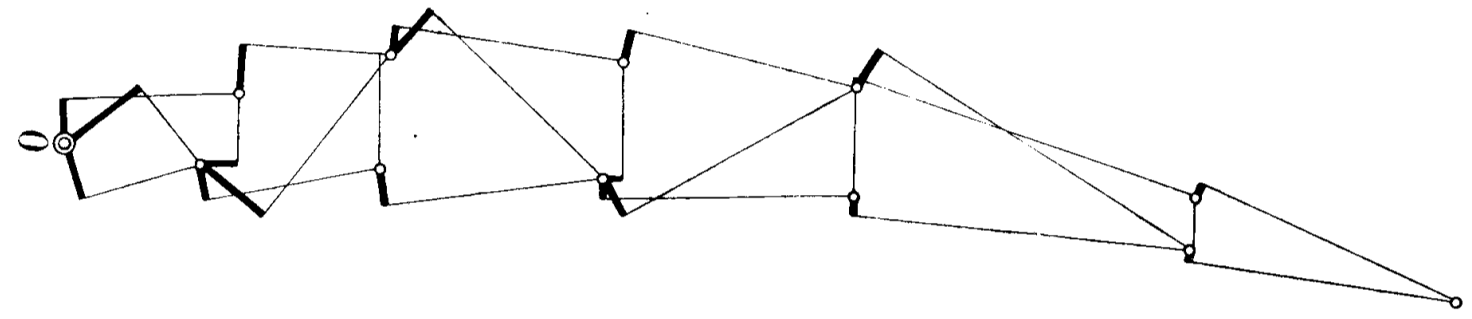
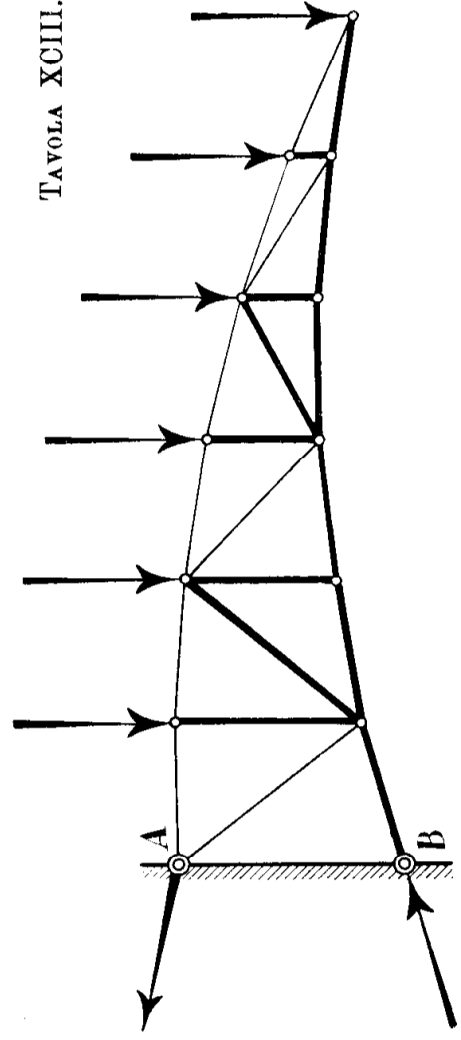
La stessa costruzione è stata nella tav. XCII ripetuta per la trave a diagonali ascendenti (compresse) già trattata, per quel che si riferisce agli sforzi, nella tav. V a pag. 235.

TAVOLA XCII.



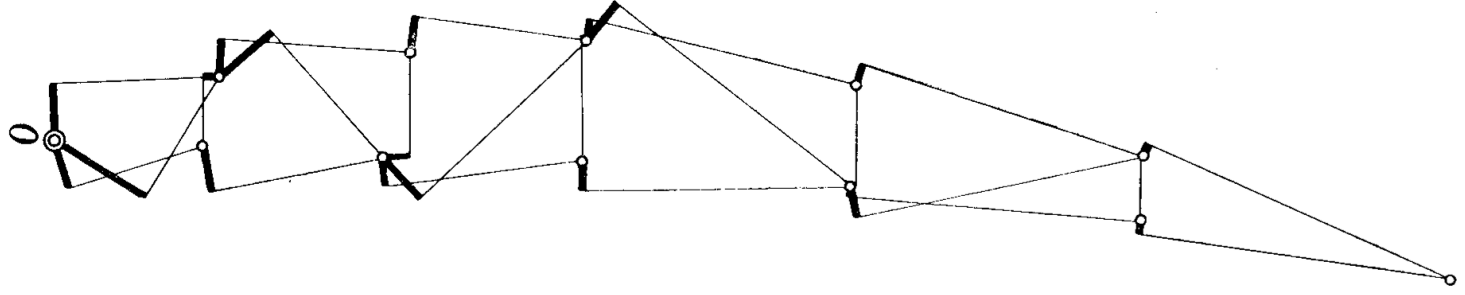
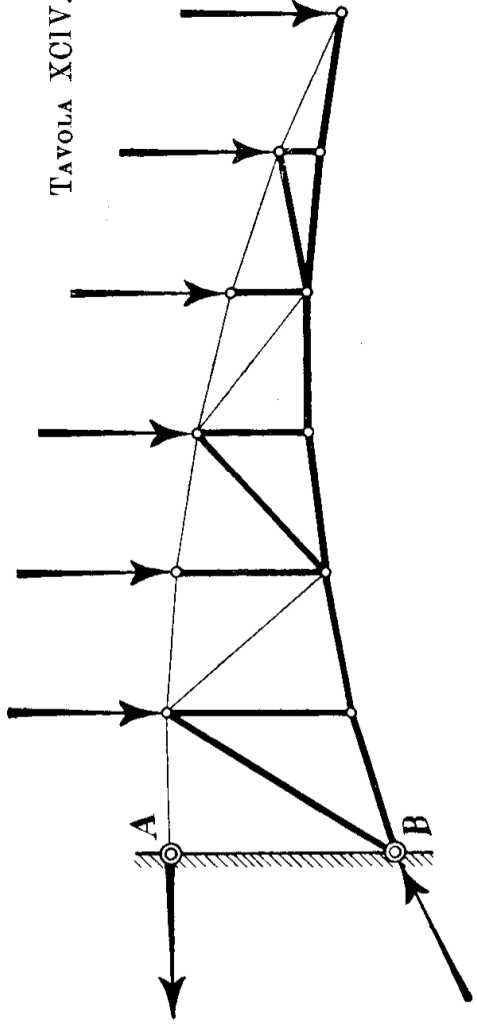
TAV. XCIII. — La stessa costruzione è stata qui eseguita nel caso della trave a diagonali alternativamente discendenti ed ascendenti già trattata nella tav. VI a pag. 237.

TAVOLA XCIII.



TAV. XCIV. — La stessa costruzione è stata ripetuta per la trave a diagonali alternativamente ascendenti e discendenti di cui si è già trattato nella tav. VII a pag. 239.

TAVOLA XCIV.



TAV. XCV. — La stessa costruzione è stata qui eseguita per la trave ad aste di parete incrociate già discussa, per quel che concerne la determinazione degli sforzi, nella tav. XXXVI a pag. 297.

**Travature il cui diagramma di Williot
si può costruire con un metodo di falsa posizione.**

Vanno inscritte in questa categoria tutte le travature che non sono a nodi canonici, incominciando da quelle che possono notoriamente ridursi ad esser tali mediante la preventiva determinazione delle reazioni dei vincoli (pag. 240 e seguenti), ovvero mediante opportune scomposizioni in parti indipendenti (pag. 284 e seguenti).

In tutti questi casi può darsi che la determinazione dello spostamento di un dato nodo non si sappia fare in quanto non si conoscono le variazioni di distanza di esso da due nodi i cui spostamenti siano già noti.

Per lo più succede che il nodo di cui si tratta è bensì collegato ad uno dei nodi i cui spostamenti sono già noti da un'asta di cui è data la variazione di lunghezza; ma l'ulteriore vincolo che dovrebbe servire a determinare l'ampiezza della rotazione di quell'asta è di natura più complessa e non si presta ad una interpretazione immediata: è per esempio rappresentato da un certo numero di aste collegate tra loro ed a dati punti fissi, in modo da dar bensì origine ad una limitazione nella mobilità del nodo senza che si possa precisare a prima vista la natura di tale limitazione.

Convieni allora girar la difficoltà trascurando momentaneamente questo secondo vincolo ed introducendo in sua vece l'ipotesi che l'asta di collegamento costituente il primo vincolo non ruoti affatto. S'intende che questa ipotesi è tutt'affatto gratuita ed, in generale, non rispondente alla realtà delle cose.

Grazie ad essa, però, lo spostamento del nodo in discussione risulta provvisoriamente definito nel modo più semplice, sebbene, in generale, non compatibile col vincolo che è stato messo da parte; e le operazioni grafiche potranno venir continuate applicando il procedimento solito ad altri nodi i cui spostamenti risulteranno tutti determinati a meno di quella certa rotazione di ampiezza incognita.

L'incompatibilità si rivelerà in modo evidente solo quando si giungerà ad un nodo soggetto a qualche vincolo esterno, per

esempio collegato mediante un'asta ad un punto fisso. Lo spostamento di un tal nodo riuscirà infatti, in generale, incompatibile colla presenza di un tale vincolo.

Basterà però allora riprendere in considerazione la rotazione che a suo tempo era stata provvisoriamente trascurata. Si troverà che, per una certa ben determinata ampiezza di questa rotazione, la compatibilità col nuovo vincolo si ristabilisce. Si immaginerà allora attuata una tal rotazione e si correggeranno in conseguenza tutti gli spostamenti che dipendono da essa.

Un tale procedimento è già stato da noi applicato, in un caso particolare assai semplice, a pag. 94 e seguenti. Qui ci proponiamo di presentarne l'applicazione pratica a casi diversi e più complessi. Per la esatta interpretazione delle nostre figure avvertiamo subito che adotteremo di regola il tratto nero per rappresentare la prima costruzione (sia essa definitiva o provvisoria) e quello rosso per contraddistinguere gli eventuali spostamenti aggiunti in dipendenza di successive rotazioni delle varie parti del sistema.

Nella tav. XCVI si trova rappresentata una trave reticolare semplicemente vincolata agli estremi; più precisamente: avente in A un'articolazione a cerniera (punto fisso) ed in G un appoggio a carrello (punto mobile in una determinata direzione).

Il diagramma di Williot è stato per questa trave costruito facendo provvisoriamente astrazione dalla esistenza dell'appoggio a carrello, e supponendo che resti per contro fissa la direzione dell'asta $A \cdot I$; è evidente che in queste condizioni lo spostamento $0 \cdot I'$ del nodo I riesce senz'altro eguale, in grandezza direzione e senso, alla variazione di lunghezza dell'asta $A \cdot I$; è poi altrettanto evidente che, in funzione delle posizioni di A e di I , si potranno poi calcolare gli spostamenti di tutti gli altri nodi.

Si perverrà così ad attribuire al nodo G un certo spostamento $0 \cdot G'$ che, in generale, non sarà affatto diretto secondo quella particolare direzione (segnata in rosso nella nostra figura) che sola è compatibile col vincolo imposto a quel nodo.

Si tratta ora di correggere il sistema degli spostamenti così ottenuti introducendo la trascurata rotazione dell'asta $A \cdot I$ (e con essa di tutta la travatura) attorno al punto fisso A .

Nel nodo G tale eventuale rotazione deve necessariamente produrre uno spostamento diretto normalmente alla congiungente $A \cdot G$. D'altra parte lo spostamento risultante deve, per

TAVOLA XCVI.

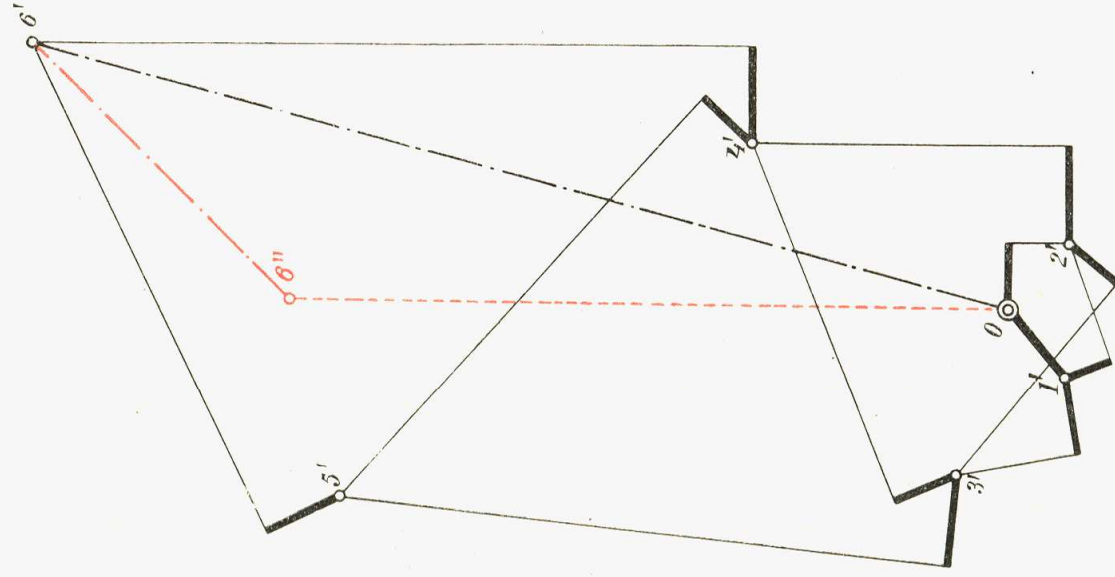
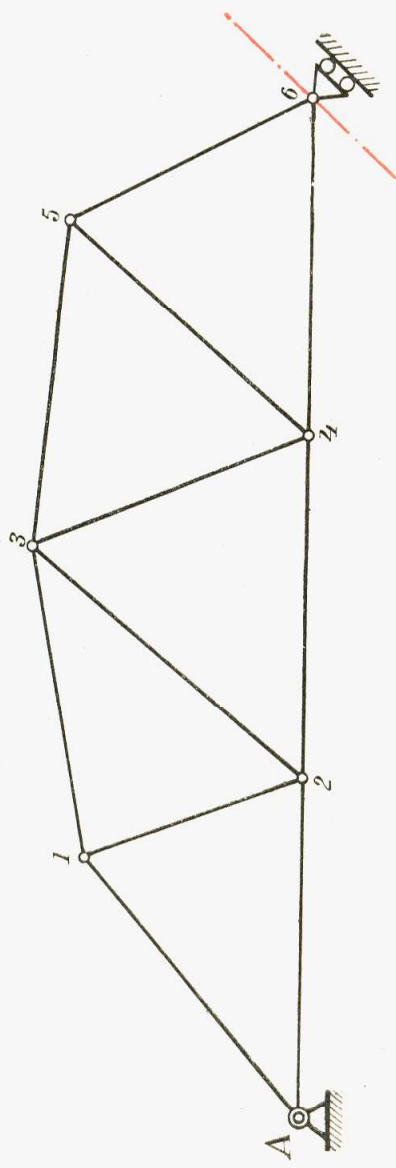
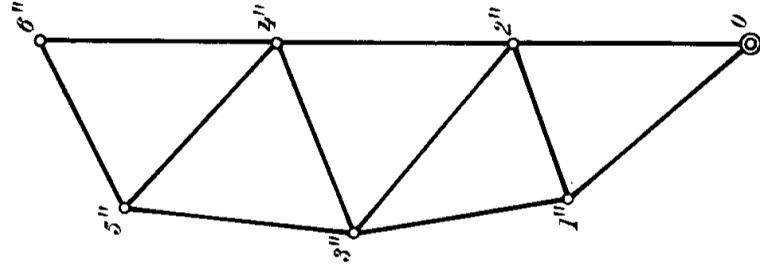
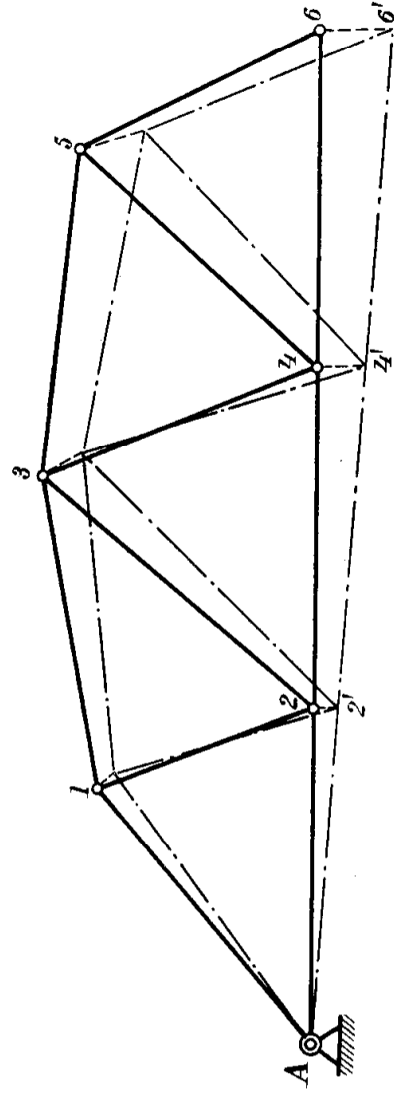


TAVOLA XCVII.



riuscir compatibile col vincolo, esser parallelo a quella certa direzione uscente da 6 . Se pertanto si immagina decomposto il vettore $0 \cdot 6'$ in due componenti di cui uno parallelo alla detta direzione e l'altro normale alla congiungente $A \cdot 6$, questo, rappresentato in figura da $6'' \cdot 6'$, si potrà assumere a rappresentare lo spostamento effettivo del nodo 6 mentre il primo, cambiato di segno, epperò letto nel senso $6'' \cdot 0$, misurerà lo spostamento da prodursi nel nodo 6 mediante la rotazione d'assieme attorno al punto fisso A .

Restano solo più a calcolarsi gli spostamenti che la stessa rotazione produrrà negli altri nodi della travatura. Problema di semplice cinematica di un sistema rigido che il lettore troverà risolto a parte, e nel modo più semplice, nella nostra tav. XCVII.

Si tenga conto, infatti, che gli spostamenti dei singoli nodi in una rotazione rigida attorno ad un centro fisso A (che qui accidentalmente è un particolare nodo della travatura, ma che potrebbe anche essere un punto qualunque del piano) debbono tutti esser diretti normalmente ai raggi uscenti da A ed avere grandezze proporzionali alle distanze da tale centro.

Se perciò si riportano i vettori rappresentativi di tali spostamenti, in una qualsiasi scala, in modo che tutti convergano in una medesima origine, come si è fatto nella parte inferiore della tav. XCVII in

$$6'' \cdot 0, 5'' \cdot 0, 4'' \cdot 0, \dots \dots 1'' \cdot 0$$

la figura costituita dai punti $6'', 5'', 4'', \dots 1''$, O riesce evidentemente simile alla figura costituita dai nodi della travatura, e ruotata rispetto ad essa di 90° .

Costruita pertanto questa figura simile allo schema della travatura e ruotata di 90° rispetto ad essa, in un rapporto tale di similitudine che alla distanza $A \cdot 6$ letta sullo schema della travatura corrisponda la lunghezza $6'' \cdot 0$ con cui nella scala scelta si vuol rappresentare lo spostamento di 6 rispetto a A , basterà sovrapporla al diagramma di Williot già tracciato nella tavola precedente, nel modo indicato nella tav. XCVIII perchè gli spostamenti effettivi dei singoli nodi si possano direttamente leggere nei vettori

$$6'' \cdot 6', 5'' \cdot 5', 4'' \cdot 4', \dots \dots 1'' \cdot 1'.$$

Si sa che di questi vettori quasi sempre interessano, in pratica, soltanto le componenti secondo date direzioni, che sono

quelle secondo cui si intendono calcolare teoricamente, o si vogliono verificare sperimentalmente, gli spostamenti.

Nel caso, frequentissimo fra tutti, in cui la direzione interessante è la stessa per tutti i nodi, al diagramma vettoriale rappresentato nella tav. XCVIII si sostituisce vantaggiosamente quello lineare raffigurato nella successiva tav. XCIX nel quale la spezzata $0.2'.4'.6''$ riferita alla fondamentale $0.2''.4''.6''$ rappresenta la deformata secondo la verticale del corrente inferiore della trave.

Un attento esame delle relazioni di posizione dei singoli punti dei due diagrammi giova ad una esatta comprensione delle diverse operazioni grafiche che siamo venuti esegueno.

Appare in particolare chiaramente da questo esame come il tracciamento del diagramma (rosso) degli spostamenti dovuti alla rotazione d'assieme attorno ad θ ed il riferimento ad esso del primitivo diagramma (nero) di Williot costituiscono nel caso del diagramma vettoriale una operazione perfettamente paragonabile a quella che è, nel caso del diagramma lineare, la scelta della fondamentale di riferimento.

TAVOLA XCVIII.

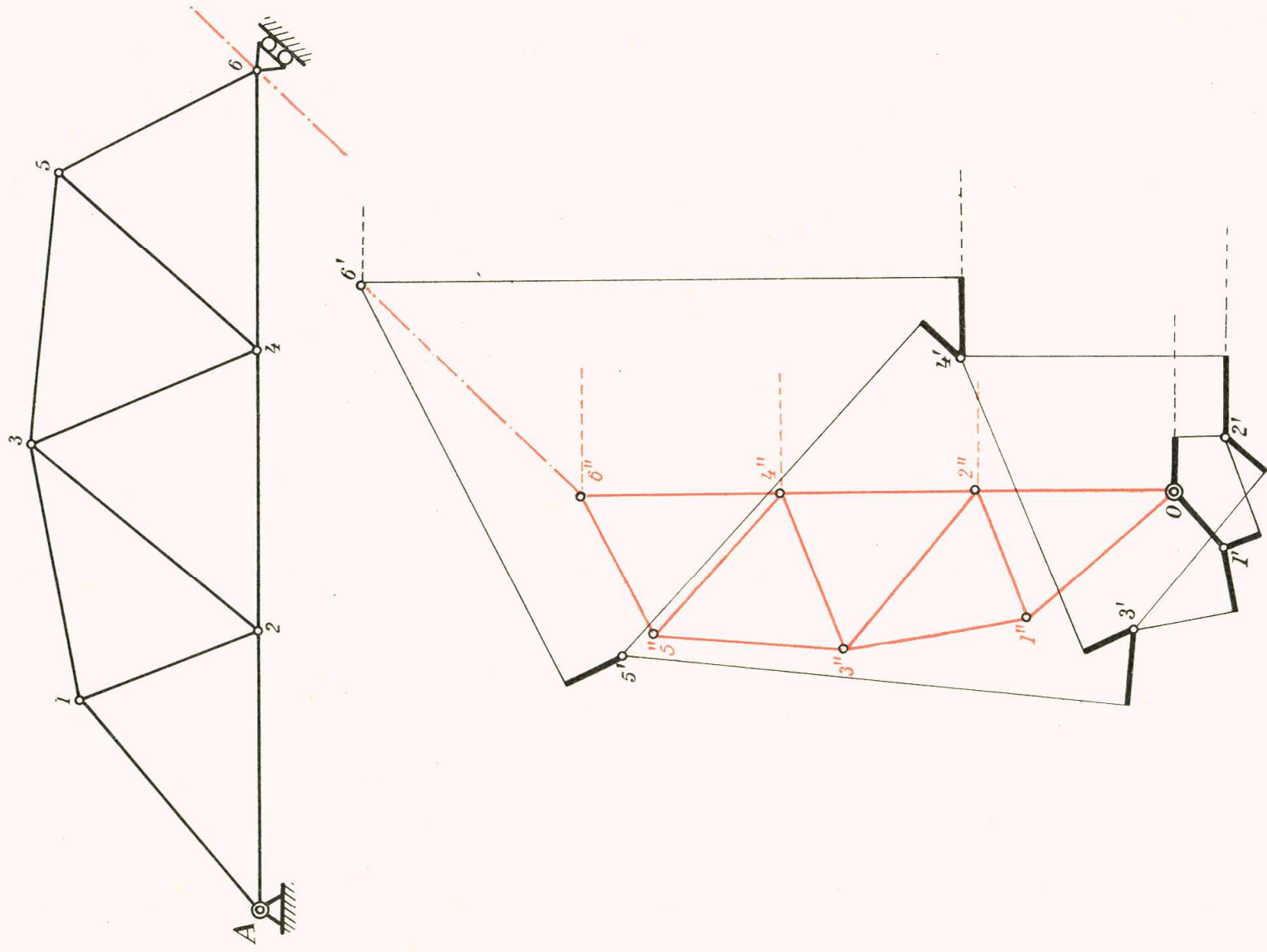
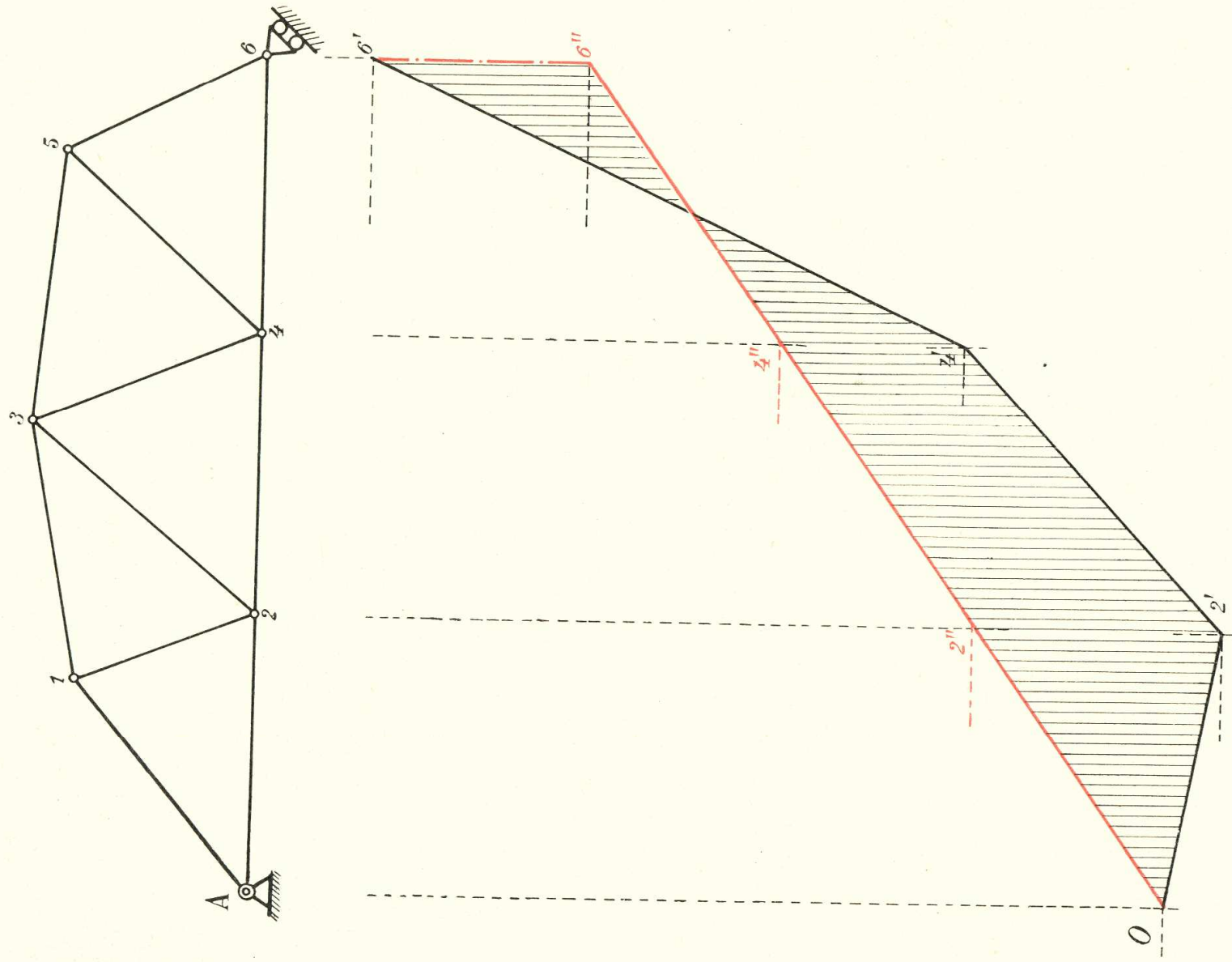


TAVOLA XCIX.



Il procedimento che noi siamo venuti illustrando a proposito del caso particolare trattato nelle precedenti tavole è di carattere assolutamente generale e teoricamente applicabile, colle debite avvertenze, in tutti i casi anche i più complessi.

Tuttavia bisogna avvertire che esso presenta qualche volta un difetto che, senza menomarne l'applicabilità teorica, ne sminuisce grandemente l'utilità pratica.

Accade infatti non di rado nella pratica che l'ipotesi della invariabilità della direzione della prima asta (asta uscente dal punto fisso od assunto come tale) non solo non sia verificata, ma sia molto lontana dall'esser verificata. Allora il diagramma di Williot fornisce spostamenti molto differenti ed in generale molto più grandi degli effettivi, i quali risulteranno in definitiva determinati per differenza da vettori molto maggiori di loro.

In queste condizioni, per quanta cura si ponga nel tracciamento del diagramma di Williot, gli errori inevitabili in una costruzione grafica di questo genere possono assumere proporzioni intollerabili per rapporto alle dimensioni degli spostamenti effettivi.

Per ovviare a questo grave inconveniente basta assumere come asta di direzione supposta immutabile un'asta la quale subisca una rotazione, se non nulla, in ogni caso molto piccola.

Naturalmente tale asta non sarà in generale una di quelle che fanno capo al punto fisso, ma, sempre in omaggio al metodo di falsa posizione di cui ci stiamo occupando, si potrà sempre assumere come fisso uno dei nodi a cui l'asta di cui si tratta fa capo. E, come vedremo fra poco, questa non è una complicazione, in quanto il diagramma per questo non muta; muta solo il polo a cui il diagramma stesso va riferito.

Un esempio pratico ci è subito presentato nelle tavole C e CI, le quali si riferiscono ad una travatura reticolare munita ad una delle sue estremità di una articolazione a cerniera, ed all'altra di un carrello scorrevole orizzontalmente.

Il sistema essendo simmetrico rispetto alla verticale di mezzo, sembra consigliabile introdurre, per il tracciamento del diagramma di Williot, l'ipotesi che l'asta 3.4 (disposta secondo il predetto asse di simmetria) si mantenga, durante la deformazione, verticale.

S'intende che ciò si verifica realmente solo se anche la condizione di carico ammette quella verticale per asse di simmetria.

Sta di fatto però che anche quando, per la dissimmetria dei carichi, l'ipotesi non è verificata, essa non è mai molto lontana dalla realtà; e che la rotazione effettiva di quest'asta si mantiene in ogni caso relativamente piccola.

Per conseguenza il diagramma di Williot, che in base ad una tale ipotesi si è condotti a tracciare, riesce assai più prossimo al diagramma delle deformazioni effettive di quel che si sarebbe ottenuto partendo dall'ipotesi della invariabilità della direzione dell'asta $A.1$ o della $A.2$.

Naturalmente bisogna incominciare a tracciare il diagramma partendo da uno dei nodi a cui l'asta 3.4 fa capo, per esempio dal nodo 3 , ciò che equivale ad introdurre l'altra ipotesi, anch'essa gratuita ed in generale non verificata, della immobilità di tale nodo.

Assunto pertanto ad arbitrio il punto $3'$ come polo, quasi che il nodo 3 fosse fisso nello spazio, si dedurrà la posizione del punto $4'$ tenendo conto della variazione di lunghezza subita dall'asta 3.4 e supponendo che la direzione di quell'asta si mantenga invariata. Si passerà poi al calcolo dei vettori $3'.2'$, $3'.1'$, $3'.0$ da una parte, e $3'.6'$, $3'.5'$, $3'.7'$ dall'altra, rappresentanti, in grandezza direzione e senso, e nelle ipotesi di vincolo fittizie sopra indicate, gli spostamenti dei nodi 2 , 1 , A e 6 , 5 , 7 .

Tracciato il diagramma, basterà ricordare che il nodo fisso non è 3 ma A . Non a $3'$ ma a O tale diagramma andrà dunque riferito, e $0.7'$ si riguarderà come spostamento provvisorio del nodo 7 .

Ogniquale tale spostamento non risulterà compatibile col vincolo effettivamente applicato al nodo 7 si dedurrà che l'asta 3.4 deve in realtà avere subita una rotazione. E la grandezza di questa si otterrà decomponendo il vettore $0.7'$ in due componenti, una parallela alla direzione di scorrimento del carrello, l'altra normale alla congiungente $A.7$.

Quest'ultima cambiata di segno, vale a dire letta nella direzione $7''.0$, misura lo spostamento di 7 da realizzarsi per rotazione rigida del sistema attorno ad A , e determina per conseguenza i contemporanei spostamenti $6''.0$, $5''.0$, $4''.0$, $3''.0$, $2''.0$, $1''.0$ di tutti gli altri nodi.

La prima componente $7''.7'$ misura invece lo spostamento effettivo del nodo vincolato, mentre gli spostamenti effettivi degli altri nodi saranno misurati da $6''.6'$, $5''.5'$, $4''.4'$, $3''.3'$, $2''.2'$, $1''.1'$.

TAVOLA C.

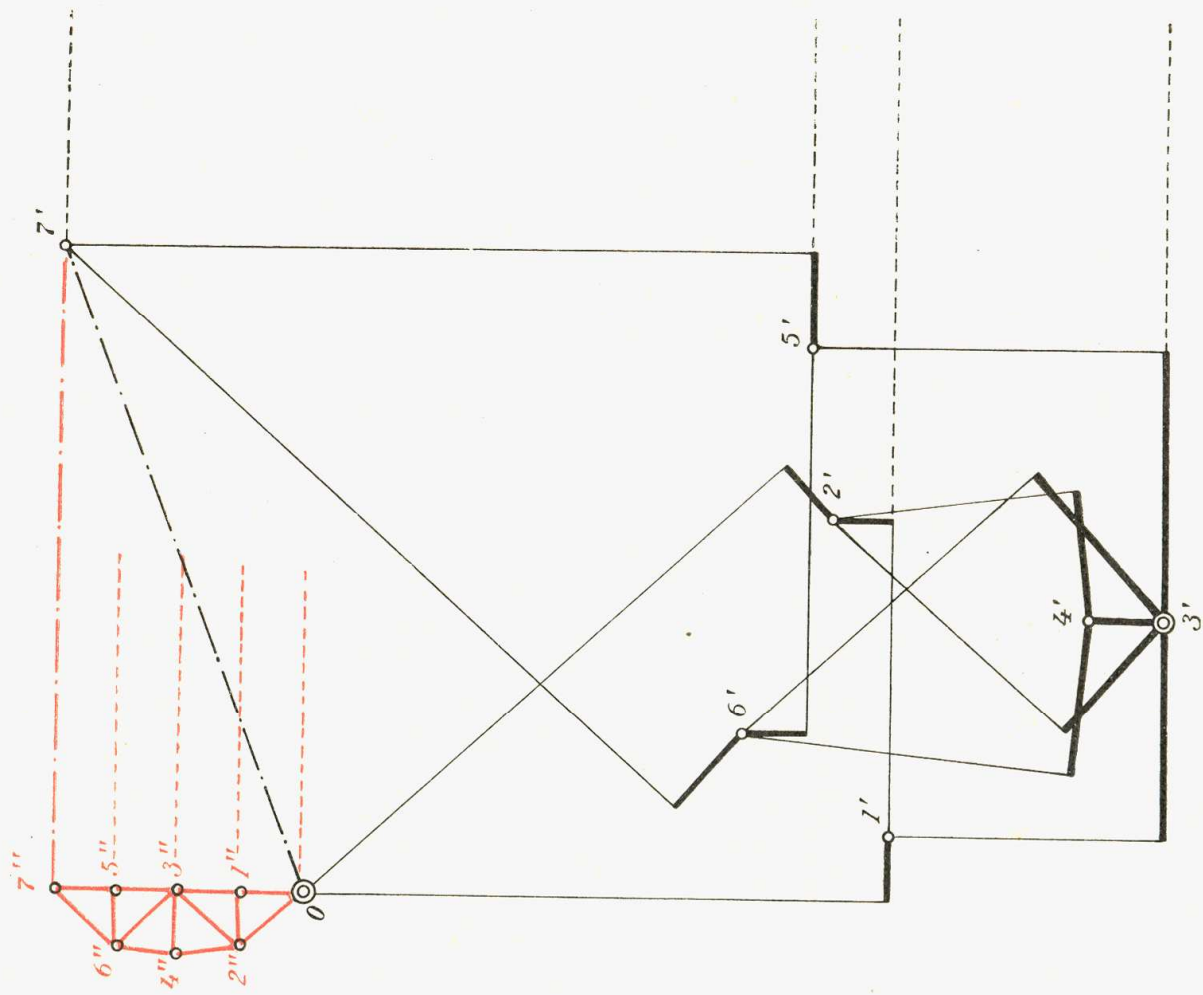
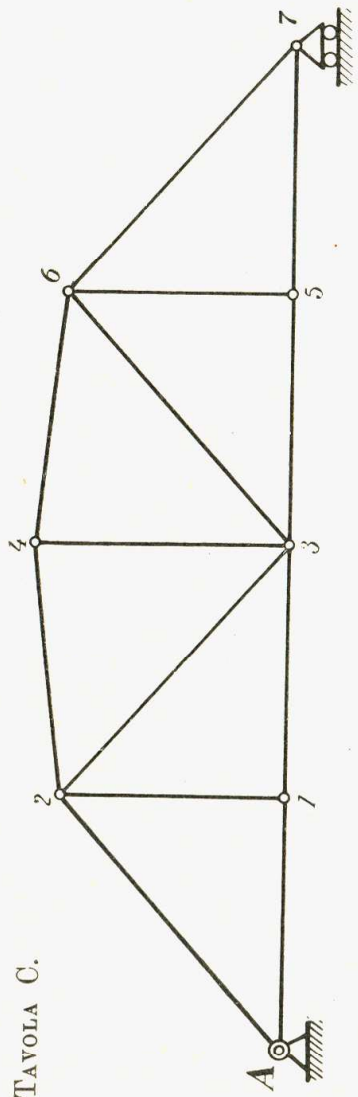
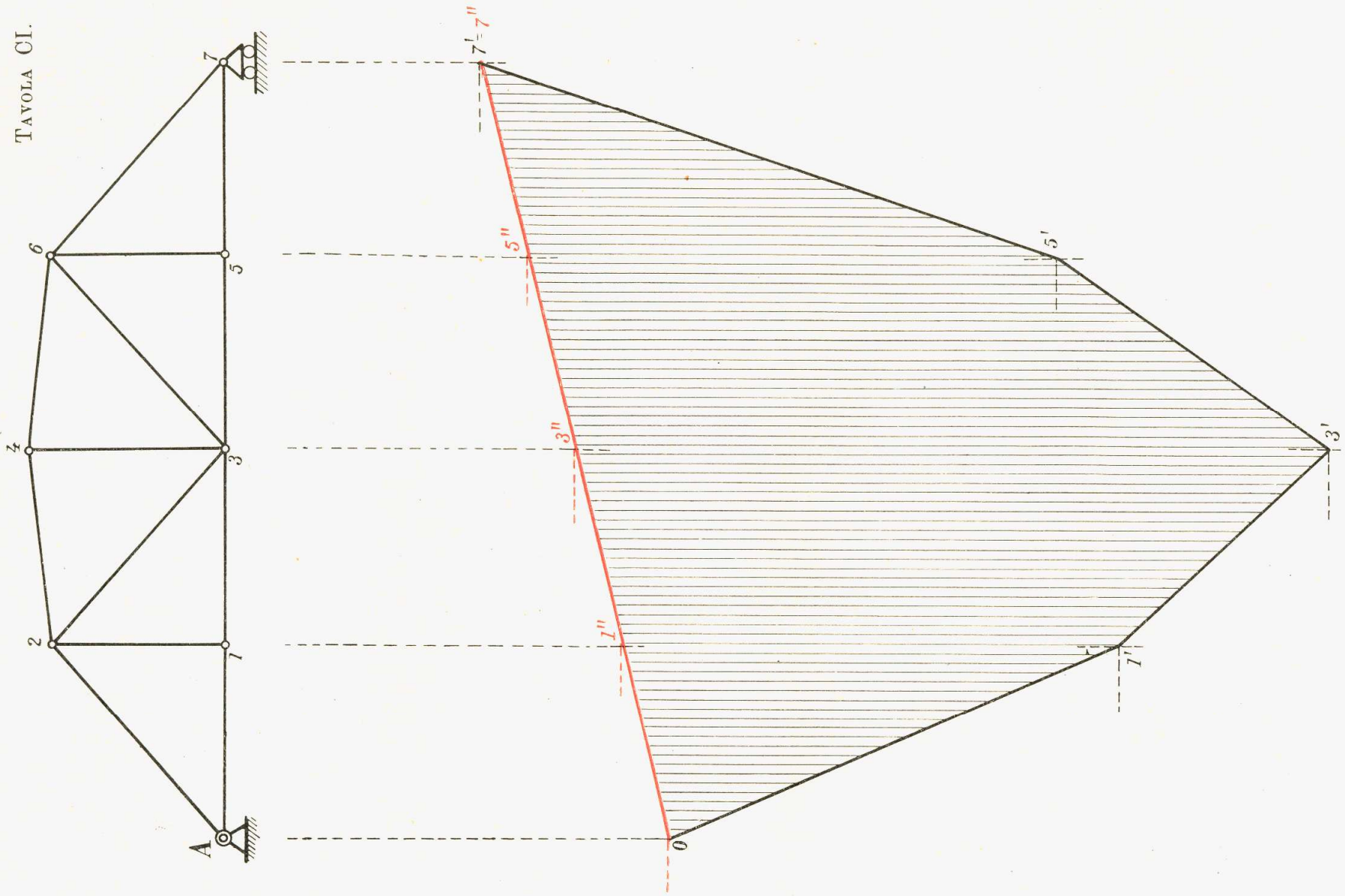


TAVOLA CL.



Ed ecco il caso dell'arco a tre cerniere, la cui trattazione grafica illustrata nelle tavole CII, CIII e CIV mostra chiaramente come si trattano i casi anche i più complessi.

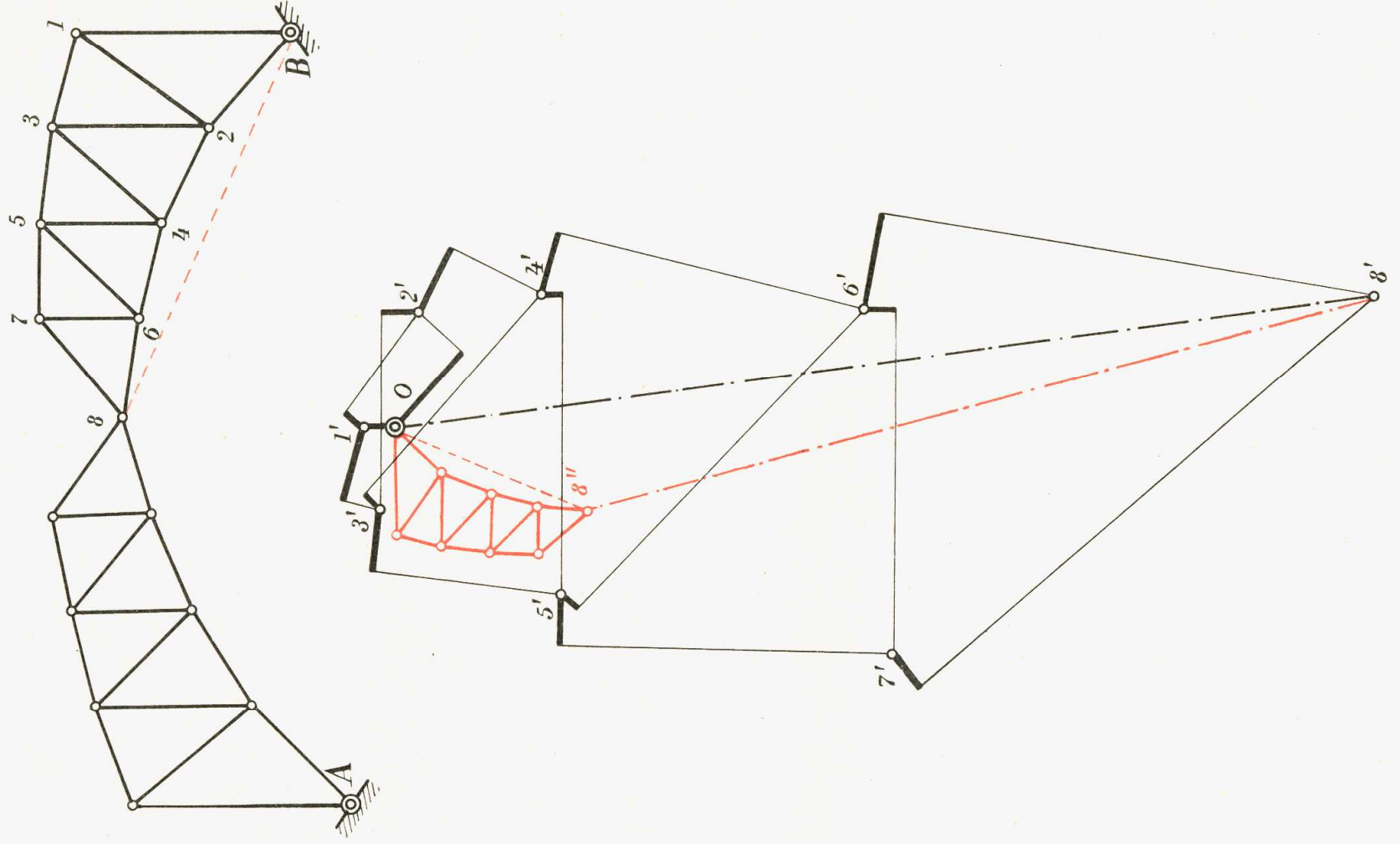
L'arco prescelto come esempio è quello stesso di cui abbiamo già avuto occasione di occuparci, a proposito dei diagrammi Cremoniani, a tav. XXX e XXXI. La costruzione del diagramma di Williot che qui presentiamo è anzi stata fatta supponendo che la condizione di carico, e quindi il sistema degli sforzi interni, siano proprio quelli già prospettati e calcolati in quell'occasione.

I due semiarchi di cui il sistema dato si compone verranno in un primo tempo considerati separatamente come due travi distinte aventi ciascuna un punto fisso, e la cui orientazione attorno a tale punto fisso può provvisoriamente essere assunta ad arbitrio introducendo la solita ipotesi della invariabilità della direzione di una determinata loro asta.

Nella tav. CII, in basso, il lettore troverà, tracciato in nero, il diagramma di Williot relativo al semiarco sinistro nella ipotesi della invariabilità della direzione dell'asta *A.1*.

Nella tav. CIII si vede invece, pure tracciato in nero, il diagramma analogo (e relativo ad un'analogia ipotesi di vincolo) per il semiarco destro.

TAVOLA CIII.



Naturalmente i due spostamenti $\theta \cdot S'$ che con le due costruzioni descritte si ottengono per il nodo comune S sono, in generale, differenti, ciò che non è compatibile col vincolo che in realtà sussiste tra le due porzioni in cui l'arco è stato idealmente diviso.

Noi sappiamo già che ciascuno di tali spostamenti vuol essere geometricamente addizionato con un altro spostamento suscettibile di essere prodotto da una rotazione rigida attorno al punto fisso del rispettivo semiarco; e sappiamo anche che la condizione che il vettore risultante sia, in grandezza direzione e senso, il medesimo nei due casi, dev'essere sufficiente a determinare le ampiezze delle due rotazioni.

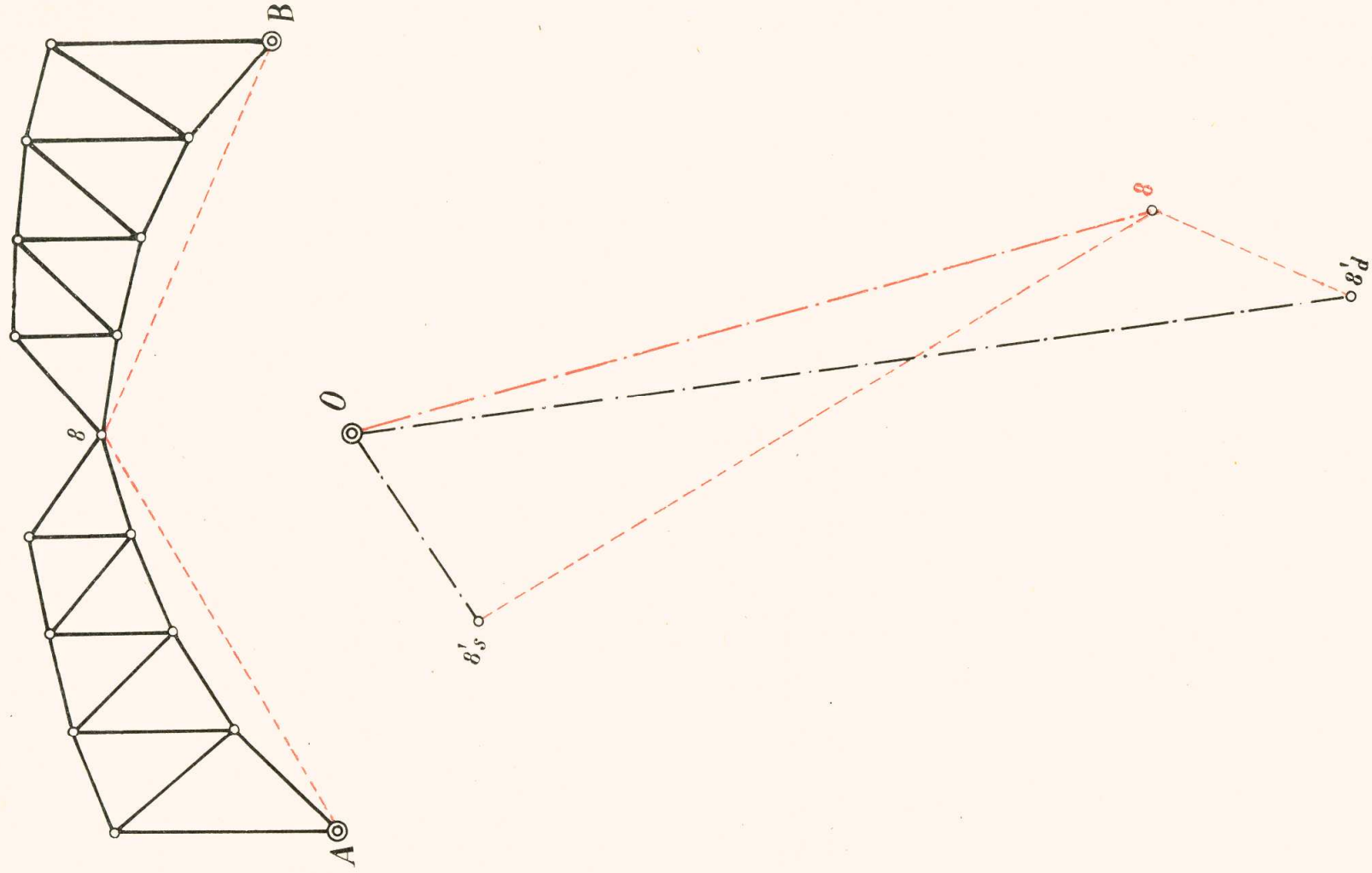
Il calcolo si eseguisce nel modo più semplice, come è indicato nella tav. CIV. In essa i due spostamenti provvisorii del nodo S considerato come appartenente al semiarco sinistro ovvero al destro sono stati riportati, a partire da una medesima origine, in $\theta \cdot S'_s$ ed in $\theta \cdot S'_d$ rispettivamente. Poi da S'_s si è condotta la normale alla congiungente di S col nodo fisso A del semiarco sinistro; da S'_d si è condotta la normale alla congiungente di S col nodo fisso B del semiarco destro; il vettore $\theta \cdot S$ che dall'origine va al punto di incontro di quelle due normali soddisfa evidentemente alle condizioni imposte e misura, in grandezza direzione e senso, lo spostamento effettivo della cerniera in chiave.

Se allora si riprendono in considerazione le figure precedenti e su di esse si riportano i risultati di queste costruzioni, si potranno immediatamente costruire i sistemi di spostamenti proprii nei nodi di ciascuno dei due semiarchi dalla rispettiva rotazione rigida.

Ciò è stato fatto e riprodotto in rosso nelle due tavole CII e CIII nelle quali, in perfetta conformità alle convenzioni già adottate negli esempi precedenti, si leggeranno gli spostamenti definitivi dei singoli nodi considerando i vettori

$$1'' \cdot 1' , 2'' \cdot 2' , 3'' \cdot 3' , \dots \dots \dots 8'' \cdot 8' .$$

TAVOLA CIV.



Nella tav. CV quelli dei predetti vettori che si riferiscono a nodi del corrente superiore sono stati proiettati sulle verticali dei rispettivi nodi e riportati a partire da un'orizzontale di riferimento arbitrariamente scelta; si è così ottenuta la deformata verticale del corrente superiore per la condizione di carico presa in considerazione.

