

IX.

Trattazione approssimata del problema del taglio.

Consideriamo la porzione di solido isolata fra due sezioni rette

$$z = z_1 \quad \text{e} \quad z = z_2$$

(supporremo per fissar le idee $z_2 < z_1 < l$) ed un piano normale all'asse di sollecitazione, cioè avente un'equazione del tipo

$$y = y_0$$

e scriviamo che deve esser nulla la somma delle proiezioni sull'asse z di tutte le forze che, nello stato di deformazione discusso nel precedente capitolo, agiscono sulle varie sue faccie.

Sulla faccia, che diremo A_1 , appartenente alla sezione retta di quota z_1 , agirà nella direzione dell'asse z , la tensione normale

$$\sigma_z = - \frac{\mathcal{T}(l - z_1)y}{J}$$

Sulla faccia opposta A_2 , appartenente alla sezione di quota z_2 , la quale guarda nel verso delle z negative, dovrà invece intendersi applicata la tensione $-\sigma_z$, se con

$$\sigma_z = - \frac{\mathcal{T}(l - z_2)y}{J}$$

si indica la tensione normale che agisce sulla faccia positiva della stessa sezione.

Similmente sulla faccia che appartiene al piano $y = y_0$, e che indicheremo con A_0 , supponendo che essa sia rivolta (fig. 29) dalla parte delle y negative, agirà, sempre nella stessa direzione, la tensione $-\tau_{yz}$.

Qualunque sia la legge di distribuzione di questa tensione, dovrà quindi aversi

$$\int_{A_0} \tau_{yz} dA_0 = -\frac{\mathcal{T}(l-z_1)}{J} \int_{A_1} y dA_1 + \frac{\mathcal{T}(l-z_2)}{J} \int_{A_2} y dA_2$$

Ma l'integrale

$$\int_{A_1} y dA_1$$

rappresenta il momento statico dell'area A_1 rispetto all'asse neutro x , momento statico che indicheremo genericamente con M ; l'altro integrale che compare nel termine seguente

$$\int_{A_2} y dA_2$$

è evidentemente esso pure eguale ad M .

Potremo quindi scrivere semplicemente

$$\int_{A_0} \tau_{yz} dA_0 = \frac{\mathcal{T}M}{J} (z_1 - z_2)$$

Ciò posto indichiamo con $\overline{\tau_{yz}}$ il valor medio della componente speciale di tensione τ_{yz} nei punti dell'area A_0 .

Poichè quest'area non è altro che un rettangolo avente per base b una corda, parallela all'asse neutro, della sezione retta, e per altezza la distanza $z_1 - z_2$, tra le due sezioni, il primo membro della precedente equazione si potrà scrivere semplicemente sotto la forma

$$\overline{\tau_{yz}} b (z_1 - z_2)$$

Si avrà in conseguenza

$$\overline{\tau_{yz}} = \frac{\mathcal{T}M}{bJ} \tag{88}$$

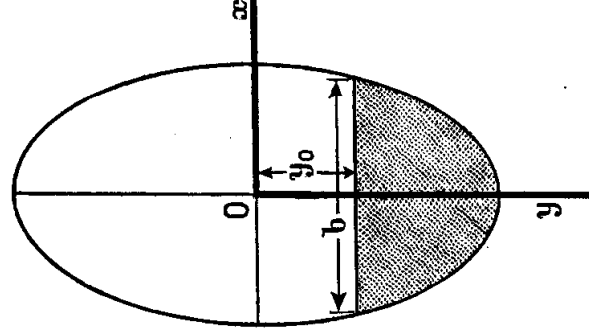


Fig. 29.

Ma τ_{yz} è indipendente da z e non rappresenta soltanto la tensione che in ciascun punto della faccia positiva di A_0 agisce parallelamente all'asse z , ma anche la tensione che nel medesimo punto, considerato come appartenente alla sezione retta, si sviluppa nella direzione dell'asse di sollecitazione.

Ne segue che $\overline{\tau_{yz}}$ è anche il valor medio di detta tensione tangenziale agente sulla sezione retta in corrispondenza della corda generica parallela all'asse neutro, e che la formola (88) esprime la legge secondo cui quel valor medio varia al variare della corda che si considera.

Tale valor medio è adunque inversamente proporzionale alla lunghezza b della corda, e direttamente al momento statico M , preso rispetto all'asse neutro x , della porzione di sezione che quella corda lascia dalla parte delle y positive.

Riferiamoci ad un caso particolare: quello in cui b è costante: la sezione è rettangolare; indicandone con h l'altezza si ha subito

$$M = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) \left(\frac{h}{2} - y \right) b = \frac{bh^2}{8} \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right)$$

Ricordando pertanto che

$$J = \frac{1}{12} bh^3$$

e ponendo al solito

$$A = bh$$

si trova

$$\overline{\tau_{yz}} = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{T}}{A} \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right)$$

La tensione tangenziale media $\overline{\tau_{yz}}$ si annulla dunque per $y = \pm \frac{h}{2}$ cioè sui due lati della sezione paralleli all'asse neutro.

Al variare di y tra questi limiti, essa varia con legge para-

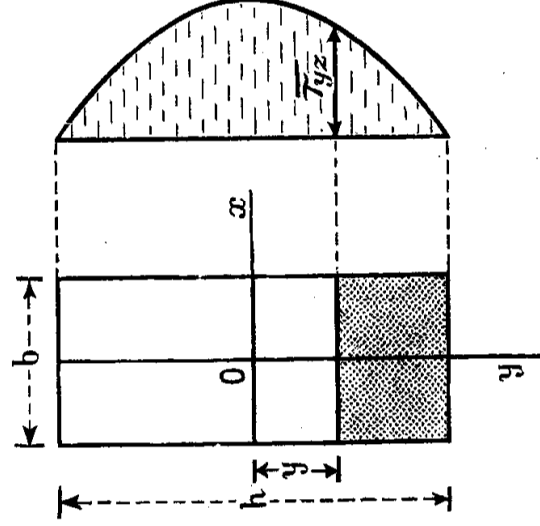


Fig. 30.

bolica (fig. 30) e divien massima per $y = 0$ cioè in corrispondenza dell'asse neutro, assumendovi il valore

$$\overline{\max \tau_{yz}} = \frac{3}{2} \frac{\tau}{A}$$

* * *

S'intende che il massimo valore effettivo della tensione tangenziale sulla sezione retta supererà il massimo dei valori medii, sia perchè la τ_{yz} varia in realtà da punto a punto della medesima corda, sia ancora perchè essa è, in generale, accompagnata da una τ_{zx} diversa da zero.

Volendo, si può farsi un'idea della possibile entità e distribuzione della τ_{zx} ricorrendo per essa ad una valutazione approssimata compatibile colla valutazione approssimata già adottata per la τ_{yz} .

Convieni a tal fine riprendere le equazioni indefinite ed ai limiti per l'equilibrio, tenendo naturalmente conto che, per le ragioni già esposte a pag. 101 e 103, la terza della (35) diviene, nel caso concreto di cui ci stiamo occupando:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

mentre la terza della (36) si riduce ancor più semplicemente a

$$\tau_{zx} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) = 0$$

Ora

$$\sigma_z = \frac{\mathcal{N}_x y}{J}$$

è evidentemente indipendente da x ; tale sarà quindi anche la sua derivata per rapporto a z . Lo stesso si deve ritenere qui della derivata di τ_{yz} per rapporto ad y , visto che tale tensione tangenziale si è supposta, in via di approssimazione, costante su ciascuna corda parallela ad x .

Anche $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}$ dovrà dunque risultare indipendente da x ; il che è quanto dire che τ_{zx} dovrà contenere x al primo grado, epperò

lungo ciascuna corda parallela all'asse x dovrà variare linearmente.

Ma ai due estremi della corda, secondo l'equazione ai limiti scritta dianzi, deve esser soddisfatta la relazione

$$\frac{\tau_{xx}}{\tau_{yz}} = \frac{\cos(n, y)}{\cos(n, x)}$$

la quale esprime ovviamente che la tensione tangenziale risultante deve essere diretta secondo la tangente al contorno della sezione.

La τ_{xx} è dunque da considerarsi completamente definita, agli estremi della corda, quando è nota la τ_{yz} .

In conseguenza della sua legge lineare di variazione, essa risulterà così definita anche in tutti i punti intermedi, ed i suoi valori saranno tali che *le tensioni tangenziali risultanti nei vari punti di una medesima corda convergeranno tutte nel punto d'incontro delle due tangenti al contorno nei punti estremi della corda stessa* (fig. 31).

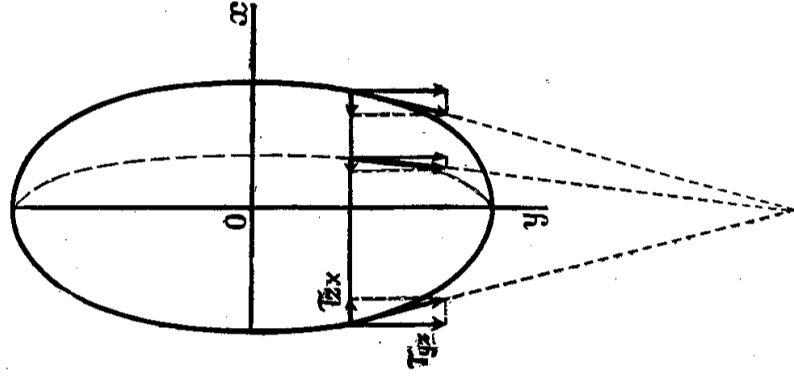


Fig. 31.

È facile constatare che, in queste condizioni, le linee di tensione (linee che in ciascun loro punto hanno per tangente la linea d'azione della tensione tangenziale risultante), dividono ciascuna corda in segmenti le cui lunghezze stanno fra loro in un rapporto costante.

La loro costruzione è quindi immediata e conduce ad una rappresentazione del fenomeno che è soltanto approssimativa, ma che ha, se non altro, il pregio di una grande semplicità.

* * *

Del resto non bisogna dimenticare che, se b è abbastanza piccolo a fronte di h , o più generalmente, se la sezione ha una forma sufficientemente allungata nel senso dell'asse di sollec-

tazione, la tensione tangenziale risultante ha una direzione ovunque assai prossima a quella del detto asse, e la sua grandezza, su ciascuna corda, si scosta pochissimo dal valor medio della τ_{yz} .

Si usa allora, in via di approssimazione, assumere il valore dato dalla (88) come misura della tensione tangenziale prodotta dallo sforzo tagliante \mathcal{T} nei singoli punti della sezione retta, e determinare in base a quella formola il massimo cimento del materiale.

La cosa è particolarmente giustificata quando si ha a che fare con sezioni simili a quella rappresentata nella fig. 32. In questo e nei molti casi affini, di uso frequentissimo nelle costruzioni, in cui i maggiori valori per le tensioni tangenziali si presentano in corrispondenza di una parte centrale della sezione ove la dimensione b è ridottissima, i risultati a cui così operando si giunge sono realmente vicinissimi al vero.

Per queste ragioni, e ferme restando naturalmente certe inevitabili restrizioni per ciò che concerne la forma della sezione, si ritiene generalmente che nelle applicazioni si possano senza inconveniente sostituire alle (86) le espressioni approssimate, assai più semplici:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\mathcal{M}_x y}{J} \\ \tau_{yz} &= \frac{\mathcal{T} M}{b J} \\ \tau_{zx} &= 0 \end{aligned} \quad (89)$$

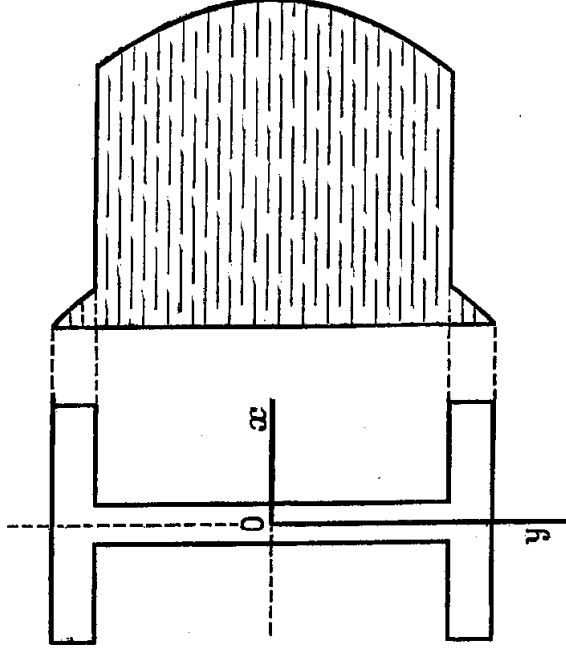


Fig. 32.

* * *

Di queste espressioni approssimate delle componenti speciali di tensione ci gioveremo immediatamente per calcolare un valore, sia pure soltanto approssimato, dell'energia elastica, la cui determinazione rigorosa, fatta prendendo le mosse dalle (86), riuscirebbe oltremodo complessa.

Applicheremo perciò la (50) o, più direttamente, la (42):

$$\varphi = \frac{\sigma_z^2}{2E} + \frac{\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}{2G}.$$

dalla quale si ricava subito

$$\varphi = \frac{1}{2E} \left(\frac{\mathcal{M}_z y}{J} \right)^2 + \frac{1}{2G} \left(\frac{\mathcal{T} M}{bJ} \right)^2$$

Moltiplicando il secondo membro per $dz \cdot dA$ ed integrando a tutta l'area A della sezione retta si trova il valore dell'energia elastica relativa al tronco di cilindro compreso fra due sezioni vicinissime di quote z e $z + dz$

$$d\Phi = \frac{dz}{2E} \left(\frac{\mathcal{M}_z}{J} \right)^2 \int y^2 dA + \frac{dz}{2G} \left(\frac{\mathcal{T}}{J} \right)^2 \int \left(\frac{M}{b} \right)^2 dA$$

dove, al solito,

$$\int y^2 dA = J$$

Se pertanto si pone

$$t = \frac{A}{J^2} \int_A \left(\frac{M}{b} \right)^2 dA \quad (90)$$

si può scrivere

$$d\Phi = \frac{\mathcal{M}_z^2 dz}{2EJ} + t \frac{\mathcal{T}^2 dz}{2GA}$$

da cui, tenendo presente il valore di \mathcal{M}_z ed integrando rispetto a z

$$\Phi = \frac{\mathcal{T}^2 l^3}{6EJ} + t \frac{\mathcal{T}^2 l}{2GA}$$

Il primo termine rappresenta esclusivamente l'energia relativa alla flessione non uniforme, calcolata come se essa si pre-

sentasse da sola, e si potrebbe giustificare con un ragionamento analogo a quello già accennato a pag. 186; l'altro va invece attribuito unicamente all'azione dello sforzo tagliante: il coefficiente t che in esso compare prende perciò il nome di *fattore di taglio*.

Esso, come già il suo corrispondente incontrato nella teoria della torsione, dipende soltanto dalla forma della sezione ed è perciò da considerarsi come completamente definito dalla (90) ogniquale volta quella forma è data.

Per le sezioni circolari ed ellittiche si trova così

$$t = \frac{10}{9}.$$

Per la sezione rettangolare si ha invece

$$t = \frac{6}{5}$$

Per le sezioni, sovente di forma assai complessa, che alle travi inflesse si danno nelle costruzioni, si possono trovare valori alquanto superiori.

In questi casi il calcolo esatto del secondo membro della (90) può presentare serie difficoltà: però ad una valutazione sufficientemente approssimata del fattore di taglio si può sempre giungere assai rapidamente nel modo seguente: si divida la figura data in un conveniente numero di striscie mediante corde condotte parallelamente all'asse neutro: detta b la lunghezza di una qualunque di queste, ed h la distanza tra essa e la precedente, si calcoli, analiticamente o graficamente poco importa, il momento M , rispetto all'asse neutro, di tutte le striscie che tale corda lascia dalla parte delle y positive: e si sostituisca infine all'integrale che compare nella (90) la somma dei prodotti delle singole aree parziali bh pei quadrati dei relativi rapporti $\frac{M}{b}$, o più semplicemente la somma dei prodotti dei quadrati dei momenti \mathcal{M} pei rapporti $\frac{h}{b}$.

Con ciò si viene a sostituire alla (90) l'espressione approssimata

$$t = \frac{A}{J^2} \sum M^2 \frac{h}{b}$$

* * *

APPLICAZIONE — TAVOLA IX.

Calcolo grafico del valore del fattore di taglio per una sezione a I composta di un'anima, quattro cantonali e due coppie di piattabande.

La sezione è rappresentata in disegno nella scala 1:4.

Essa è simmetrica non solo rispetto all'asse di sollecitazione (verticale), ma anche rispetto all'asse neutro (orizzontale): tutte le costruzioni ed i calcoli possono quindi venir limitati alla sola metà superiore della sezione.

La quale è stata divisa in sole cinque striscie: una suddivisione in un numero maggiore di striscie condurrebbe bensì ad una maggior precisione di risultati, ma avrebbe inevitabilmente nuociuto alla semplicità e chiarezza del disegno che qui ci premeva sopra ogni cosa.

Delle cinque striscie da noi adottate, la prima è esclusivamente costituita dalla sezione delle due piattabande, la seconda è limitata allo spessore delle ali orizzontali dei due cantonali, la terza si estende a tutta l'altezza delle loro ali verticali, le ultime due sono infine costituite esclusivamente da porzioni di sezione dell'anima.

Così ciascuna striscia viene ad avere forma rettangolare e si può colla maggior facilità e speditezza calcolarne l'area e determinarne il baricentro.

Ciò posto, le singole aree (opportunamente ridotte ad una base arbitraria α) si considerano come altrettante forze orizzontali concentrate nei rispettivi baricentri, e si collegano con un poligono funicolare p_1 di distanza polare pure arbitraria λ ; si ottengono così, sotto forma di segmenti intercetti dai successivi lati di tale poligono sull'asse orizzontale baricentrico, i momenti statici delle singole aree rispetto all'asse stesso, ridotti alla base superficiale $\alpha \cdot \lambda$.

Se si indica con m la somma algebrica dei primi r di questi segmenti, cioè il segmento intercetto fra il primo e l'eresimo lato del poligono p_1 , si può quindi scrivere l'espressione del mo-

mento statico (per rapporto al solito asse) delle prime r striscie, sotto la forma:

$$M = a \cdot \lambda \cdot m$$

Gli stessi momenti statici parziali possono poi anche venire utilizzati per il calcolo grafico del momento d'inerzia.

Basta riguardarli alla lor volta come forze orizzontali applicate nei lor centri relativi — vale a dire negli antipoli dell'asse considerato per rapporto alle ellissi centrali d'inerzia delle singole aree — e collegarli con un secondo poligono funicolare p_2 .

Detta μ la nuova distanza polare ed i il segmento intercetto dai due lati estremi del poligono p_2 sul solito asse baricentrico orizzontale, il momento d'inerzia della sezione rispetto a tale asse, sarà misurato da

$$J = a \cdot \lambda \cdot \mu \cdot i$$

Nel caso concreto di cui ci stiamo occupando, assunti

$$a = 10^{\text{cm}}$$

$$\lambda = 20^{\text{cm}}$$

$$\mu = 32^{\text{cm}}$$

si è ottenuto

$$i = 29^{\text{cm}}, 2$$

Si ha perciò

$$J = 10 \times 20 \times 32 \times 29,2 = 186880^{\text{cm}^4}$$

Quanto al fattore di taglio basta sostituire ad M e a J i loro valori perchè l'espressione approssimata trovata poc'anzi assumala forma

$$t = \frac{A}{\mu^2 i^2} \sum m^2 \frac{h}{b}$$

il cui calcolo numerico si può eseguire attribuendo ai singoli fattori quei valori che loro spettano nel disegno indipendente-mente dalla scala in cui questo è stato eseguito: il fattore di taglio è infatti un *numero* che dipende soltanto dalla forma della sezione, non dalle sue dimensioni.

L'espressione dell'energia elastica trovata a pag. 198 si può anche scrivere sotto la forma

$$\Phi = \frac{\mathcal{T}^2 l^3}{6 EJ} \left[1 + 6 \frac{m+1}{m} t \left(\frac{\rho}{l} \right)^2 \right]$$

In essa il rapporto di ρ ad l deve considerarsi come assai piccolo a fronte dell'unità, visto che per ipotesi la lunghezza del cilindro è sempre assai grande a fronte delle sue dimensioni trasversali.

Il secondo termine che sta nella parentesi quadra, e che è relativo all'azione del taglio, avrà perciò, in pratica, il carattere di un termine di correzione rispetto al termine che dipende dalla flessione.

Ciò spiega come sovente l'azione del taglio possa venir trascurata nella valutazione delle deformazioni complessive del sistema; spiega soprattutto il perchè, anche quando si voglia tenerne conto, sia sufficiente valersi della teoria approssimata.

Per farsi un'idea del grado di fiducia che si può accordare alle considerazioni che precedono si può ragionare nel modo seguente.

Immaginiamo che, contrariamente alle ipotesi fondamentali della teoria di Saint-Venant, la forza \mathcal{T} sia concentrata in un dato punto della base libera del cilindro, per esempio nel suo baricentro.

Si può allora ricavare un valore *approssimato* della freccia f di inflessione ponendo, secondo il teorema di Clapeyron

$$\Phi = \frac{1}{2} \mathcal{T} f$$

Si ha così

$$f = \frac{\mathcal{T} l^3}{3 EJ} \left[1 + 6 \frac{m+1}{m} t \left(\frac{\rho}{l} \right)^2 \right]$$

Nel caso del cilindro a sezione circolare, in cui, come abbiamo già detto

$$t = \frac{10}{9}$$

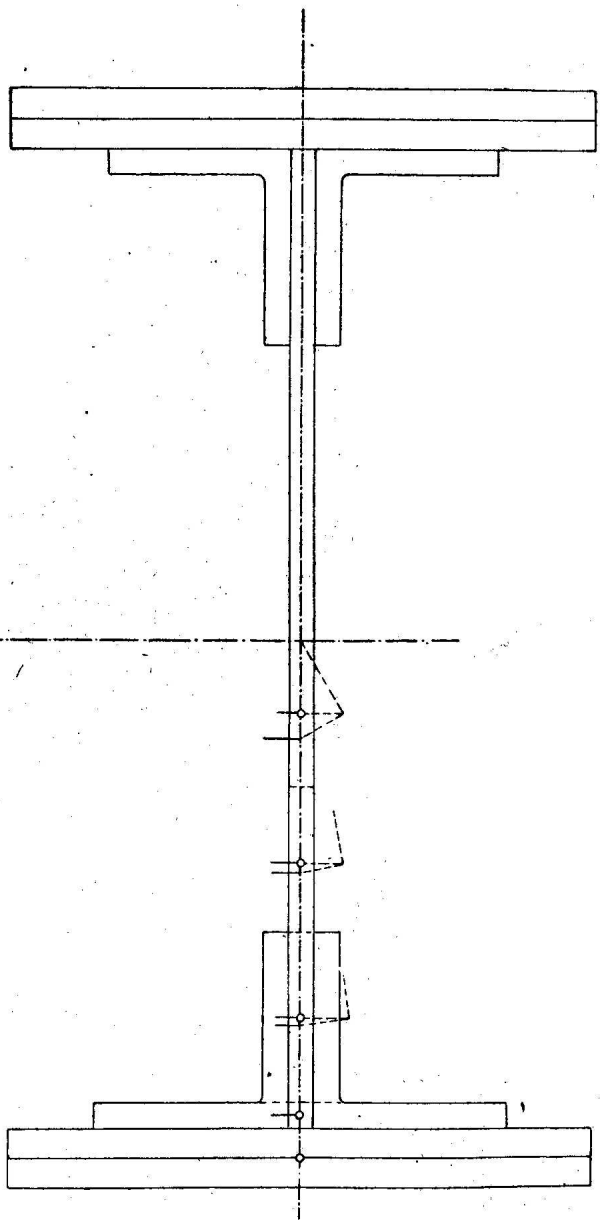
TAVOLA IX

(pag. 202).

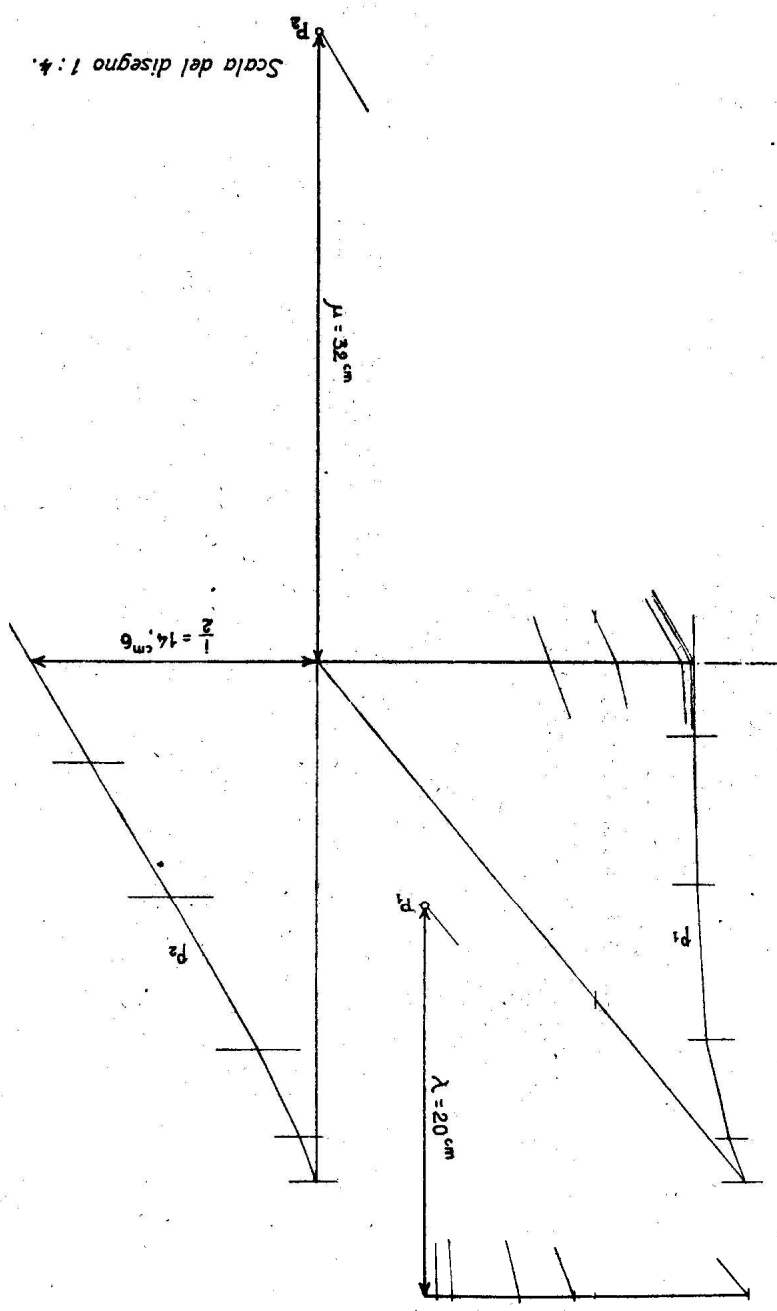
Calcolo grafico del valore del fattore di taglio per una sezione a I composta di un'anima, quattro cantonali e due coppie di piattabande.

m	m ²	h b	m ² $\frac{h}{b}$
2.95	8.70	0.10	0.9
3.80	14.44	0.05	0.7
4.65	21.62	2.15	46.4
4.75	22.56	5.78	130.4
4.80	23.04	5.78	133.2
$\frac{1}{2} \sum_A m^2 \frac{h}{b} =$			311,6

$$t = \frac{2,5 \times 8,3}{(8)^2 \times (7,3)^2} \times 2 \times 311,6 = 3,8.$$



$\alpha = 10 \text{ cm}$



posto $\frac{1}{m} = 0,30$, si avrebbe

$$f = \frac{\mathcal{T}^3}{3EJ} \left[1 + 8,67 \left(\frac{e}{l} \right)^2 \right]$$

mentre ponendo nella (85) il valore di b fornito dalla seconda delle (87) ferma restando l'ipotesi $\frac{1}{m} = 0,30$, si otterrebbe

$$f = \frac{\mathcal{T}^3}{3EJ} \left[1 + 10,80 \left(\frac{e}{l} \right)^2 \right]$$

Supponiamo per fissar le idee che il cilindro abbia una lunghezza eguale a 25 volte il suo diametro:

$$\frac{e}{l} = \frac{1}{100}$$

L'errore a cui conduce la teoria approssimata raggiunge allora appena il 0,2 per mille.

Trascurando senz'altro il termine relativo al taglio si sarebbe commesso un errore di poco superiore all'1 per mille.

Non è però detto che sia sempre così. Se per esempio si considera una trave a **I** del tipo di quella illustrata nella tav. IX, per la quale

$$t = 3,8$$

fermo restando il valore supposto dianzi per $\frac{1}{m}$, si trova

$$f = \frac{\mathcal{T}^3}{3EJ} \left[1 + 30,64 \left(\frac{e}{l} \right)^2 \right]$$

In pratica non è raro incontrar travi di questo genere di una lunghezza non superiore al decuplo dell'altezza. E poichè e è, per la sezione di cui stiamo discorrendo, prossimo ai $\frac{9}{50}$ dell'altezza, si può porre

$$\frac{e}{l} = \frac{4,5}{100}$$

In questa ipotesi, il termine relativo al taglio, calcolato in base alla teoria approssimata, rappresenta nientemeno che il 6 % del valore complessivo della freccia.

Comunque, una volta ammessa la teoria approssimata del problema del taglio, colle conseguenze tutte che da essa logicamente discendono, non è difficile procedere all'analisi dello stato di tensione interna di un solido soggetto a flessione composta.

Si può per esempio riprendere, per caso particolare di cui ci stiamo occupando, e coi mezzi di cui ormai disponiamo, un quesito che noi ci siamo a suo tempo proposto in forma assolutamente generale (pag. 68); e chiedersi *come varino, nel caso della flessione composta, direzione ed intensità della tensione interna quando l'elemento superficiale che la sopporta ruota attorno ad un punto o addirittura si sposta comunque nell'interno del solido.*

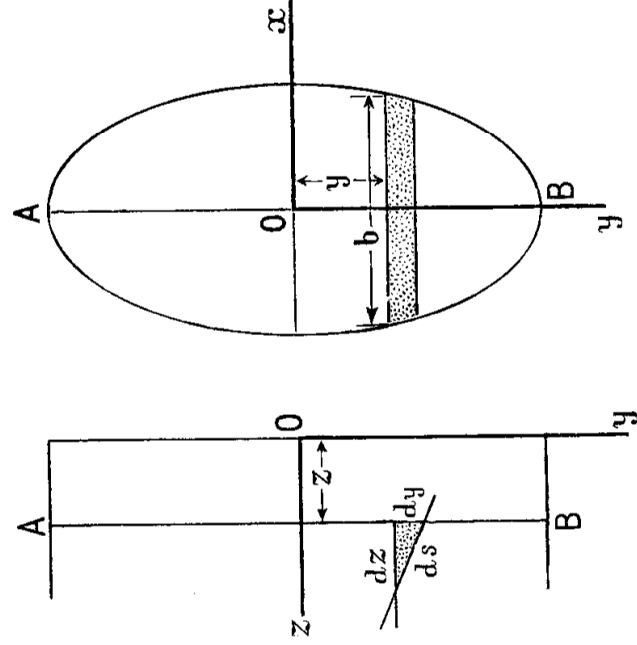


Fig. 33.

Per rispondere ad un simile quesito, noi riprenderemo in considerazione, nella solita sezione retta generica di quota z , la corda secondo cui essa è intersecata dal piano normale all'asse di sollecitazione di quota y (fig. 33).

Tracciata poi idealmente attraverso al solido una sezione

obliqua secondo un piano parallelo a tale corda e ad essa vicinissimo (ma però non passante per essa), noi immagineremo isolato il prisma triangolare elementare così delimitato, e ci chiederemo quali relazioni debbano intercedere tra le tensioni interne agenti sulle sue diverse faccie perchè esso prismetto sia, come dev'essere, in equilibrio.

A questo proposito incominceremo coll'osservare che il risultato dev'essere in ogni caso indipendente dalla lunghezza del prisma, cioè dalla sua dimensione misurata parallelamente all'asse x , per rapporto al quale le varie tensioni sono, o si suppongono, uniformemente distribuite.

Nulla ci vieta quindi di riferire i nostri calcoli ad un prisma di lunghezza arbitraria: tale per esempio che l'area della faccia di larghezza dy (situata sulla sezione retta) risulti eguale all'unità.

Le tensioni normale e tangenziale applicate su detta faccia risultano allora espresse senz'altro dalle prime due delle (89)

$$\sigma = \frac{\mathcal{N}_x y}{J}$$

e

$$\tau = \frac{\mathcal{T}M}{bJ}$$

Sulla faccia del prisma orientata normalmente all'asse y la tensione normale è nulla, la tensione tangenziale ha lo stesso valore unitario testè scritto. Detta pertanto dz la larghezza di detta faccia, e quindi $\frac{dz}{dy}$ la sua area, la tensione tangenziale totale su di essa agente sarà eguale a

$$\tau \frac{dz}{dy}$$

Similmente, detta ds la larghezza della faccia obliqua, e quindi $\frac{ds}{dy}$ la sua area, e denotati con σ' e con τ' i valori unitari delle tensioni normali e tangenziali su di essa agenti, queste tensioni dovranno intendersi rispettivamente misurate da

$$\sigma' \frac{ds}{dy} \quad \text{e da} \quad \tau' \frac{ds}{dy}$$

Per l'equilibrio queste cinque forze devono risultare equipollenti ai cinque lati di un poligono chiuso.

Lo si può facilmente ottenere in disegno se si incomincia col tracciare una poligonale $0, 1, 2, 3$ (fig. 34) i cui lati successivi siano ordinatamente equipollenti alle tre tensioni note $\tau \frac{dz}{dy}$, τ e σ . Perciò assunto un punto 1 ad arbitrio si segneranno a partire da esso due segmenti $\overline{1, 2}$ e $\overline{2, 3}$ atti a rappresentare in

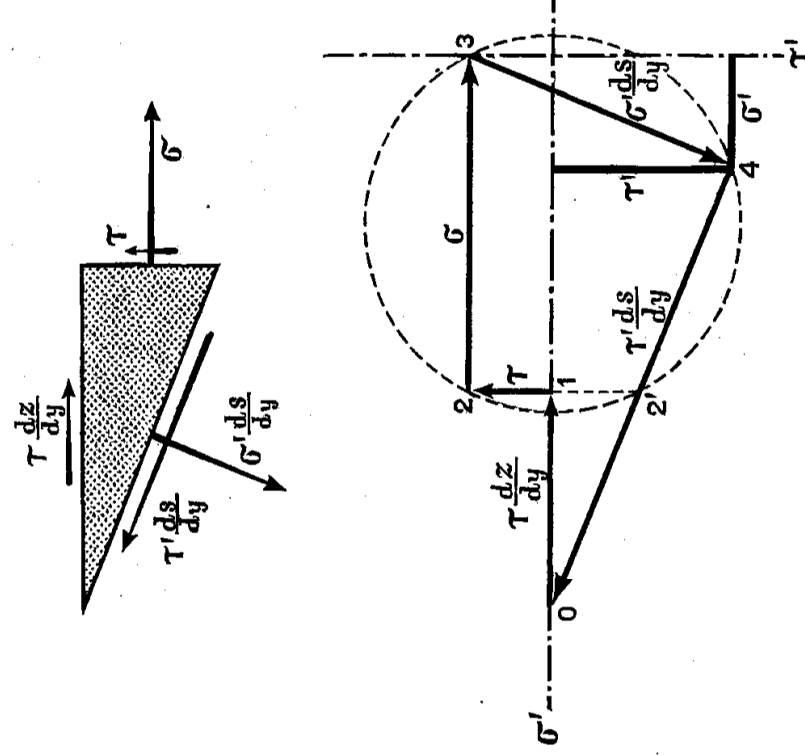


Fig. 34.

grandezza direzione e senso lo stato di tensione relativo alla faccia del prisma che appartiene alla sezione retta. Poi dal punto $2'$ simmetrico di 2 rispetto ad 1 si condurrà la parallela alla sezione obliqua e la si prolungherà fino a che essa incontri in 0 la parallela condotta per 1 alla sezione longitudinale: $\overline{0, 1}$ rappresenterà evidentemente, in grandezza direzione e senso, la tensione tangenziale agente su questa sezione longitudinale.

Si tratta ora di decomporre la risultante $\overline{0, 3}$ secondo le due direzioni di σ' e di τ' : per far ciò alla parallela $\overline{0, 2'}$ alla sezione obliqua si condurrà una normale dal punto 3 ; i due segmenti $\overline{3, 4}$

e $\overline{4,0}$ rappresenteranno, in grandezza direzione e senso, le due tensioni

$$\sigma' \frac{ds}{dy} \quad \text{e} \quad \tau' \frac{ds}{dy}$$

I valori unitarii σ' e τ' si dedurranno immediatamente in conseguenza: basterà abbassare le perpendicolari dal punto 4 rispettivamente sulla verticale (parallela alla sezione retta) condotta pel punto 3 e sulla orizzontale (parallela alla sezione longitudinale) condotta pel punto 0, o ciò che fa lo stesso per 1.

Diremo addirittura che σ' e τ' sono misurate dalle coordinate di 4 per rapporto a tali due rette assunte come assi cartesiani di riferimento, ciò che è tanto più giustificato in quanto esse rette sono entrambe indipendenti, nella nostra figura, dalla particolare scelta della sezione obliqua con cui noi abbiamo delimitato il nostro prisma elementare.

Supponiamo infatti che tale sezione obliqua muti comunque di posizione e di orientamento attorno alla corda della sezione retta considerata. Poichè ciò può bensì far mutare le dimensioni (larghezze) delle varie faccie del prisma, ma non può evidentemente influire sui valori unitarii delle tensioni σ e τ , i punti 3, 2, 1, e 2' resteranno fermi, e con essi la orizzontale per 1 e la verticale per 3.

Si sposterà bensì il punto 0 sulla prima di queste due rette, ma la $\overline{0,2'}$ dovrà pur sempre passare per il punto fisso 2', epperò non farà che ruotare attorno a tale punto.

Quanto al punto 4 in cui questa $\overline{0,2'}$ è incontrata dalla perpendicolare abbassata su di essa dal punto fisso 3, è ben evidente che non potrà che descrivere la circonferenza che ha $\overline{2',3}$ per diametro.

Questa circonferenza ha il suo centro sull'asse orizzontale di riferimento: è dunque simmetrica rispetto a tale asse.

In conseguenza, al variare dell'orientamento della sezione obliqua, τ' deve variare tra due valori estremi, contrarii di segno, ma di grandezze eguali al raggio della circonferenza

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

Le direzioni degli elementi superficiali su cui tali tensioni

tangenziali massime si esercitano possono immediatamente ottenersi proiettando dal punto fisso $2'$ i due estremi del diametro verticale (fig. 35). Esse sono naturalmente ortogonali.

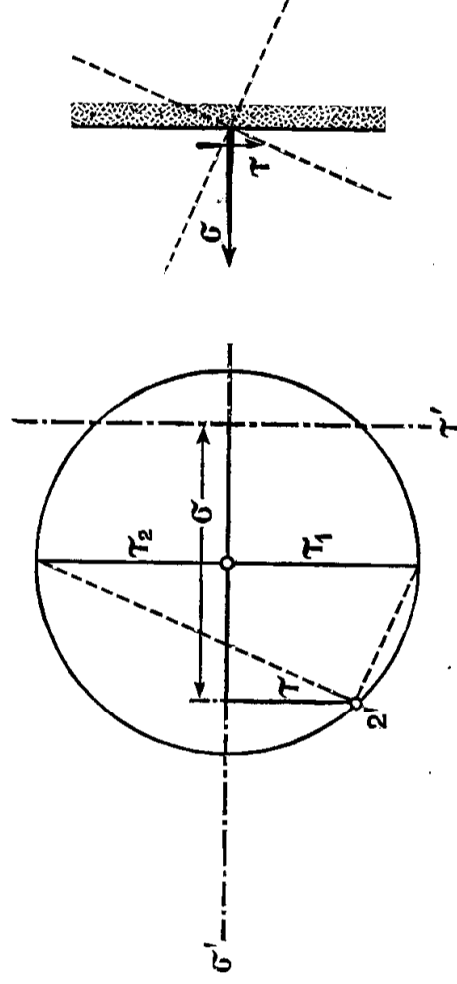


Fig. 35.

Che se poi si considerano invece i due elementi superficiali, pure fra loro ortogonali, che sono orientati a 45° sui primi, epperò si ottengono proiettando dal solito punto fisso $2'$ gli estremi del diametro orizzontale (fig. 36), la tensione tangenziale τ' riesce nulla.

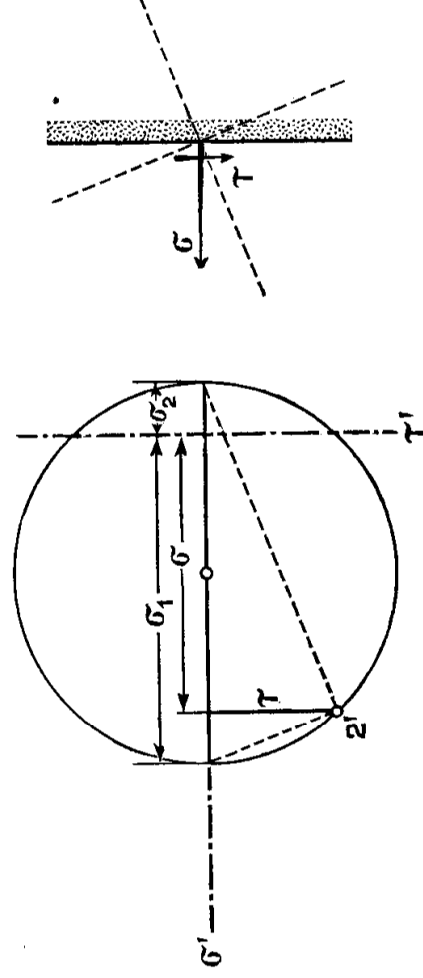


Fig. 36.

Su tali due elementi si esercitano dunque solo delle tensioni normali: e la figura mostra chiaramente che queste sono anzi la massima e la minima delle tensioni normali: la massima *tensione* cioè, e la massima *compressione*: quelle che a suo tempo abbiamo imparato a conoscere sotto il nome di *tensioni principali*.

Se si conviene di indicare la prima con σ_1 , l'altra con σ_2 , si ha dalle figure:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \sigma + \tau_1 = \frac{1}{2} \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \sigma - \tau_1 = \frac{1}{2} \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right)$$

Nei punti *A* e *B* della sezione retta che sono più lontani dall'asse neutro, da una banda e dall'altra, là dove

$$\tau = 0$$

le nostre figure si modificano per modo che gli elementi sui quali si esercita la massima tensione tangenziale unitaria risultano orientati a 45° col piano della sezione retta: per essi si ha

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{\sigma}{2}$$

Delle due tensioni principali, l'una è la stessa σ agente sulla sezione retta: l'altra che dovrebbe agire sugli elementi giacenti sulle sezioni longitudinali è nulla.

In corrispondenza dell'asse neutro invece è

$$\sigma = 0$$

Basta pensare al come debbono in conseguenza modificarsi le nostre figure per convincersi che gli elementi superficiali sui quali si esercitano le massime tensioni tangenziali vengono in questo caso a giacere nella sezione retta e nella sezione longitudinale: per essi si ha

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau$$

Quanto alle tensioni principali è chiaro ch'esse dovranno agire sugli elementi inclinati di 45° sui precedenti, e saranno eguali in valor assoluto: più precisamente si avrà

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$$

Il diagramma delle tensioni principali per tutti i punti della sezione si può del resto costruire graficamente in modo molto semplice e rapido, dati che siano i diagrammi delle σ e delle τ .

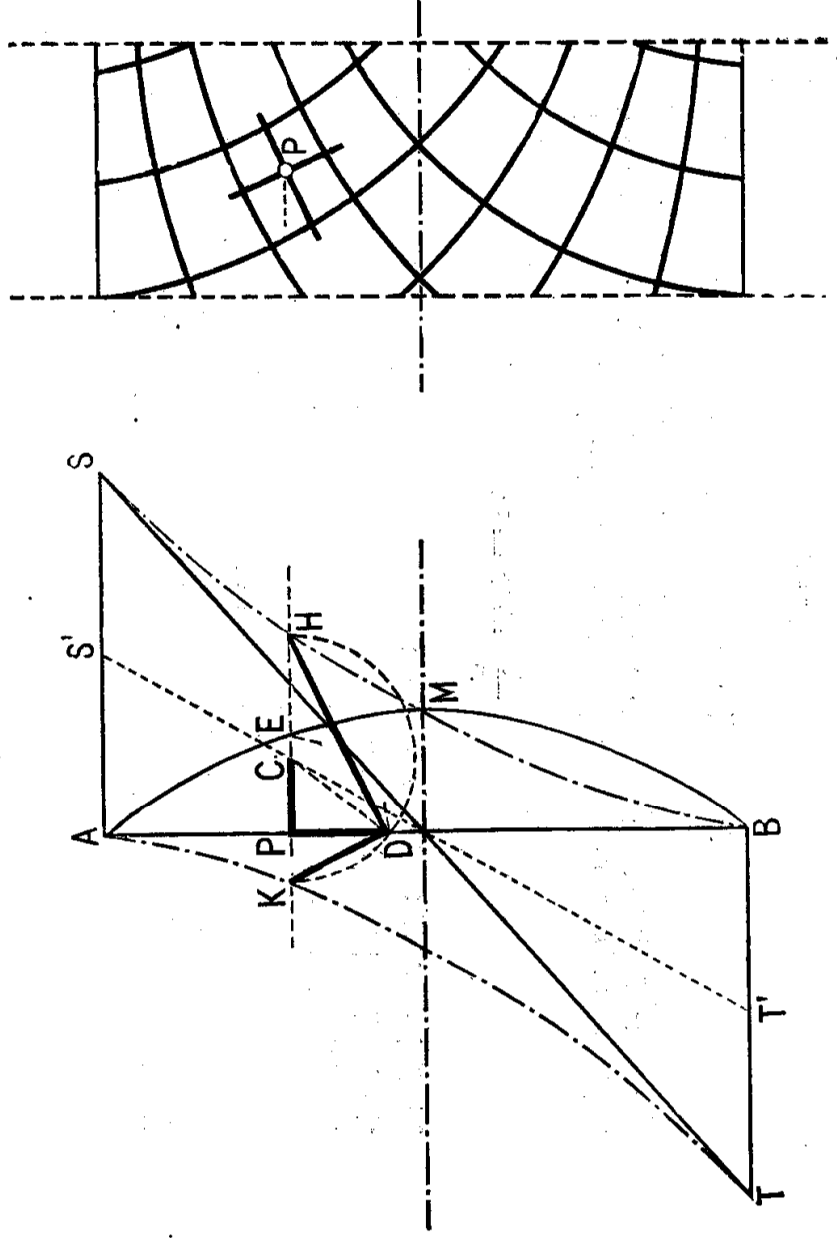


Fig. 37.

Assumiamo infatti come asse di riferimento l'asse stesso di sollecitazione AB (fig. 37) ed immaginiamo tracciate la retta ST e la curva AMB che colle loro ascisse, contate a partire da quell'asse, rappresentano in una data scala i valori delle tensioni unitarie normali e tangenziali.

Si segni la retta $S'T'$ di ascisse eguali ad $\frac{1}{2}\sigma$; poi in corrispondenza di una corda qualunque di traccia P si operi il ribaltamento dell'ascissa PE della curva delle τ in PD e si congiunga il punto D col punto C della retta ausiliaria $S'T'$.

Poichè

$$PC = \frac{1}{2} \sigma$$

$$PD = PE = \tau$$

si ha subito

$$CD = \sqrt{PC^2 + PD^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \tau_1 = \tau_2$$

Se pertanto si ribalta questo segmento CD da una parte e dall'altra di C in CH ed in CK , si ha

$$PH = PC + CH = \frac{1}{2} \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) = \sigma_1$$

$$PK = PC - CK = \frac{1}{2} \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) = \sigma_2$$

Il luogo dei punti H che, riferito alla retta $S'T'$, rappresenta la legge di variazione delle massime tensioni tangenziali, p. es. della τ_1 , riferito invece alla fondamentale AB rappresenterà dunque la legge di variazione della tensione principale σ_1 (massima *tensione normale*).

Analogamente si dica del luogo dei punti K che, a seconda che lo si riferisce all'una od all'altra di quelle due rette, viene a rappresentare la legge di variazione dell'altra tensione tangenziale massima τ_2 ovvero della tensione principale σ_2 (massima *compressione*).

APPLICAZIONE — TAVOLA X.

Ricerca delle tensioni principali in una sezione di rotaia sollecitata a flessione composta da uno sforzo tagliante di 5^t e da un momento flettente eguale a — 50^{tem}.

La sezione è disegnata al vero.

L'asse di sollecitazione coincide coll'asse verticale di simmetria y .

Si è perciò adottato un sistema di dividenti orizzontali scelte per modo da rendere il più possibile esatta ed agevole la determinazione così dell'area come del baricentro delle singole striscie in cui la sezione risulta divisa.

Queste aree, opportunamente ridotte ad una data base a , e considerate al solito come altrettante forze orizzontali concentrate nei rispettivi baricentri, vennero collegate con un primo poligono funicolare p_1 di distanza polare arbitraria λ , il quale, col punto d'incontro dei suoi due lati estremi, determina l'asse orizzontale baricentrico x (asse neutro). I vari segmenti interceduti su quest'asse dai successivi lati del poligono sono, com'è noto, proporzionali ai momenti statici delle singole aree per rapporto all'asse stesso: più precisamente sono i momenti statici ridotti alla base superficiale $a \cdot \lambda$.

Questi, riguardati alla lor volta come forze orizzontali, ed applicati come di dovere nei lor centri relativi — vale a dire negli antipoli dell'asse x per rapporto alle ellissi centrali di inerzia delle singole aree — vennero poi collegati con un secondo poligono funicolare p_2 , di distanza polare μ pure arbitraria, il quale, col segmento i intercetto sul solito asse x dai suoi due lati estremi, determina il momento d'inerzia

$$J = a \cdot \lambda \cdot \mu \cdot i$$

della sezione per rapporto dell'asse x .

Nel caso concreto

$$a = 5^{\text{cm}}$$

$$\lambda = 7^{\text{cm}},5$$

$$\mu = 5^{\text{cm}}$$

$$i = 5^{\text{cm}},35$$

epperò

$$J = 5 \times 7,5 \times 5 \times 5,35 = 1012^{\text{cm}^4},5$$

Si tratta ora di procedere all'analisi della ripartizione delle tensioni interne dipendenti dalla sollecitazione data.
Incominciamo dallo sforzo tagliante

$$\tau = 5^t.$$

e precisamente incominciamo col determinare il valore che, in corrispondenza di ciascuna delle dividenti orizzontali, assume la

$$\tau_{y/2} = \frac{\mathcal{T}M}{bJ}$$

Detto m il segmento intercetto sull'asse x tra il primo e l'eresimo lato del poligono p_1 , il momento statico M delle prime r striscie si può esprimere sotto la forma

$$M = a \cdot \lambda \cdot m$$

perciò

$$\tau_{y/2} = \frac{\mathcal{T} \cdot m}{b \cdot \mu \cdot i}$$

I segmenti $\frac{\mathcal{T} \cdot m}{i}$ sono stati in disegno calcolati a mezzo di una quarta proporzionale, poi riportati a partire dall'asse y sulle corrispondenti dividenti orizzontali. La punteggiata che ne unisce gli estremi dà un'idea del modo con cui lo sforzo tagliante \mathcal{T} si ripartisce sulle diverse striscie.

Per ottenere la legge di variazione delle tensioni tangenziali unitarie basterà moltiplicare quei segmenti per $\frac{1}{b \cdot \mu}$.

È consigliabile adottare provvisoriamente per unità di lunghezza la distanza polare μ e moltiplicare quindi i predetti segmenti per $\frac{\mu^2}{b \cdot \mu}$, vale a dire per il rapporto $\frac{\mu}{b}$.

Naturalmente, così facendo, le tensioni tangenziali vengono ad essere riferite ad un'unità di area pari a μ^2 . Nel caso concreto ($\mu = 5 \text{ cm}$) l'unità di area risulta eguale a 25 cm^2 .

Volendo poi le tensioni tangenziali $\tau_{y/2}$ riferite al centimetro quadrato basterà evidentemente leggere il relativo diagramma in una scala 25 volte più grande.

Assai più semplice riesce la determinazione delle tensioni normali

$$\sigma_z = \frac{\mathcal{N}_z y}{J}$$

dovute al momento flettente

$$\mathcal{N}_z = -50^{\text{tem.}}$$

La loro distribuzione dev'essere infatti rappresentata in disegno da una retta passante pel baricentro e che perciò riesce completamente determinata quando si conoscono le coordinate di un altro suo punto qualunque.

Si considerino per esempio i punti della sezione che sono i più lontani dall'asse neutro: quelli cioè situati sulla parte inferiore del contorno; per essi

$$y = 6^{\text{cm}},54$$

e quindi

$$\sigma_z = - \frac{50^{\text{tcm}} \times 6^{\text{cm}},54}{1012^{\text{cm}^4},5} = - 0^{\text{cm}^2},323$$

Tracciati così i diagrammi delle tensioni normali e tangenziali relativi alla sezione di rotaia considerata, la ricerca delle tensioni principali non presenta più alcuna difficoltà: le costruzioni grafiche occorrenti sono precisamente quelle già da noi illustrate nella fig. 37, e non vennero riprodotte nella Tavola per evitare un'inutile complicazione del disegno. In essa appaiono invece i diagrammi delle σ_1 e delle σ_2 , quali risultano da questa ricerca.

* * *

Ritorniamo alla fig. 37. In essa sono state determinate, per la corda generica considerata, non soltanto le grandezze PH e PK delle due tensioni principali, ma anche le direzioni degli elementi su cui le tensioni stesse agiscono: cioè le *direzioni principali*: e sono quelle delle congiungenti DH e DK che corrispondono ovviamente ai due raggi che nella fig. 36 proiettano da $2'$ gli estremi del diametro orizzontale.

Al variare della posizione della corda considerata sulla sezione retta, od allo spostarsi di questa nello spazio, le direzioni principali inviluppano nel piano due congruenze di linee, mutuamente ortogonali, che abbiamo a suo tempo chiamate *linee isostatiche*.

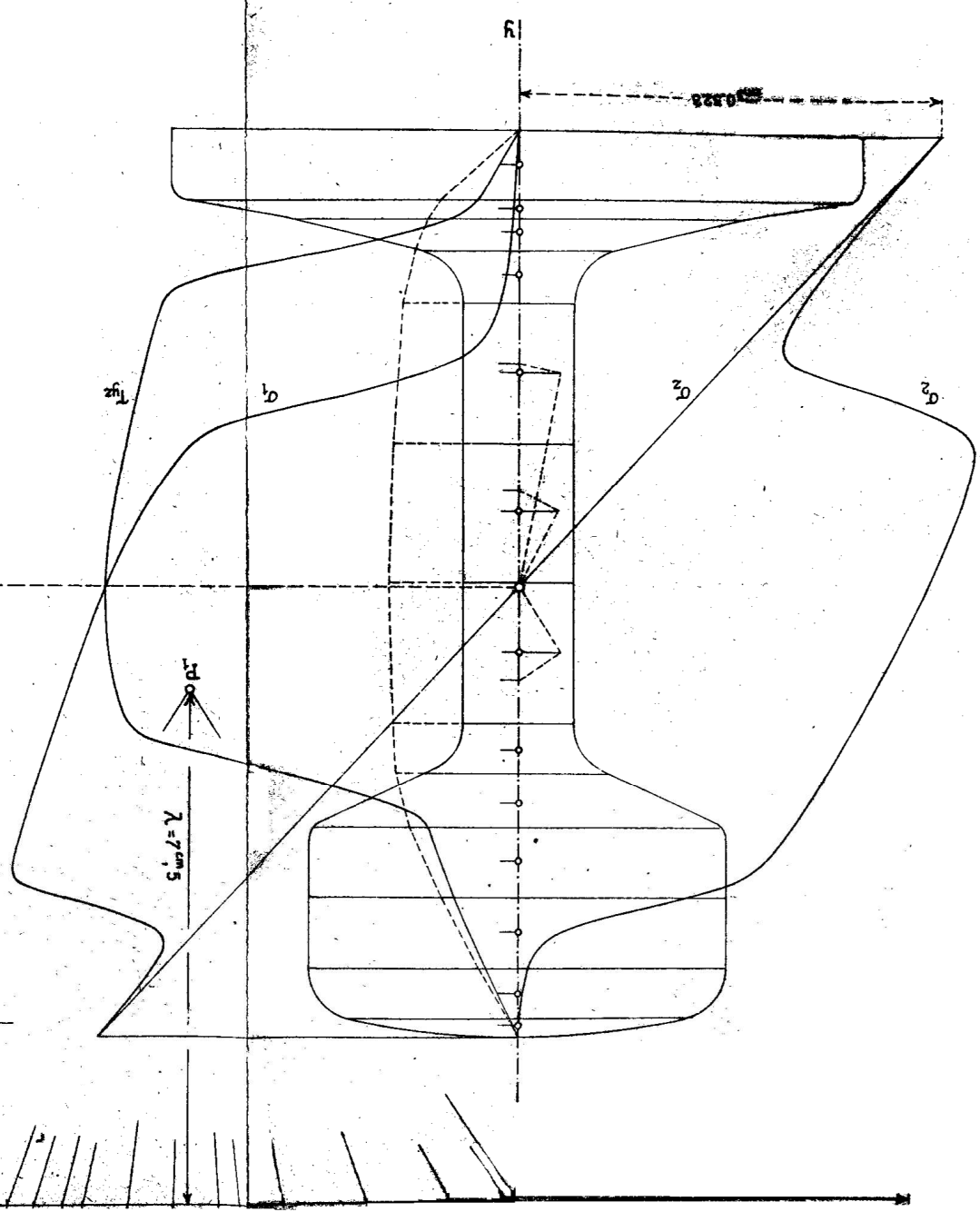
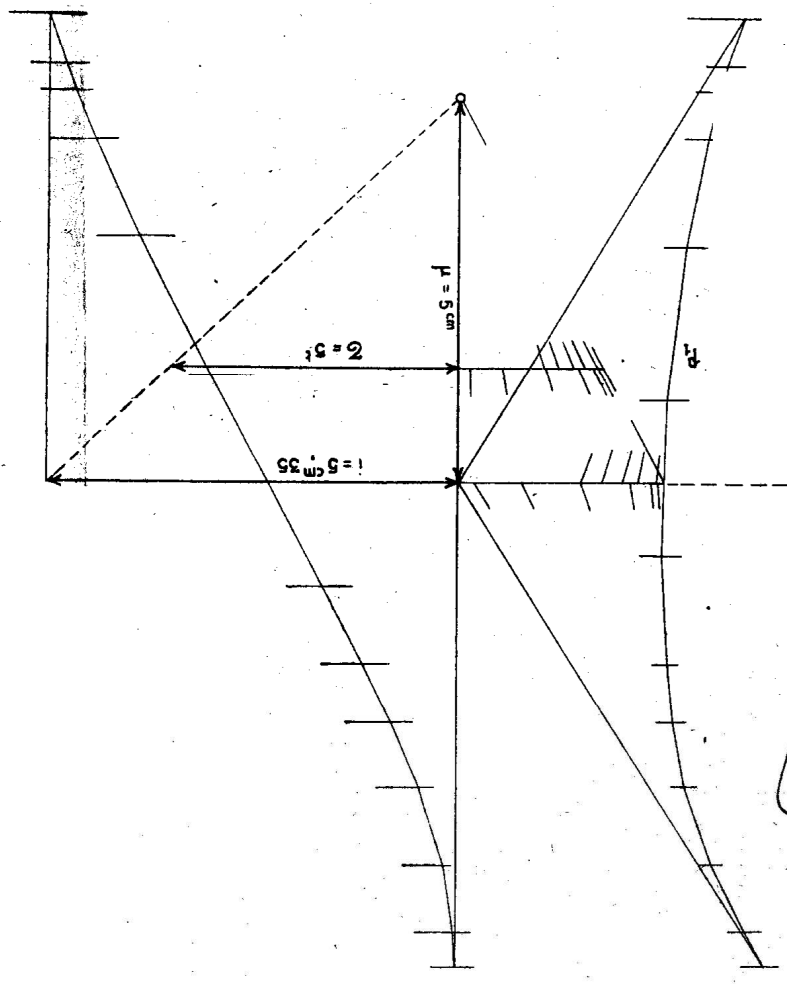
L'andamento di queste linee nel caso della flessione composta di una trave ad asse rettilineo ed a sezione rettangolare, è del

TAVOLA X

(pag. 214).

Ricerca delle tensioni principali in una sezione di rotaia sollecitata a flessione composta da uno sforzo tagliante di 5 t. e da un momento flettente eguale a --- 50 tem.

Scala delle forze e delle sezioni unitarie
 0 5 10
 0 0.2 0.4



tipo rappresentato a destra nella nostra figura. Ed è suscettibile di un interessante controllo sperimentale sul quale ci sembra opportuno soffermarci brevemente.

Basta operare, come abbiamo del resto già fatto in altre occasioni, su di una trave di vetro in cui la flessione composta si produce nel modo più semplice appoggiando la trave agli estremi e caricandola con un peso concentrato in mezzeria.

Lo stato di tensione interna che in essa trave si viene così a produrre verrà poi analizzato coll'aiuto della doppia rifrazione accidentale che l'accompagna.

L'esperienza si conduce in modo affatto analogo a quello che già ci ha servito per lo studio delle travi sollecitate a compressione eccentrica.

Soltanto questa volta non ci limiteremo più ad esaminare il modello con quel particolare orientamento dell'analizzatore e del polarizzatore di cui ci siamo esclusivamente avvalsi in quell'occasione: ma — pur conservando sempre l'asse dell'analizzatore perpendicolare a quello del polarizzatore — supporremo qui che l'uno e l'altro si possano far girare insieme attorno ad un asse di rotazione parallelo alla direzione dei raggi luminosi, in modo da assumere orientazioni differenti.

In conformità a quanto abbiamo detto a pag. 107, si manifesteranno allora delle regioni oscure ogniquale volta la distribuzione delle tensioni interne nella trave ammetterà due piani di simmetria paralleli al fascio e rispettivamente agli assi dell'analizzatore e del polarizzatore.

Ora, per ciascuna orientazione particolare di questi due assi, il fatto si verificherà in corrispondenza di tutte quelle corde per le quali identica orientazione hanno le direzioni principali.

Si otterranno così, sotto forma di linee oscure, i luoghi in cui le direzioni principali hanno inclinazioni ben determinate: queste linee prendono il nome di *linee isocline*.

Le tre fotografie che riproduciamo nelle Tavole XI, XII e XIII rappresentano la distribuzione delle zone illuminate e di quelle oscure, quali si osservano, nella trave inflessa nel modo anzidetto, quando uno degli assi dell'analizzatore o del polarizzatore fa col piano orizzontale (cioè parallelo all'asse della trave) angoli eguali rispettivamente a

0° ; 22°, 30' ; 45° .

Le fotografie hanno un difetto: quello di far apparire oscure, oltre alle regioni del campo che tali sono effettivamente, anche quelle che in realtà sono illuminate, ma che, nel succedersi delle frangie colorate, corrispondono a colorazioni che male impressionano la lastra sensibile.

Così, per esempio, nella terza delle nostre fotografie, solo la linea oscura centrale corrisponde ad una zona effettivamente oscura del campo, ed è interpretabile come isoclina relativa all'inclinazione di 45° .

A proposito di essa il lettore rileverà che — a parte una anomalia in centro, la quale è in relazione col particolare modo di applicazione del carico che, invece di essere ripartito sulla sezione di mezzo, grava tutto sulla faccia superiore della trave in corrispondenza del bordo superiore di quella sezione — è evidente la coincidenza di questa particolare isoclina colla immagine dell'asse geometrico della trave. Si ha così la conferma del fatto che le corde per le quali le due direzioni principali sono inclinate a 45° sulla orizzontale coincidono cogli assi neutri delle diverse sezioni.

Nella fotografia precedente la zona oscura ha un andamento discendente dall'angolo superiore sinistro verso l'angolo inferiore destro della immagine della trave. Essa individua l'isoclina relativa all'inclinazione di $22^\circ, 30'$: vale a dire il luogo delle corde per le quali una delle direzioni principali è inclinata di $22^\circ, 30'$ sull'orizzontale; l'altra direzione principale farà lo stesso angolo colla verticale: sarà dunque inclinata sull'orizzontale di $67^\circ, 30'$.

E finalmente nella prima fotografia si vedono le zone oscure praticamente coincidenti coi due bordi superiore ed inferiore dell'immagine: ciò è quanto dire che le corde per cui le due direzioni principali sono rispettivamente l'orizzontale e la verticale sono quelle situate sulla faccia superiore o su quella inferiore della trave.

Nella Tavola XIV tutti questi risultati si vedono ordinatamente raccolti ed utilizzati.

Nelle prime quattro figure si vedono le isocline relative alle quattro inclinazioni

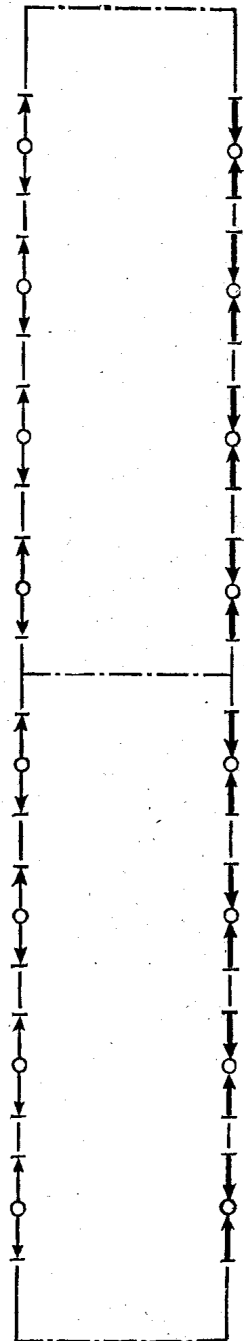
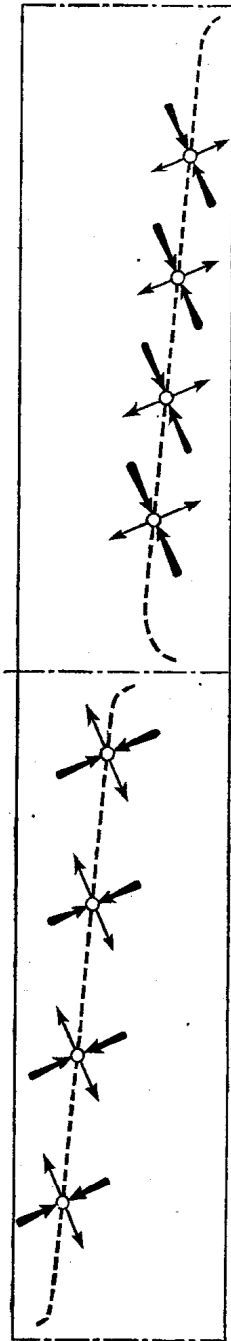
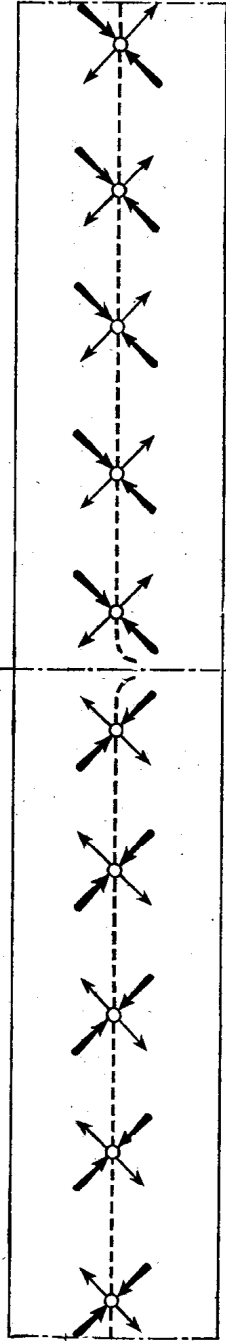
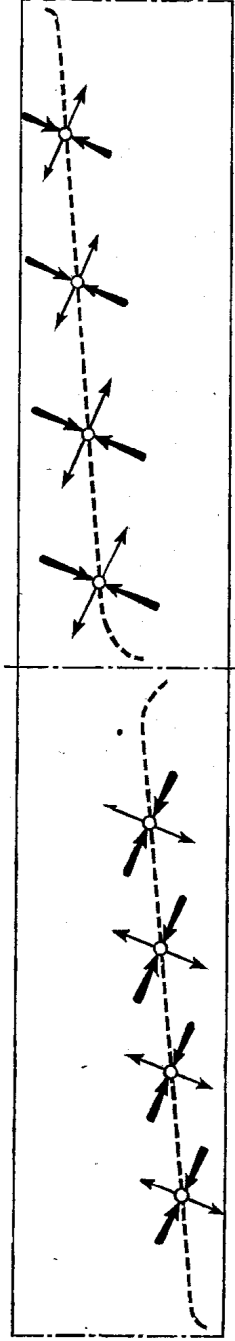
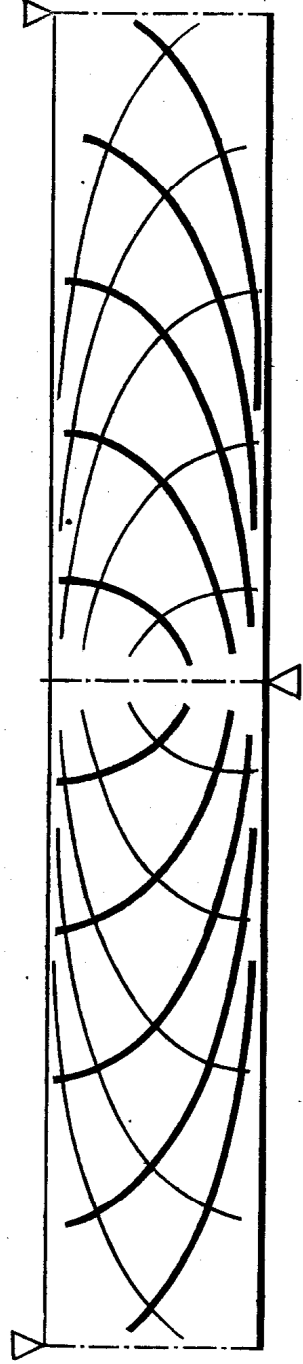
0° ; $22^\circ, 30'$; 45° ; $67^\circ, 30'$

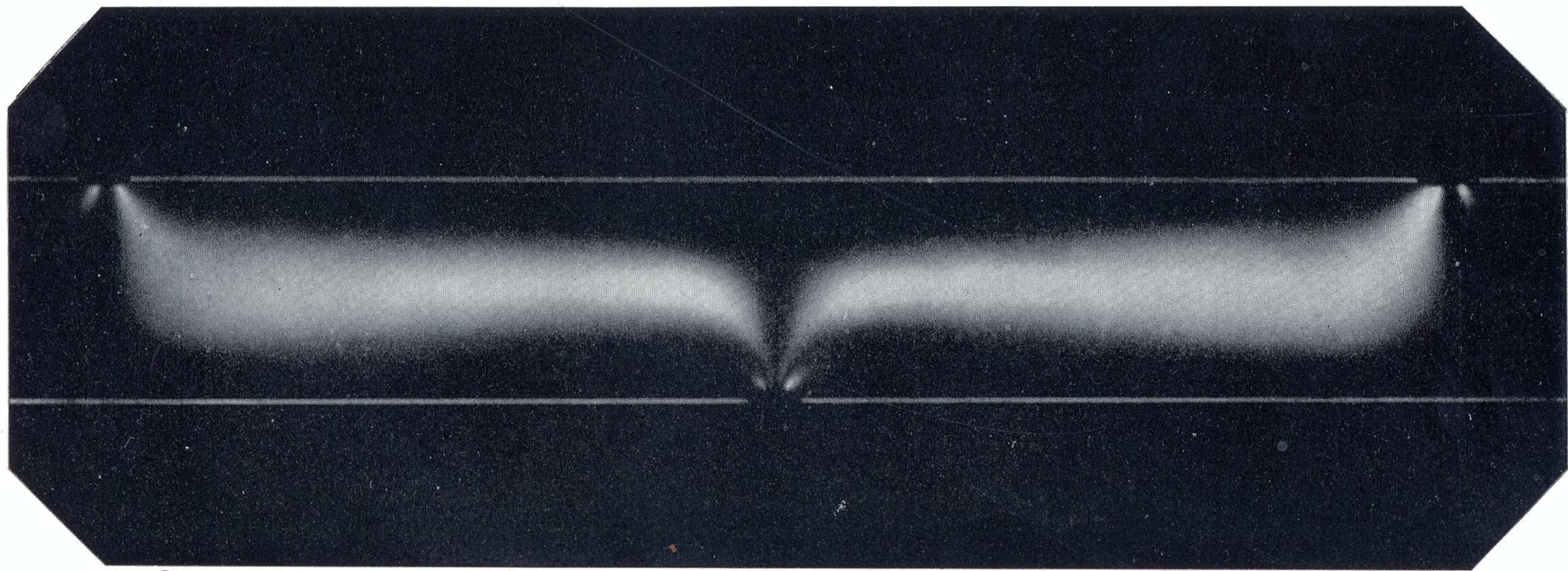
le prime tre delle quali sono direttamente tratte dalle corrispon-

TAVOLA XIV

(pag. 216).

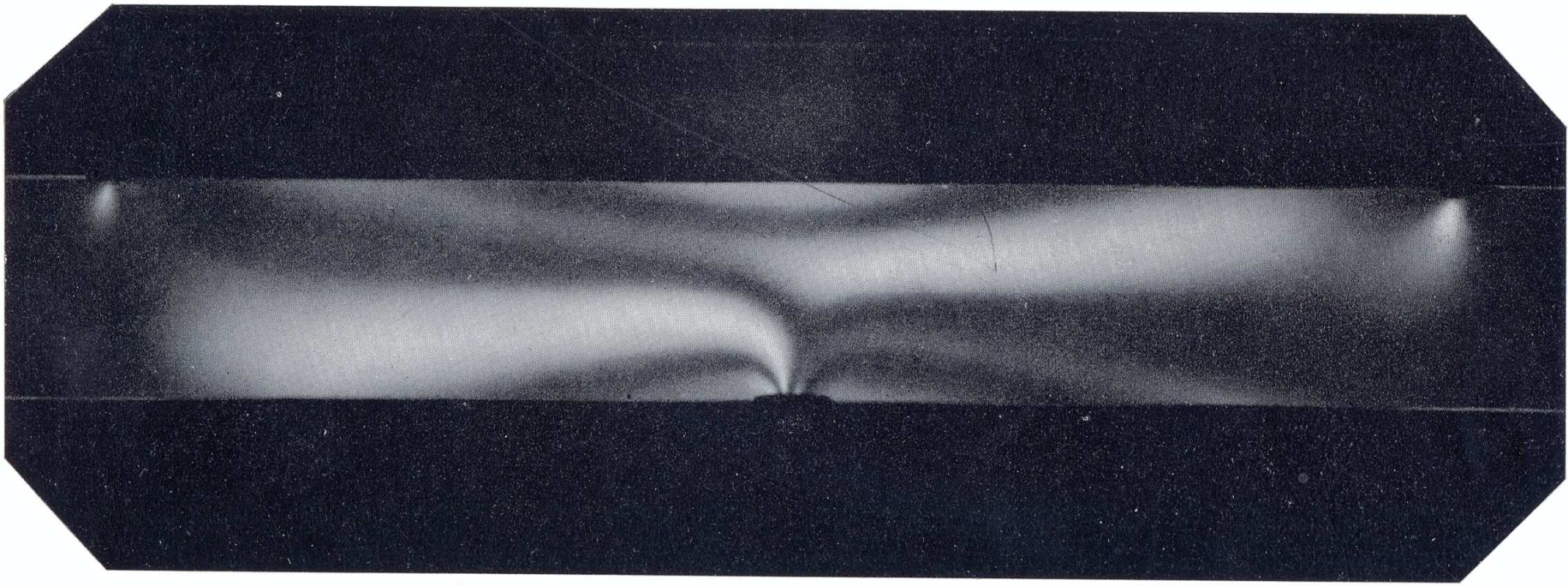
Determinazione sperimentale delle linee isocline, e conseguente tracciamento delle linee isostatiche, di una trave rettilinea a sezione rettangolare, semplicemente appoggiata agli estremi e caricata con una forza concentrata in mezzera.

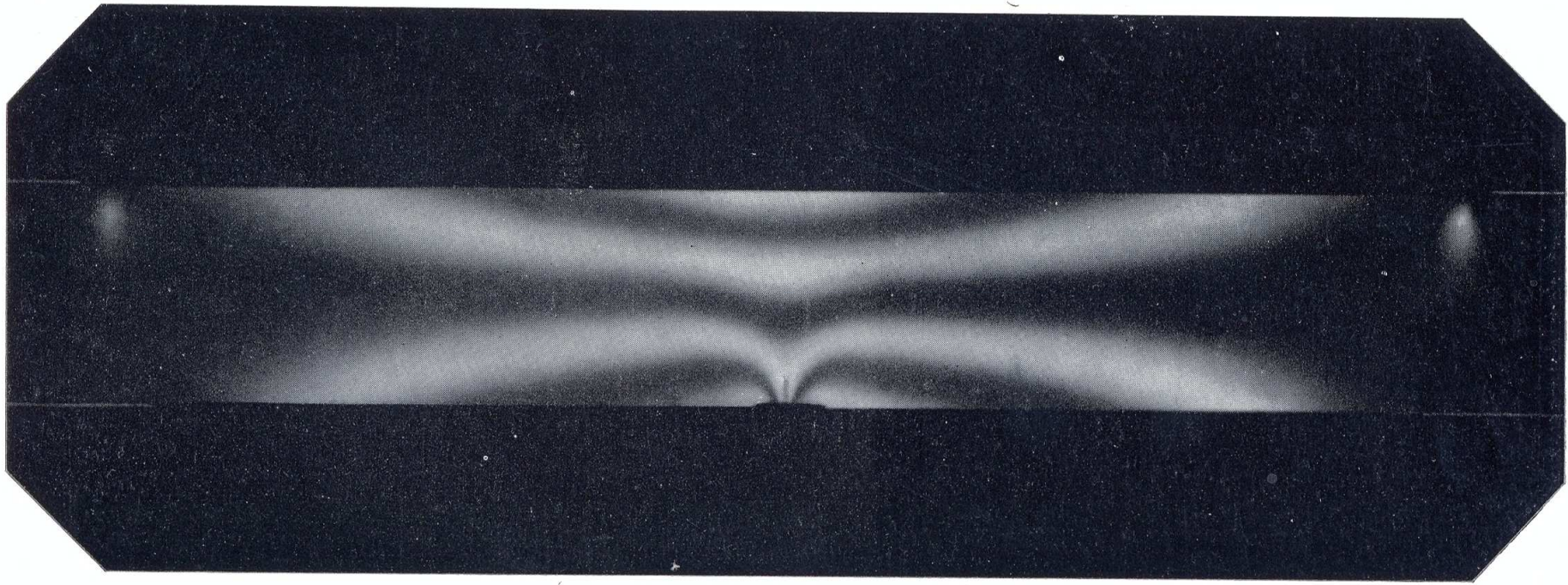




COLONNETTI, I.

Tav. XI (pag. 216).





COLONNETTI, I.

Tav. XIII (pag. 216).

denti fotografie; la quarta invece è dedotta dalla seconda in base ad ovvie considerazioni di simmetria.

Nella quinta ed ultima figura della tavola sono state poi disegnate le linee isostatiche, come quelle che, in corrispondenza di ciascuna isoclina, hanno precisamente l'inclinazione cui l'isoclina stessa si riferisce: è ovvio che queste isostatiche risultano tanto meglio definite quanto più numerose e vicine sono le isocline di cui si dispone: bastano però poche di queste, purchè ben scelte, per caratterizzare con approssimazione più che sufficiente ai nostri fini, l'andamento generale del fenomeno e le sue peculiari caratteristiche.
