

Flessione composta

(QUARTO CASO PARTICOLARE).

Indichiamo con c e con c' due delle solite costanti piccolissime e poniamo

$$u = -c \frac{xy}{m} - c' \left(\frac{xy}{m} - a \right) z$$

$$v = -\frac{c}{2} \left(z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m} \right) - c' \left(\frac{z^2}{6} - \frac{x^2 - y^2}{2m} - b \right) z$$

$$w = cyz + c' \left(\frac{yz^2}{2} - yx^2 + \psi(x, y) - ax - by \right)$$

dando a ψ , ad a e a b significati analoghi a quelli che alle stesse lettere si sono attribuiti nella trattazione del problema della torsione.

Incominciamo col constatare che queste espressioni delle tre componenti di spostamento soddisfano identicamente alle prime cinque delle (47); che anzi esse soddisfano anche alla sesta di quelle condizioni se si suppone, come del resto si è già fatto nel caso della torsione, che la funzione ψ sia armonica

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (80)$$

Le condizioni di vincolo (53) richiedono poi che si abbia

$$\psi_0 = 0 \quad a = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_0 \quad b = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_0 \quad (81)$$

L'ulteriore condizione occorrente per la completa determinazione della funzione ψ viene al solito fornita dalla (51) la quale, nel caso attuale, si può facilmente ridurre alla forma

$$\frac{d\psi}{dn} = \frac{2m+1}{m} xy \cos(n, x) + \left[\frac{2m-1}{2m} x^2 + \frac{1}{2m} y^2 \right] \cos(n, y) \quad (82)$$

*
**

Applichiamo ora le (48) e calcoliamoci le tensioni interne.
Troviamo

$$\sigma_z = E(c + c'z)y$$

$$\tau_{yz} = Gc' \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{2m-1}{2m} x^2 - \frac{1}{2m} y^2 \right)$$

$$\tau_{zx} = Gc' \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{2m+1}{m} xy \right)$$

Vale la pena di osservare che le tensioni normali sono, su ciascuna sezione retta, distribuite con una legge affatto analoga a quella caratteristica della semplice flessione, a cui il caso che stiamo studiando si riduce ovviamente se

$$c' = 0$$

Nel caso generale l'intensità di quelle tensioni normali varia però da sezione a sezione.

Si può fare in modo che esse si annullino su una data sezione retta, per esempio sulla base libera $z = l$.

Basta porre

$$c + c'l = 0$$

cioè

$$\frac{c}{c'} = -l$$

Si ha allora sulla detta base

$$P_x = Gc' \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{2m+1}{m} xy \right)$$

$$P_y = Gc' \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{2m-1}{2m} x^2 - \frac{1}{2m} y^2 \right)$$

$$P_z = 0$$

Questo sistema di azioni esterne capaci di mantenere il cilindro in equilibrio nello stato di deformazione proposto, noi riterremo al solito completamente definito dalle sue sei caratteristiche (55)

$$\mathcal{N} = 0$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}' = 0$$

$$Q = Gc' \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} x - \frac{\partial \psi}{\partial x} y \right) dA - \frac{2m-1}{2m} \int x^2 dA + \frac{4m+1}{2m} \int xy^2 dA \right]$$

$$\mathcal{T} = Gc' \left[\int \frac{\partial \psi}{\partial y} dA - \frac{2m-1}{2m} \int x^2 dA - \frac{1}{2m} \int y^2 dA \right]$$

$$\mathcal{T}' = Gc' \left[\int \frac{\partial \psi}{\partial x} dA - \frac{2m+1}{m} \int xy dA \right]$$

Per la particolare scelta da noi fatta degli assi

$$\int xy dA = 0$$

Si può inoltre dimostrare, con un procedimento del tutto analogo a quello che, in simili condizioni, abbiamo usato quando trattavamo il problema della torsione, che anche

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial x} dA = 0$$

È dunque nulla anche l'ultima delle sei caratteristiche scritte. Posto poi al solito

$$\int x^2 dA = J' \quad \int y^2 dA = J$$

si dimostra anche che

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial y} dA = \frac{4m+5}{2m} J + \frac{2m-1}{2m} J'$$

onde sostituendo si ha

$$\mathcal{T} = Gc' 2 \frac{m+1}{m} J = Ec' J$$

Il sistema di azioni esterne applicato alla base libera del cilindro è adunque equivalente ad una forza giacente nel piano di detta base e diretta parallelamente all'asse delle y .

La posizione della sua linea d'azione non si può però in generale definire ulteriormente in modo semplice: essa dipende infatti dal valore del momento Q nella cui espressione figura l'integrale

$$\int \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} x - \frac{\partial \psi}{\partial x} y \right) dA$$

il quale, a differenza di quelli che abbiamo incontrati fin qui, richiede per essere calcolato la previa determinazione della funzione ψ .

**

Ciò che non si sa fare nelle ipotesi generali da noi conservate durante tutta questa discussione di problemi speciali, diviene però molto facile se la sezione è simmetrica rispetto all'asse delle y .

In tal caso intanto è ovvio che si ha

$$\int xy^2 dA = 0$$

$$\int x^2 dA = 0$$

Inoltre se si passa da un punto del contorno al suo simmetrico rispetto all'asse delle y , la nuova normale n deve essere simmetrica della prima rispetto allo stesso asse: perciò $\cos(n, y)$ rimane immutato, mentre $\cos(n, x)$ conserva il suo valore assoluto ma muta di segno.

Si esprime ciò dicendo che

$\cos(n, x)$ è una funzione impari in x

$\cos(n, y)$ " " pari "

E poichè la stessa cosa accade ai coefficienti che queste due funzioni hanno nel secondo membro della (82) si può concluderne che

$$\frac{d\psi}{dn} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos(n, y)$$

deve alla sua volta essere pari in x .

Perciò occorre e basta che

$\frac{\partial \psi}{\partial x}$ sia una funzione impari in x

e che

$\frac{\partial \psi}{\partial y}$ " " pari "

Allora

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} x - \frac{\partial \psi}{\partial x} y$$

riesce impari in x , epperò si ha

$$\int \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} x - \frac{\partial \psi}{\partial x} y \right) dA = 0$$

Se ne conclude che la quarta caratteristica del sistema di azioni applicate alla base libera è identicamente nulla: la risultante che abbiamo nel paragrafo precedente indicata con \mathcal{T} ha dunque per linea d'azione l'asse di simmetria della sezione.

Il piano coordinato yz è in questo caso piano di simmetria non soltanto per il solido elastico ma altresì per la sollecitazione. Rispetto ad esso anche la deformazione deve dunque riescire simmetrica; ciò d'altronde risulta direttamente dalle espressioni stesse da noi attribuite alle componenti di spostamento se si tiene presente che, per essere $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ impari in x , deve essere

$$a = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_0 = 0 \quad (83)$$

Supponiamo ora che sia data la grandezza \mathcal{T} della risultante delle forze esterne applicate alla base libera del cilindro, intendendo che la linea d'azione di questa risultante coincida coll'asse di simmetria (parallelo all'asse y) di detta base. Basterà porre

$$c' = \frac{\mathcal{T}}{EJ}$$

e quindi

$$c = -\frac{\mathcal{T}l}{EJ}$$

per avere le componenti di spostamento

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\mathcal{T}}{EJ} \frac{xy}{m} (l-z) \\ v &= \frac{\mathcal{T}}{EJ} \left[\frac{z^2}{2} \left(l - \frac{z}{3} \right) - \frac{x^2 - y^2}{2m} (l-z) + bz \right] \\ w &= -\frac{\mathcal{T}}{EJ} \left[yz \left(l - \frac{z}{2} \right) + yx^2 + by^2 - \psi(x, y) \right] \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

È facile convincersi che questa deformazione presenta le caratteristiche generali di una flessione.

Consideriamo infatti una retta inizialmente parallela all'asse del cilindro: su di essa x ed y mantengono valori costanti. La linea in cui essa si trasforma per effetto della deformazione si otterrà eliminando z tra le tre equazioni

$$x' = x + u \quad y' = y + v \quad z' = z + w$$

che danno le nuove coordinate del punto generico x, y, z .

Tenuto conto che le u, v, w sono per ipotesi piccolissime, si potrà eseguire questa eliminazione sostituendo z' a z nelle due prime equazioni. Si otterranno così le due equazioni approssimate della curva cercata sotto la forma:

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{\mathcal{T}}{EJ} \frac{xy}{m} (l-z') \\ y' &= y + \frac{\mathcal{T}}{EJ} \left[\frac{z'^2}{2} \left(l - \frac{z'}{3} \right) - \frac{x^2 - y^2}{2m} (l-z') + bz' \right] \end{aligned}$$

Questa curva è dunque una parabola cubica contenuta in un piano parallelo all'asse y .

Per $x = y = 0$ si ha la linea elastica, la quale naturalmente sta nel piano coordinato yz , ed ha un'equazione della forma

$$y = \frac{\mathcal{T}}{EJ} \left[\frac{z^2}{2} \left(l - \frac{z}{3} \right) + bz \right]$$

Essa parte dall'origine con un'inclinazione sull'asse z non nulla: precisamente si ha

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_0 = \frac{\mathcal{T}}{EJ} b$$

La sua ordinata massima, spostamento del baricentro della base libera, si ottiene facendo $z=l$, epperò vale

$$f = \frac{\mathcal{T} l^3}{3EJ} + \frac{\mathcal{T}}{EJ} bl \quad (85)$$

**

Volendo procedere all'analisi dello stato di tensione conviene ricordare che, a differenza di quanto abbiamo visto verificarsi in tutti gli altri casi fin qui studiati, le caratteristiche della sollecitazione interna variano qui da sezione a sezione.

Si può infatti agevolmente constatare che su ciascuna sezione retta coesistono nel caso attuale uno sforzo tagliante di intensità costante.

$$\mathcal{T}_z = \mathcal{T}$$

ed un momento flettente variabile

$$\mathcal{M}_z = -\mathcal{T}(l-z)$$

La distribuzione delle tensioni interne su ciascuna sezione retta riesce definita completamente dalle seguenti espressioni delle componenti speciali di tensione non nulle:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\mathcal{M}_z y}{J} \\ \tau_{yz} &= \frac{\mathcal{T}}{2(m+1)J} \left[m \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{2m-1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 \right] \\ \tau_{xz} &= \frac{\mathcal{T}}{2(m+1)J} \left[m \frac{\partial \psi}{\partial x} - (2m+1)xy \right] \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Da queste espressioni si rileva che le tensioni normali σ_z sulle singole sezioni rette dipendono dal momento flettente \mathcal{M}_z in quel modo istesso e secondo quelle stesse leggi che abbiamo trovate nel caso della flessione semplice.

Le tensioni tangenziali τ_{yz} e τ_{zx} , indipendenti da z epperò egualmente distribuite su tutte le sezioni rette del cilindro, sono invece da ritenersi direttamente derivanti dallo sforzo tangente \mathcal{T} .

Sotto questo punto di vista le tensioni normali e le tensioni tangenziali si presentano come due sistemi indipendenti, semplicemente sovrapposti in causa della coesistenza dei momenti flettenti cogli sforzi taglianti.

La separazione dei due sistemi di tensioni è per verità puramente ideale e non corrisponde affatto ad alcuna possibilità fisica: l'un sistema si presenta sempre in pratica accompagnato dall'altro: quest'ultimo non può restar solo se non in corrispondenza di qualche sezione isolata in cui il primo si annulli, come avviene, nel caso che stiamo studiando, sulla base libera del cilindro.

Ma la distinzione presenta ciò non pertanto un grandissimo vantaggio dal punto di vista analitico.

È anzi del maggiore interesse approfondirla ulteriormente estendendola anche allo studio delle deformazioni.

* * *

Prendiamo per un momento in considerazione il tronco di cilindro che è compreso fra le due sezioni rette di quote z e $z + dz$.

Per dz piccolissimo si può ritenere che il momento flettente \mathcal{M}_z sia su di esso costante. Ad esso si possono allora direttamente applicare le formole (60) che danno le componenti di spostamento nel caso della flessione semplice.

Componendo poi le singole deformazioni di tutti i tronchi, simili a quello testè considerato, di cui si compone il cilindro dato, si è condotti ad attribuire al momento flettente variabile gli spostamenti di componenti:

$$u_f = \frac{\mathcal{T}}{EJ} \frac{xy}{m} (l - z)$$

$$v_f = \frac{\mathcal{T}}{EJ} \left[\frac{z^2}{2} \left(l - \frac{z}{3} \right) - \frac{x^2 - y^2}{2m} (l - z) \right]$$

$$w_f = - \frac{\mathcal{T}}{EJ} yz \left(l - \frac{z}{2} \right)$$

Per differenza, dalle (84), si otterranno così le componenti di spostamento che non possono trovare la loro giustificazione nell'azione del momento flettente variabile, e che perciò vanno attribuite all'azione esclusiva dello sforzo tagliante \mathcal{T} :

$$w_t = 0$$

$$v_t = \frac{\mathcal{T}}{EJ} bz$$

$$w_t = -\frac{\mathcal{T}}{EJ} [yx^2 + by - \psi(x, y)]$$

Si osservi che la componente v_t è indipendente tanto da x come da y : essa rappresenta dunque uno scorrimento che le singole sezioni rette subiscono, senza deformarsi, nel loro stesso piano: questo scorrimento avviene nella direzione dello sforzo tagliante ed è, per ciascuna sezione, di grandezza proporzionale alla sua distanza dalla base incastrata.

In causa di questo scorrimento tutte le rette inizialmente parallele all'asse z si trasformerebbero in altre rette pure fra loro parallele ed aventi sulle prime l'inclinazione $\frac{\mathcal{T}}{EJ} b$.

La componente w_t dipende invece soltanto dalle coordinate x ed y : essa definisce pertanto un ingobbimento di ciascuna sezione retta, indipendente dalla sua posizione nel cilindro, epperò eguale per tutte le sezioni.

La nuova forma che ciascuna sezione viene così ad assumere, come del resto anche l'inclinazione di cui si è parlato poc'anzi, non può precisarsi se non caso per caso, quando cioè è nota la funzione ψ dipendente dalla forma del solido.

Sotto questo punto di vista ci veniamo così a trovare di fronte ad uno stato di cose affatto analogo a quello già riscontrato nel caso della torsione.

Il problema presenta però, questa volta, difficoltà analitiche ben maggiori; perciò noi ci limiteremo ad indicare la soluzione esatta in un solo caso particolare e passeremo poi senz'altro ad esporre una soluzione approssimata la quale, in mancanza di meglio, può rendere nella pratica segnalati servizi.

**

Supponiamo il cilindro circolare di raggio r ; si può allora dimostrare che

$$\psi = \frac{y}{4} \left(\frac{3m+2}{m} r^2 + 3x^2 - y^2 \right) \quad \left. \vphantom{\psi} \right\} \quad (87)$$

e quindi

$$b = \frac{3m+2}{4m} r^2$$

È facile d'altronde constatare che la (80) riesce così identicamente soddisfatta.

Lo stesso può dirsi della (82) ove si ponga, come è naturale pei punti al contorno,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

e

$$\frac{x}{\cos(n, x)} = \frac{y}{\cos(n, y)}$$

Ciò premesso, l'ultima delle (84) dà

$$z' = z - \frac{\mathcal{T}}{EJ} \left[yz \left(l - \frac{z}{2} \right) + \frac{1}{4} (x^2 + y^2) y \right]$$

Per $z=0$ si ha l'equazione

$$z' = - \frac{\mathcal{T}}{4EJ} (x^2 + y^2) y$$

che serve a caratterizzare l'ingobbimento della base incastrata (e quindi anche, per ciò che si è dimostrato nel precedente paragrafo, di una qualunque sezione retta del cilindro).

Le curve di livello della base deformata, rispetto al piano xy a cui la base stessa inizialmente apparteneva, hanno equazioni della forma

$$z' = \text{costante}$$

cioè

$$(x^2 + y^2) y = \text{costante}$$

Una di esse è evidentemente l'asse x : le altre hanno un andamento del tipo di quelle disegnate nella fig. 27 (a destra).

Nella stessa figura (a sinistra) si è anche rappresentata — adottando naturalmente per le z' una scala esagerata — la proiezione della base deformata sul piano di sollecitazione yz .

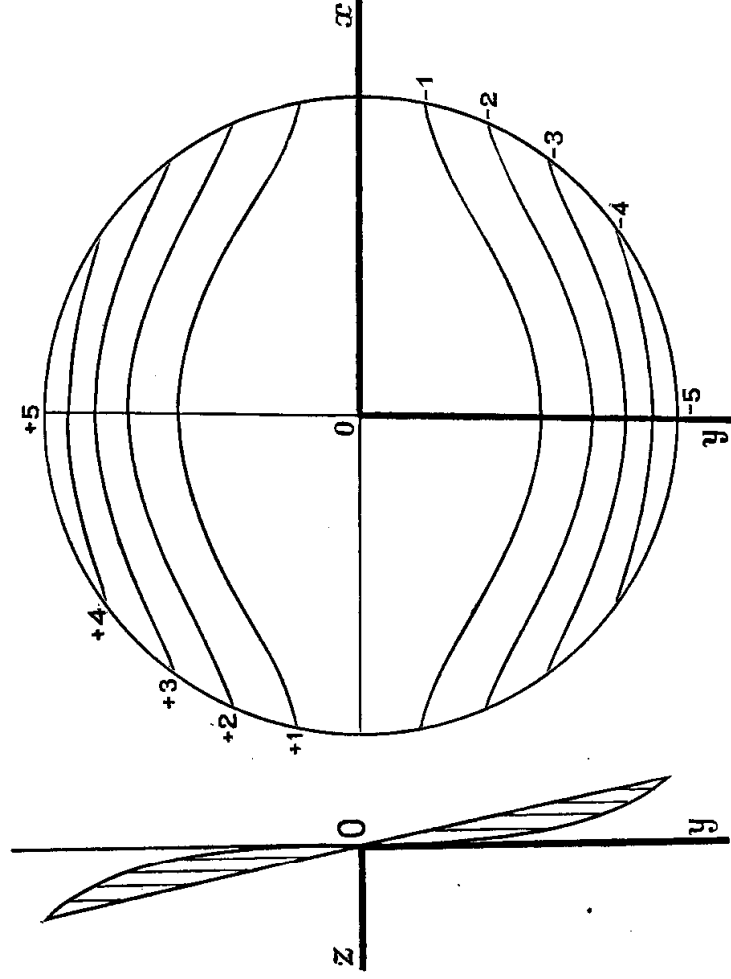


Fig. 27.

L'intersezione di questa superficie col detto piano è la cubica di equazione

$$z' = -\frac{\mathcal{T}y^2}{4EJ}$$

Pei punti del contorno pei quali, come si è già detto,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

si ha

$$z' = -\frac{\mathcal{T}r^2}{4EJ}y$$

Di qui la caratteristica conclusione che mentre la sezione diviene gobba, il suo contorno si conserva piano.

*
**

Volendo farsi un'idea della distribuzione delle tensioni tangenziali nel caso particolare ora studiato, basta riprendere le ultime due delle (86) tenendo presente la prima delle (87).

Si trova così:

$$\tau_{yz} = \frac{\mathcal{T}}{8(m+1)J} \left[(3m+2)(r^2 - y^2) - (m-2)x^2 \right]$$

$$\tau_{zx} = \frac{\mathcal{T}}{2(m+1)J} \left[\frac{m}{2} + 1 \right] xy$$

τ_{zx} è dunque nulla in tutti i punti appartenenti all'asse x od all'asse y ; e su ciascuna corda parallela ad uno di questi assi varia linearmente.

τ_{yz} invece si annulla soltanto in corrispondenza dei due punti estremi del diametro disteso sull'asse y : su ciascuna corda parallela all'uno o all'altro asse varia con legge parabolica, raggiungendo il massimo valore in corrispondenza del punto di mezzo della corda.

Il massimo dei massimi si ha nel centro O e vale

$$\max \tau_{yz} = \frac{3m+2}{8(m+1)} \cdot \frac{\mathcal{T}r^2}{J}$$

Se si pone per J il suo valore $\frac{\pi r^4}{4}$ si ha

$$\max \tau_{yz} = \frac{3m+2}{2(m+1)} \cdot \frac{\mathcal{T}}{\pi r^2}$$

In questa espressione il rapporto $\frac{\mathcal{T}}{\pi r^2}$ misura evidentemente il valor medio della τ_{yz} sulla intera sezione: il valore cioè che essa assumerebbe se lo sforzo \mathcal{T} si distribuisse uniformemente.

Supposto m compreso fra 3 e 4, il massimo dei massimi supera il valor medio del 38 al 40%.

Se in ciascun punto della sezione si compongono insieme la τ_{yz} e la τ_{zx} , e si tracciano poi le *linee di tensione*, cioè le linee che

in ciascun loro punto hanno per tangente la linea d'azione della tensione tangenziale risultante così ottenuta, si trova un fascio di curve del genere di quello rappresentato dalla fig. 28.

Sono curve assai prossime alle ellissi aventi per asse maggiore il diametro del cerchio disteso sull'asse y ; esse coincidono anzi con tali ellissi nel caso (limite) $m = 2$.

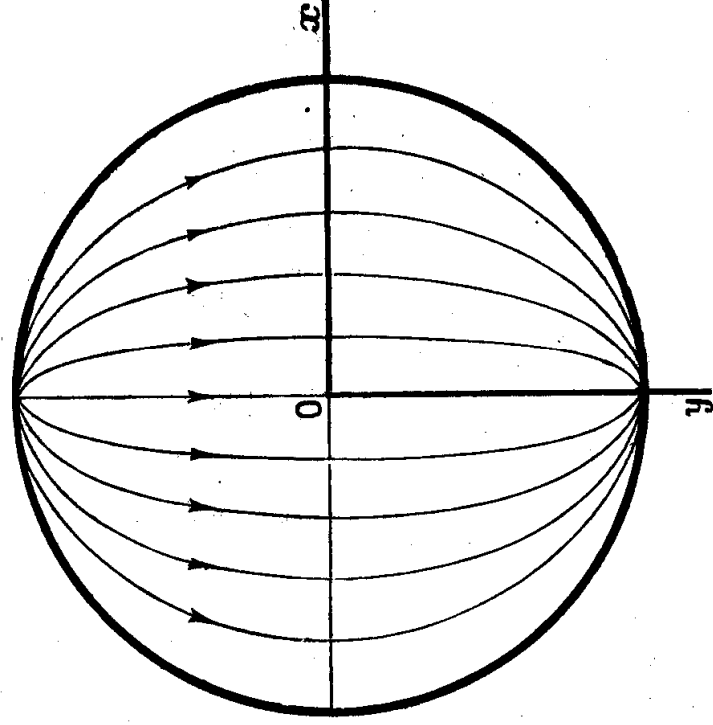


Fig. 28.

Il loro andamento è assai espressivo; ed è soltanto spiacevole che nessuna analogia, del tipo di quelle a cui abbiamo ricorso nel caso della torsione, ci permetta di prevedere o di rilevare tale andamento anche per quelle forme di sezione più complesse per le quali non sappiamo assegnare *a priori* la funzione ψ .

IX.

Trattazione approssimata del problema del taglio.

Consideriamo la porzione di solido isolata fra due sezioni rette

$$z = z_1 \quad \text{e} \quad z = z_2$$

(supporremo per fissar le idee $z_2 < z_1 < l$) ed un piano normale all'asse di sollecitazione, cioè avente un'equazione del tipo

$$y = y_0$$

e scriviamo che deve esser nulla la somma delle proiezioni sull'asse z di tutte le forze che, nello stato di deformazione discusso nel precedente capitolo, agiscono sulle varie sue faccie.

Sulla faccia, che diremo A_1 , appartenente alla sezione retta di quota z_1 , agirà nella direzione dell'asse z , la tensione normale

$$\sigma_z = - \frac{\mathcal{T}(l - z_1)y}{J}$$

Sulla faccia opposta A_2 , appartenente alla sezione di quota z_2 , la quale guarda nel verso delle z negative, dovrà invece intendersi applicata la tensione $-\sigma_z$, se con

$$\sigma_z = - \frac{\mathcal{T}(l - z_2)y}{J}$$

si indica la tensione normale che agisce sulla faccia positiva della stessa sezione.

Similmente sulla faccia che appartiene al piano $y = y_0$, e che indicheremo con A_0 , supponendo che essa sia rivolta (fig. 29) dalla parte delle y negative, agirà, sempre nella stessa direzione, la tensione $-\tau_{yz}$.