VII.

Teoria generale delle coazioni elastiche.

Consideriamo lo stato di equilibrio di un solido elastico nelle condizioni più generali: supponiamo cioè che la deformazione dovuta ad un dato sistema di forze esterne si sia, in esso, sovrapposta ad una coazione determinata precedentemente da un dato sistema di deformazioni impresse.

Il teorema dell'unicità della soluzione del problema dell'equilibrio elastico — che noi teniamo come dimostrato anche in questo caso così generale -- ci conduce al solito a considerare questo stato di equilibrio come l'unico che sia ad un tempo possibile (vale a dire congruente e compatibile coi vincoli) ed equilibrato (vale a dire soddisfacente alle note equazioni indefinite ed ai limiti).

Si potranno pertanto immaginare infiniti altri stati possibil del solido, ma essi non potranno essere equilibrati; come si potranno immaginare infiniti altri stati equilibrati, ma essi non saranno possibili nel senso sopra precisato.

E come si può sempre pensar di passare dall'effettivo stato di equilibrio ad un altro qualsiasi possibile, ma non equilibrato, sovrapponendo idealmente al primo lo stato di tensione e di deformazione dovuto ad un opportuno sistema di forze esterne (senza naturalmente aggiungere queste forze), così si potrà sempre pensar di passare dall'effettivo stato di equilibrio ad un qualsiasi altro stato equilibrato, ma non possibile, sovrapponendo idealmente al primo una opportuna coazione (senza naturalmente introdurre le deformazioni impresse che ad essa danno origine).

Su considerazioni di questo genere, nel primo capitolo di questa Parte Terza del volume, noi abbiamo fondato lo studio delle deformazioni prodotte nel solido elastico da forze esterne date. Qui, supposte nulle le forze esterne, prenderemo invece in considerazione lo stato naturale, e cercheremo di identificarne le caratteristiche.

Come già allora, anche ora, la cosa si può fare per due vie ben distinte.

Si può cioè considerare tale stato come l'unico equilibrato fra gli infiniti possibili: è precisamente quel che abbiamo fatto allorquando dello stato naturale abbiamo parlato nella Parte Prima del volume: siamo stati allora condotti a scrivere quella equazione (18)

$$\int_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right)_0 \delta \varepsilon_x + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y}\right)_0 \delta \varepsilon_y + \ldots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right)_0 \delta \gamma_{xy}\right] d V = 0$$

che abbiamo designata col nome di equazione generale dell'equilibrio spontaneo, ed a riconoscere nel corrispondente valore dell'energia potenziale elastica

$$\Phi_0 = \int_V \varphi_0 \, d V$$

quel minimo a cui abbiam convenuto di dare il nome di energia vincolata.

Che se invece si tenta di caratterizzare lo stato naturale come l'unico possibile fra gli infiniti stati equilibrati (per forze esterne tutte nulle) si giunge facilmente a stabilire un teorema che — nella sua perfetta corrispondenza col teorema di Menabrea — può a buon diritto assumersi come il fondamento di una teoria generale delle coazioni.

* * *

Analogamente a quanto abbiamo fatto a pag. 243 scriviamo infatti l'energia vincolata sotto la forma

$$\Phi_0 = \int_V \varphi\left((\sigma_x)_0,\ (\sigma_y)_0,\ (\sigma_z)_0,\ (\tau_{yz})_0,\ (\tau_{zx})_0,\ (\tau_{xy})_0\right) d V$$

e proponiamoci di determinare quale variazione essa subirebbe qualora si attribuissero idealmente alle

$$(\sigma_x)_0, \quad (\sigma_y)_0, \quad (\sigma_z)_0, \quad (\tau_{yz})_0, \quad (\tau_{zx})_0, \quad (\tau_{xy})_0$$

delle variazioni

$$\delta\sigma_x, \quad \delta\sigma_y, \quad \delta\sigma_z, \quad \delta\tau_{yz}, \quad \delta\tau_{zx}, \quad \delta\tau_{xy}$$

compatibili colle leggi dell'equilibrio; tali cioè che per esse il primitivo stato di tensione, per ipotesi equilibrato, si trasformi in un altro stato, pure equilibrato.

Per il che occorre e basta che si abbia identicamente

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\sigma_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\sigma_z)}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{124}$$

$$\left.\begin{aligned} \delta\sigma_x \cos(n,x) + \delta\tau_{xy}\cos(n,y) + \delta\tau_{zx}\cos(n,z) &= 0 \\ \delta\tau_{xy}\cos(n,x) + \delta\sigma_y \cos(n,y) + \delta\tau_{yz}\cos(n,z) &= 0 \\ \delta\tau_{zx}\cos(n,x) + \delta\tau_{yz}\cos(n,y) + \delta\sigma_z \cos(n,z) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{125}$$

rispettivamente in tutto lo spazio V occupato dal solido e sulla superficie S che lo limita, sulla quale superficie n indica, come d'uso, la normale in un punto generico, rivolta sempre verso l'interno di V.

Poichè φ è una forma quadratica, si ha

$$\delta\Phi_0 = \int_V \varphi\Big((\sigma_x)_0 + \delta\sigma_x,\, (\sigma_y)_0 + \delta\sigma_y, \ldots (\tau_{xy})_0 + \delta\tau_{xy}\Big)\, dV -$$

$$- \int_V \varphi\Big((\sigma_x)_0,\, (\sigma_y)_0, \ldots (\tau_{xy})_0\Big)\, dV =$$

$$= \int_V \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_x}\right)_0 \delta\sigma_x + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_y}\right)_0 \delta\sigma_y + \ldots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_{xy}}\right)_0 \delta\tau_{xy}\right] dV +$$

$$+ \int_V \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma_x^2}\right)_0 \delta\sigma_x^{\,2} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma_x\,\partial\sigma_y}\right)_0 \delta\sigma_x\,\delta\sigma_y + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_{xy}^2}\right)_0 \delta\tau_{xy}^{\,2}\right] dV$$

Prescindendo dal gruppo dei termini del secondo ordine — del quale importa soltanto rilevare che equivale a

$$\int_V \varphi\,(\delta\sigma_x,\ \delta\sigma_y, \ldots\ \delta\tau_{xy})\,dV$$

epperò è essenzialmente positivo — potremo, per quel che si è detto a pag. 323, scrivere la proposta variazione sotto la forma

$$\delta\Phi_0 = \int_V \Big((\varepsilon_x)_0\,\delta\sigma_x + (\varepsilon_y)_0\,\delta\sigma_y + (\varepsilon_z)_0\,\delta\sigma_z + (\gamma_{yz})_0\,\delta\tau_{yz} + (\gamma_{zx})_0\,\delta\tau_{zx} + (\gamma_{xy})_0\,\delta\tau_{xy}\Big)\,dV$$

. Ma per le (121)

$$\int_V (\varepsilon_x)_0\,\delta\sigma_x\,dV = \int_V \frac{\partial u_0}{\partial x}\,\delta\sigma_x\,dV - \int_V e_x\,\delta\sigma_x\,dV =$$

$$= \int_V \frac{\partial}{\partial x}(u_0\cdot\delta\sigma_x)\,dV - \int_V u_0\,\frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x}\,dV - \int_V e_x\,\delta\sigma_x\,dV =$$

$$= -\int_S u_0\cdot\delta\sigma_x\cos(n,x)\,dS - \int_V u_0\,\frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x}\,dV - \int_V e_x\,\delta\sigma_x\,dV$$

Similmente

$$\int_V (\gamma_{yz})_0\,\delta\tau_{yz}\,dV = \int_V \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial z}\right)\delta\tau_{yz}\,dV - \int_V g_{yz}\,\delta\tau_{yz}\,dV =$$

$$= \int_V \left[\frac{\partial}{\partial y}\,(w_0\cdot\delta\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}\,(v_0\cdot\delta\tau_{yz})\right]dV -$$

$$- \int_V \left[w_0\,\frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial y} + v_0\,\frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial z}\right]dV - \int_V g_{yz}\,\delta\tau_{yz}\,dV =$$

$$= -\int_S \left[w_0\cdot\delta\tau_{yz}\cos(n,y) + v_0\cdot\delta\tau_{yz}\cos(n,z)\right]dS -$$

$$- \int_V \left[w_0\,\frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial y} + v_0\,\frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial z}\right]dV - \int_V g_{yz}\,\delta\tau_{yz}\,dV$$

Operando queste sostituzioni e le loro analoghe, ed ordinando, si ottiene facilmente

$$\begin{aligned}\delta\Phi_0 = & -\int_V [e_x\,\delta\sigma_x + e_y\,\delta\sigma_x + e_z\,\delta\sigma_z + g_{yz}\,\delta\tau_{yz} + g_{zx}\,\delta\tau_{zx} + g_{xy}\,\partial\tau_{xy}]\,dV - \\ & -\int_V \Big\{ \left[\frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial z}\right] u_0 + \\ & + \left[\frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\sigma_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial z}\right] v_0 + \\ & + \left[\frac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\sigma_z)}{\partial z}\right] w_0 \Big\}\, dV - \\ & -\int_S \Big\{ [\delta\sigma_x \cos(n,x) + \delta\tau_{xy}\cos(n,y) + \delta\tau_{zx}\cos(n,z)]\, u_0 + \\ & + [\delta\tau_{xy}\cos(n,x) + \delta\sigma_y \cos(n,y) + \delta\tau_{yz}\cos(n,z)]\, v_0 + \\ & + [\delta\tau_{zx}\cos(n,x) + \delta\tau_{yz}\cos(n,y) + \delta\sigma_z \cos(n,z)]\, w_0 \Big\}\, dS\end{aligned}$$

Ma i due ultimi integrali sono identicamente nulli, qualunque siano le u_0, v_0, w_0. poichè, secondo le (124) e (125), sono nulli i rispettivi coefficienti.

Resta soltanto il primo, nel quale è da osservarsi che le

$$e_x, \quad e_y, \quad e_z, \quad g_{yz}, \quad g_{zx}, \quad g_{xy}$$

sono da considerarsi come delle costanti — esse sono infatti, come abbiamo già detto, i dati del nostro problema — sicchè si può scrivere

$$\delta\Phi_0 = -\delta \int_V \Big(e_x(\sigma_x)_0 + e_y(\sigma_y)_0 + e_z(\sigma_z)_0 + g_{yz}(\tau_{yz})_0 + g_{zx}(\tau_{zx})_0 + g_{xy}(\tau_{xy})_0 \Big)\, dV$$

o, ciò che fa lo stesso,

$$\delta\left[\Phi_0 + \int_V \Big(e_x(\sigma_x)_0 + e_y(\sigma_y)_0 + e_z(\sigma_z)_0 + g_{yz}(\tau_{yz})_0 + g_{zx}(\tau_{zx})_0 + g_{xy}(\tau_{xy})_0 \Big)\, dV\right] = 0 \quad (126)$$

Di qui il teorema:

Le tensioni interne che caratterizzano lo stato naturale sono quelle che rendono minima l'espressione

$$\Phi_0 + \int_V \Big(e_x(\sigma_x)_0 + e_y(\sigma_y)_0 + e_z(\sigma_z)_0 + g_{yz}(\tau_{yz})_0 + g_{zx}(\tau_{zx})_0 + g_{xy}(\tau_{xy})_0 \Big)\, dV$$

per rapporto a tutti i valori che l'espressione stessa può assumere compatibilmente colla deformazione impressa e colle leggi dell'equilibrio per forze esterne tutte nulle [1].

***

Dopo quel che si è detto a proposito del teorema di Menabrea, poche parole devon bastare a precisare il significato e la portata del nuovo teorema che, con un procedimento perfettamente analogo, siamo qui pervenuti a dimostrare.

Resta infatti ben inteso che questo teorema, come già quello di Menabrea, non ha nulla in comune coi teoremi di minimo che, nella teoria generale dell'equilibrio, si deducono dal principio dei lavori virtuali, e che, nel caso particolare dello stato naturale, si compendiano nella già ricordata equazione (18).

Là infatti — ci si consenta di ripeterlo ancora una volta — lo stato di equilibrio si caratterizza come il solo che soddisfi alle equazioni della statica, tra tutti gli stati possibili: il valore dell'energia potenziale relativo allo stato di equilibrio viene messo in relazione coi valori che la stessa energia può effettivamente presentare in corrispondenza ad altri stati tutti possibili: i teoremi di minimo a cui si perviene esprimono perciò realmente che v'è una grandezza fisica che diventa minima.

Qui invece — lo abbiamo chiaramente avvertito fin da principio — lo stato di equilibrio si caratterizza come il solo che sia possibile fra gli infiniti che, pur non essendo possibili, soddisfano alle equazioni della statica.

Il che è quanto dire che gli stati di tensione che questo procedimento prende in considerazione sono delle soluzioni puramente ipotetiche del problema dell'equilibrio, ma non sono, nella loro generalità, fisicamente realizzabili, sicchè per essi la funzione di cui si studiano le variazioni non ha fisicamente alcun senso.

---

[1] Questo teorema è stato da me per la prima volta enunciato e dimostrato (in una forma un po' particolare, e non esente da mende) nel 1918; solo tre anni più tardi, e cioè nel 1921, io sono riuscito a dare di esso l'enunciato e la dimostrazione veramente generali che qui ho riportati. Si confrontino in proposito le varie mie Note citate nella prefazione, nonchè la Nota del Prof. Sesini, *Sulle coazioni elastiche* in "Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei", anno LXXIX (1926), pag. 239.

Questa funzione non è in realtà che una pura e semplice funzione analitica la quale acquista un significato fisico solo per quel valore minimo che essa assume in corrispondenza dello stato di tensione reale, e che ci serve ad individuare tale stato in mezzo a tutti gli altri.

***

Questo per ciò che riguarda l'interpretazione dell'enunciato; quanto alla sua applicabilità ai problemi concreti, basterà dimostrare che, anche in questo caso generale: *l'identificazione dello stato di tensione incognito può farsi dipendere dalla risoluzione di un sistema di* r *equazioni lineari fra* r *incognite tutte le volte che si sa in precedenza che esso appartiene ad una classe di stati equilibrati tale che si possano riferire i singoli stati della classe ai singoli sistemi di valori di* r *parametri indipendenti*

$$X_1,\ X_2,\ \dots\ X_r$$

biunivocamente e linearmente, cioè in modo che le componenti speciali di tensione risultino tutte funzioni lineari di quegli r *parametri.*

In queste ipotesi, infatti, la funzione Φ_0, che è notoriamente quadratica nelle $(\sigma_x)_0, (\sigma_y)_0, \dots (\tau_{xy})_0$, risulterà tale anche nelle X_1, $X_2, \dots X_r$, mentre

$$\int_V \Big(e_x(\sigma_x)_0 + e_y(\sigma_y)_0 + e_z(\sigma_z)_0 + g_{yz}(\tau_{yz})_0 + g_{zx}(\tau_{zx})_0 + g_{xy}(\tau_{xy})_0\Big)\,dV$$

che è lineare nelle $(\sigma_x)_0, (\sigma_y)_0, \dots (\tau_{xy})_0$, risulterà necessariamente tale anche nelle nuove variabili.

Le r equazioni in cui si scinde l'imposta condizione di minimo

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial X_1}\left[\Phi_0 + \int_V \Big(e_x(\sigma_x)_0 + e_y(\sigma_y)_0 + \dots\dots + g_{xy}(\tau_{xy})_0\Big)\,dV\right] = 0\\
&\frac{\partial}{\partial X_2}\left[\Phi_0 + \int_V \Big(e_x(\sigma_x)_0 + e_y(\sigma_y)_0 + \dots\dots + g_{xy}(\tau_{xy})_0\Big)\,dV\right] = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial}{\partial X_r}\left[\Phi_0 + \int_V \Big(e_x(\sigma_x)_0 + e_y(\sigma_y)_0 + \dots\dots + g_{xy}(\tau_{xy})_0\Big)\,dV\right] = 0
\end{aligned}\right\}\quad(127)$$

saranno quindi certamente lineari, non omogenee, negli r parametri, i cui valori risulteranno per conseguenza perfettamente determinati.

* * *

Riferiamoci, per fissar le idee, a quello stesso problema concreto a cui ci siamo a suo tempo riferiti per illustrare il teorema di Menabrea.

Riprendiamo cioè in considerazione quel certo tipo di travi ad arco incastrate ad entrambi gli estremi, il cui stato di sollecitazione interna, dovuto ad un qualunque sistema di forze esterne, abbiamo allora riconosciuto riferibile alle caratteristiche del sistema di tensioni che nello stato di equilibrio si trasmettono attraverso il taglio che serve a rendere staticamente determinato il problema.

È ovvio che alle stesse incognite iperstatiche si può sempre riferire lo stato di sollecitazione interna della trave ad arco considerata, anche quando esso, anzichè esser dovuto all'azione di forze esterne date, è determinato da un dato sistema di deformazioni impresse, quali si possono in pratica facilmente produrre mediante opportune variazioni di temperatura.

Poniamo, come già a pag. 324,

$$e_x = e_y = e_z = \alpha \boldsymbol{t}$$

$$g_{yz} = g_{zx} = g_{xy} = 0$$

Esprimiamo l'energia vincolata, come già abbiamo fatto a pag. 252 pel lavoro di deformazione, a mezzo della (99)

$$\Phi_0 = \int_s \frac{\mathcal{N}_s^2\, ds}{2EA} + \int_s \frac{\mathcal{M}_s^2\, ds}{2EJ} + \int_s t\, \frac{\mathcal{T}_s^2\, ds}{2GA}$$

nella quale ad $\mathcal{N}_s$, $\mathcal{M}_s$, $\mathcal{T}_s$ non si è attribuito l'indice *zero*, come a rigore si sarebbe dovuto fare, restando però ben inteso che esse si considerano questa volta funzioni soltanto delle incognite iperstatiche dovute allo stato di coazione considerato.

Quanto all'integrale

$$\int_V \Big(e_x (\sigma_x)_0 + e_y (\sigma_y)_0 + e_z (\sigma_z)_0 + g_{yz} (\tau_{yz})_0 + g_{zx} (\tau_{zx})_0 + g_{xy} (\tau_{xy})_0 \Big) dV =$$

$$= \int_V a \boldsymbol{t} \Big((\sigma_x)_0 + (\sigma_y)_0 + (\sigma_z)_0 \Big) dV$$

si può osservare che, in tutti i corpi isotropi, la somma

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

è in ciascun punto indipendente dalla particolare orientazione degli assi coordinati [pag. 86] e può perciò venir calcolata immaginando tali assi orientati in quel modo che per ciascun punto si reputa più conveniente.

Così stando le cose, basta immaginare che uno degli assi sia diretto secondo la normale alla sezione retta dell'arco che passa pel punto che si considera, e gli altri due assi giacciano quindi nel piano stesso della sezione, per far sì che delle tre tensioni una venga a coincidere colla tensione normale σ_n e le altre due si annullino.

L'integrale dianzi considerato si riduce allora alla forma

$$\int_s \int_A a \boldsymbol{t} \,.\, \sigma_n \,.\, dA \,.\, ds$$

In particolare, se $\boldsymbol{t}$ (e quindi anche $a\boldsymbol{t}$) è costante su ciascuna sezione retta dell'arco, tenuto conto che

$$\int_A \sigma_n \, dA = \mathcal{N}_s$$

quello stesso integrale diviene semplicemente

$$\int_s a \boldsymbol{t} \, \mathcal{N}_s \, ds$$

La funzione da render minima sarà dunque

$$\int_s \frac{\mathcal{N}_s^2 \, ds}{2EA} + \int_s \frac{\mathcal{M}_s^2 \, ds}{2EJ} + \int_s t \frac{\mathcal{T}_s^2 \, ds}{2GA} + \int_s a \boldsymbol{t} \, \mathcal{N}_s \, ds$$

e le equazioni che se ne deducono saranno del tipo

$$\int_s \left(\frac{\mathcal{N}_s}{EA} + \alpha \boldsymbol{t}\right) \frac{\partial \mathcal{N}_s}{\partial X_i} ds + \int_s \frac{\mathcal{M}_s}{EJ} \frac{\partial \mathcal{M}_s}{\partial X_i} ds + \int_s t \frac{\mathcal{T}_s}{GA} \frac{\partial \mathcal{T}_s}{\partial X_i} ds = 0 \quad (128)$$

Al solito esse sono lineari e non omogenee nelle X; son tante quante sono le X stesse; come le loro corrispondenti, ricavate applicando il teorema di Menabrea, servivano a determinare i valori che le incognite iperstatiche assumevano in dipendenza delle forze esterne applicate, così queste serviranno a determinare i valori alle stesse incognite spettanti nello stato di coazione a cui la considerata variazione di temperatura ha dato origine.