VII.

Le tensioni interne e le reazioni di vincolo.

L'analisi da noi iniziata del problema dell'equilibrio elastico si può, in un certo senso, brevemente riassumere dicendo che se un corpo si trova in equilibrio sotto l'azione di un dato sistema di forze F_x, F_y, ..., P_z, debbono esistere certe funzioni delle coordinate

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_z}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{yz}}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{zx}}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{xy}}$$

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x}+\mu\frac{\partial g}{\partial x}+\nu\frac{\partial h}{\partial x}, \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial y}+\mu\frac{\partial g}{\partial y}+\nu\frac{\partial h}{\partial y}, \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial z}+\mu\frac{\partial g}{\partial z}+\nu\frac{\partial h}{\partial z}$$

verificanti, in ogni punto dello spazio V da esso occupato, le equazioni indefinite (24), ed in ogni punto della superficie S che lo limita, le equazioni ai limiti (25).

È facile ed opportuno dare a quelle nove funzioni un significato fisico.

A tal fine incominciamo coll'immaginare il corpo reso libero da tutti i vincoli ad esso imposti: nel fare ciò noi non vogliamo però turbare menomamente il suo stato di equilibrio: per conseguenza intendiamo in primo luogo conservate tutte le forze esterne ad esso inizialmente applicate: in secondo luogo supponiamo di applicare nei punti della superficie S, già soggetti all'azione dei vincoli

$$f(x, y, z) = 0 \qquad g(x, y, z) = 0 \qquad h(x, y, z) = 0$$

certe forze superficiali le cui componenti, riferite al solito alla unità di superficie, siano rispettivamente eguali a

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x} + \nu \frac{\partial h}{\partial x} \\ R_y &= \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \frac{\partial g}{\partial y} + \nu \frac{\partial h}{\partial y} \\ R_z &= \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \mu \frac{\partial g}{\partial z} + \nu \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Per constatare che con ciò l'equilibrio iniziale del sistema non viene per nulla turbato basta osservare che, mentre le primitive equazioni indefinite (24) continuano immutate a sussistere, le nuove equazioni ai limiti

$$P_x + R_x + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} \cos(n, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \cos(n, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}} \cos(n, z) = 0$$

$$P_y + R_y + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \cos(n, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y} \cos(n, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \cos(n, z) = 0$$

$$P_z + R_z + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}} \cos(n, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \cos(n, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_z} \cos(n, z) = 0$$

relative al corpo supposto libero da ogni vincolo, ma sollecitato, oltrechè dalle forze superficiali date, anche da quelle che abbiamo testè immaginato di aggiungere, non differiscono in sostanza dalle (25).

Le forze superficiali (26), le quali agli effetti dell'equilibrio del corpo possono sostituire l'azione dei vincoli, prendono il nome di *reazioni dei vincoli.*

***

Una volta soppressi i vincoli, sostituendo loro le reazioni anzidette, il corpo diviene suscettibile di assumere tutte le deformazioni congruenti, non escluse quelle che abbiamo a suo tempo definite incompatibili, perchè dai vincoli erano ostacolate.

In particolare nulla ci impedisce di imprimergli un moto rigido infinitesimo e del resto affatto qualunque nello spazio, ponendo

$$\begin{aligned} \delta u &= \delta l + \delta q \,.\, z - \delta r \,.\, y \\ \delta v &= \delta m + \delta r \,.\, x - \delta p \,.\, z \\ \delta w &= \delta n + \delta p \,.\, y - \delta q \,.\, x \end{aligned}$$

con δl, δm, δn, δp, δq, δr costanti arbitrarie purchè piccolissime.
Si avrà allora notoriamente

$$\delta\varepsilon_x = \delta\varepsilon_y = \delta\varepsilon_z = \delta\gamma_{yz} = \delta\gamma_{zx} = \delta\gamma_{xy} = 0$$

Perciò si ottiene l'equazione generale dell'equilibrio tra le forze di componenti F_x, F_y, F_z e $P_x + R_x$, $P_y + R_y$, $P_z + R_z$ applicate rispettivamente ai punti di V e di S, sotto la forma

$$\int_V [F_x \delta u + F_y \delta v + F_z \delta w]\, dV + \\ + \int_S [(P_x + R_x)\delta u + (P_y + R_y)\delta v + (P_z + R_z)\delta w]\, dS = 0$$

Sostituendo a δu, δv, δw le loro espressioni in funzione di δl, δm, ..., δr, ed osservando che queste quantità sono affatto arbitrarie, l'equazione scritta si scinde nelle sei seguenti:

$$\left.\begin{aligned} \int_V F_x\, dV + \int_S (P_x + R_x)\, dS &= 0 \\ \int_V F_y\, dV + \int_S (P_y + R_y)\, dS &= 0 \\ \int_V F_z\, dV + \int_S (P_z + R_z)\, dS &= 0 \\ \int_V (F_z y - F_y z)\, dV + \int_S [(P_z + R_z) y - (P_y + R_y) z]\, dS &= 0 \\ \int_V (F_x z - F_z x)\, dV + \int_S [(P_x + R_x) z - (P_z + R_z) x]\, dS &= 0 \\ \int_V (F_y x - F_x y)\, dV + \int_S [(P_y + R_y) x - (P_x + R_x) y]\, dS &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

le quali ci dicono che *per l'equilibrio di un corpo elastico deb-*

bono essere verificate le condizioni che assicurano l'equilibrio dei corpi rigidi [1].

Queste condizioni, necessarie, non sono però, in generale, sufficienti: solo come caso particolare può darsi che esse bastino da sole a determinare i valori delle reazioni dei vincoli in funzione delle forze esterne date. In tal caso si dice che le reazioni sono *staticamente determinate.*

***

Immaginiamo ora tracciata nell'interno del corpo dato una superficie Σ limitante, sia da sola, sia insieme con una parte della superficie S, una porzione V_1 del corpo, e supponiamo di asportare tutta la rimanente parte V_2 del corpo dato; nel far ciò noi intendiamo intanto conservate tutte le forze esterne inizialmente applicate alla porzione V_1; supponiamo inoltre di applicare alla superficie Σ di questa porzione V_1 delle forze superficiali le cui componenti, riferite come sempre all'unità di superficie, siano rispettivamente eguali ad

$$\left.\begin{aligned}
X_n &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x}\cos(n,x) - \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{xy}}\cos(n,y) - \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{zx}}\cos(n,z)\\
Y_n &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{xy}}\cos(n,x) - \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_y}\cos(n,y) - \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{yz}}\cos(n,z)\\
Z_n &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{zx}}\cos(n,x) - \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{yz}}\cos(n,y) - \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_z}\cos(n,z)
\end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

n essendo al solito la normale all'elemento generico di superficie che si considera, rivolta verso l'interno di V_1.

È allora facile constatare che la porzione V_1 del corpo dato sarà ancora in equilibrio, poichè le equazioni ai limiti su Σ

$$\begin{aligned}
X_n + \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x}\cos(n,x) + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{xy}}\cos(n,y) + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{zx}}\cos(n,z) &= 0\\
Y_n + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{xy}}\cos(n,x) + \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_y}\cos(n,y) + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{yz}}\cos(n,z) &= 0\\
Z_n + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{zx}}\cos(n,x) + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{yz}}\cos(n,y) + \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_z}\cos(n,z) &= 0
\end{aligned}$$

[1] Cfr. “ *I fondamenti della Statica* ” pag. 92 e seguenti.

risultano identicamente soddisfatte da qualunque sestupla di funzioni

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_y},\dots,\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{xy}}$$

non esclusa quella che già inizialmente verificava le equazioni indefinite in tutto lo spazio V, e le equazioni ai limiti su S.

La forza ideale, che noi riterremo definita senza ambiguità dalle (28) in ogni punto di V e per qualsiasi orientazione, cioè per qualsiasi elemento superficiale passante per esso, può adunque sostituire l'azione che, attraverso all'elemento stesso, una data parte del corpo esercita sull'altra. Quella forza prende perciò il nome di *tensione interna unitaria* in quel punto e su quell'elemento.

È notevole il fatto che, mentre non si sa assegnare *a priori* la legge di dipendenza della tensione interna dalla posizione dell'elemento, cioè dalle coordinate x, y, z di un suo punto, si può invece assegnare il modo con cui essa dipende dalla orientazione dell'elemento stesso, cioè dai coseni direttori della normale n.

A ciò provvedono infatti alcuni eleganti teoremi che qui ci proponiamo di esporre brevemente.

***

Premettiamo anzitutto che le tensioni interne, da noi definite, soddisfano alla legge dell'azione eguale e contraria alla reazione. In altri termini la forza da applicare ad un qualsiasi elemento $d\Sigma$ di Σ quando si immagina soppressa la parte V_1 del corpo è eguale e contraria a quella che abbiamo immaginato di applicare allo stesso elemento $d\Sigma$ quando avevamo supposto di togliere la rimanente parte del corpo, conservando V_1.

Basta, per constatare ciò, osservare che allo invertirsi dell'orientazione dell'elemento, cioè al mutarsi di n in $-n$ si ha

$$X_{-n} = -X_n \qquad Y_{-n} = -Y_n \qquad Z_{-n} = -Z_n$$

Si può esprimere brevemente questo fatto dicendo che *le tensioni interne relative alle due faccie di un medesimo elemento sono eguali ed opposte.*

Immaginiamo ora di proiettare la tensione interna relativa ad un qualsiasi elemento generico $d\Sigma$ di normale n su di una direzione arbitraria n'.

Se coll'aiuto delle (28) noi calcoliamo l'espressione di questa proiezione

$$X_n \cos(n', x) + Y_n \cos(n', y) + Z_n \cos(n', z)$$

troviamo una forma simmetrica per rapporto alle quantità $\cos(n, x)$ e $\cos(n', x)$, come anche per rapporto alle quantità $\cos(n, y)$ e $\cos(n', y)$, come pure per rapporto alle quantità $\cos(n, z)$ e $\cos(n', z)$.

Si otterrebbe dunque lo stesso risultato se si prendesse in considerazione un elemento $d\Sigma'$ condotto per un punto di $d\Sigma$ e avente per normale n', e se si proiettasse la tensione interna, ad esso relativa, sulla normale n dell'elemento dato $d\Sigma$, cioè se si calcolasse

$$X_{n'} \cos(n, x) + Y_{n'} \cos(n, y) + Z_{n'} \cos(n, z).$$

Ciò può esprimersi dicendo che *se per un punto generico di un corpo elastico si fanno passare due elementi superficiali qualunque $d\Sigma$ e $d\Sigma'$ aventi rispettivamente per normali certe due direzioni n ed n', la componente secondo la direzione n' della tensione interna unitaria relativa all'elemento $d\Sigma$ è eguale alla componente secondo la direzione n della tensione interna unitaria relativa all'elemento $d\Sigma'$.*

* * *

Ed ora possiamo finalmente precisare la annunciata semplicissima interpretazione fisica delle sei derivate parziali prime dell'energia elastica elementare rispetto alle sei componenti di deformazione.

Consideriamo a tal fine un elemento superficiale parallelo al piano coordinato yz, e proponiamoci di determinare le componenti della tensione interna relativa alla faccia di questo elemento che è rivolta dalla parte delle x positive. Potremo evidentemente ottenere ciò ponendo $n = -x$ nelle espressioni generali di quelle componenti.

Si trova così che la tensione interna unitaria cercata ha per componenti secondo i tre assi rispettivamente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}}$$

Similmente ponendo $n = -y$ si trova che la tensione interna unitaria relativa ad un elemento parallelo al piano zx e rivolto dalla parte delle y positive ha per componenti

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}}$$

Ed infine ponendo $n = -z$ si trova che la tensione interna unitaria relativa ad un elemento parallelo al piano xy e rivolto dalla parte delle z positive ha per componenti

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_z}$$

Nel campo delle applicazioni, dove la considerazione di queste tensioni ha assunto un'importanza veramente fondamentale, è invalso l'uso di denotare sempre colla lettera σ la componente della tensione interna unitaria relativa ad un dato elemento, nella direzione della normale all'elemento (*componente normale*), e di considerarla come positiva se si tratta di una tensione propriamente detta, come negativa se si tratta di una pressione.
Si indicano invece colla lettera τ le componenti della medesima tensione secondo direzioni parallele al piano dell'elemento stesso (*componenti tangenziali*).

Uniformandoci fin d'ora a quest'uso, noi porremo

$$\left.\begin{array}{lll} \sigma_x = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} & \sigma_y = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y} & \sigma_z = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_z} \\ \tau_{yz} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} & \tau_{zx} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}} & \tau_{xy} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \end{array}\right\} \quad (29)$$

denotando queste sei funzioni delle coordinate col nome di *componenti speciali di tensione.*

E facile constatare che esse bastano da sole a caratterizzare lo stato di tensione in ciascun punto del corpo.

Le tre componenti secondo i tre assi della tensione relativa ad un elemento superficiale qualunque sono infatti funzioni lineari ed omogenee delle suddette componenti speciali oltrechè dei coseni direttori della normale all'elemento.

Per conseguenza risulterà lineare nelle componenti speciali di tensione anche la componente di quella tensione secondo una direzione qualunque.

Questo vale in particolare per la componente secondo la direzione $-n$

$$-X_n \cos(n, x) - Y_n \cos(n, y) - Z_n \cos(n, z)$$

componente che, in conformità a quanto si è detto poc'anzi, noi denoteremo d'or innanzi in modo generico colla lettera σ chiamandola senz'altro col nome di *tensione normale* relativa all'elemento che si considera.

Date le (28) si ha immediatamente:

$$\left.\begin{aligned} \sigma = \sigma_x \cos^2(n, x) + \sigma_y \cos^2(n, y) + \sigma_z \cos^2(n, z) + \\ + 2\,\tau_{yz} \cos(n, y) \cos(n, z) + 2\,\tau_{zx} \cos(n, z) \cos(n, x) + \\ + 2\,\tau_{xy} \cos(n, x) \cos(n, y) \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

* * *

Proponiamoci ora il problema generale: *come variano la direzione e l'intensità della tensione interna quando l'elemento superficiale che la sopporta ruota attorno ad un punto?*

Vediamo in primo luogo se esistono elementi che subiscono soltanto tensioni tangenziali. Per essi dev'essere $\sigma = 0$. Ora eguagliando a zero il secondo membro della (30) si ottiene l'equazione di un cono quadrico che sarà perciò il luogo delle normali agli elementi cercati.

Assumiamo provvisoriamente per assi coordinati ξ, η, ζ gli assi di questo cono: la sua equazione diviene allora

$$\sigma_\xi \cos^2(n, \xi) + \sigma_\eta \cos^2(n, \eta) + \sigma_\zeta \cos^2(n, \zeta) = 0$$

Inoltre le componenti, secondo questi tre nuovi assi della tensione relativa all'elemento di normale n, vengono ad avere le seguenti semplicissime espressioni

$$\begin{aligned} \Xi_n &= -\sigma_\xi \cos(n, \xi) \\ H_n &= -\sigma_\eta \cos(n, \eta) \\ Z_n &= -\sigma_\zeta \cos(n, \zeta) \end{aligned}$$

a cui si riducono le (28) per

$$\tau_{\eta\zeta} = \tau_{\zeta\xi} = \tau_{\xi\eta} = 0$$

Ne segue che se n appartiene al cono sopra definito si ha anche

$$\frac{\Xi_n^2}{\sigma_\xi} + \frac{H_n^2}{\sigma_\eta} + \frac{Z_n^2}{\sigma_\zeta} = 0 \tag{31}$$

Questa equazione rappresenta un secondo cono quadrico, luogo delle linee d'azione delle tensioni tangenziali di cui sopra si è parlato ed inviluppo dei piani degli elementi che le sopportano, vale a dire dei piani condotti pel vertice del primo cono perpendicolarmente alle sue generatrici.

Questo secondo cono, quando è reale, divide lo spazio angolare, intorno al punto considerato, in due regioni, e mentre gli elementi superficiali immersi in una regione subiscono soltanto tensioni di un segno, gli altri sopportano invece tensioni di segno contrario.

Se il cono in discorso è invece immaginario, ciò vuol dire che gli elementi superficiali che si incrociano nel punto considerato sono tutti soggetti a tensioni o tutti a pressioni.

In questo caso si consideri la superficie che ha per equazione

$$\frac{\Xi_n^2}{\sigma_\xi} + \frac{H_n^2}{\sigma_\eta} + \frac{Z_n^2}{\sigma_\zeta} = \text{costante} \tag{32}$$

scegliendo il segno del secondo membro in modo da ottenere una superficie reale: necessariamente, un ellissoide.

Nel primo caso, invece, si prenda il segno positivo in una regione ed il segno negativo nell'altra, sicchè l'equazione scritta rappresenti una coppia di superfici reali, e precisamente due iperboloidi, uno ad una falda e l'altro a due falde, aventi entrambi il cono (31) per cono assintotico.

In ogni caso la superficie così definita prende il nome di *superficie direttrice* perchè basta la sua conoscenza per determinare la direzione della tensione che agisce sopra un elemento superficiale generico.

Infatti la normale a questa superficie in un punto di coordinate Ξ_n, H_n, Z_n ha i coseni direttori proporzionali a $\frac{\Xi_n}{\sigma_\xi}$, $\frac{H_n}{\sigma_\eta}$, $\frac{Z_n}{\sigma_\zeta}$ ed è quindi parallela alla normale n all'elemento che sopporta la tensione che ha Ξ_n, H_n, Z_n per componenti.

Dunque la direzione di questa tensione è la coniugata rispetto alla quadrica direttrice del piano dell'elemento.

Quanto all'intensità, si ricava immediatamente dalle espressioni sopra scritte delle tre componenti

$$\frac{\Xi_n^2}{\sigma_\xi^2} + \frac{H_n^2}{\sigma_\eta^2} + \frac{Z_n^2}{\sigma_\zeta^2} = 1 \qquad (33)$$

Dunque i valori assoluti delle tensioni intorno ad un punto variano come i diametri di un ellissoide. Questo ellissoide è noto sotto il nome di *ellissoide di Lamé*.

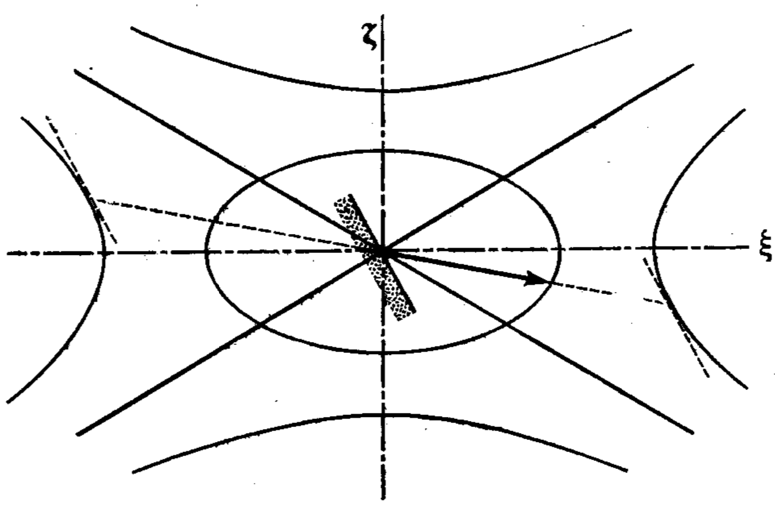


Fig. 2.

Esso ha gli assi coincidenti con quelli della superficie direttrice, cioè cogli assi coordinati.

Le direzioni di questi assi prendono il nome di *direzioni principali*: gli elementi superficiali ad esse perpendicolari sono sollecitati solo normalmente: a questa terna, generalmente unica, appartengono sempre tanto l'elemento che sopporta la massima, quanto quello che sopporta la minima tensione.

Tutti gli altri elementi sono, in generale, sollecitati da tensioni oblique di intensità compresa fra quelle due. Dato il piano di uno qualunque di essi (fig. 2), il diametro ad esso coniugato rispetto alla superficie direttrice definisce la direzione della tensione che su di esso si esercita: il segmento che su questa taglia l'ellissoide di Lamé ne determina la grandezza.

***

Immaginiamo di poter mettere in evidenza in ogni punto del corpo quei certi tre elementi superficiali (tra loro ortogonali) che sono sollecitati solo da sforzi normali.

Per ragione di continuità le tre direzioni principali (normali a tali elementi) inviluppano tre congruenze di linee, mutuamente ortogonali, che prendono il nome di *linee isostatiche*.

Sta il fatto che le singole linee di ciascuna congruenza si potrebbero immaginare isolate le une dalle altre senza che il regime degli sforzi interni ne restasse alterato: il materiale resistente concentrato lungo di esse verrebbe allora a costituire una specie di tessuto alveolare il cui comportamento rispetto alla data sollecitazione non differirebbe affatto da quello proprio del solido dato.

Nè questa è, come potrebbe credersi a prima vista, una concezione puramente astratta, e priva di riscontro nella realtà fisica: essa si trova per contro praticamente realizzata in quei corpi elastici naturali che sono le nostre ossa.

In verità la sostanza ossea è sempre disposta secondo lamine o trabecole più o meno sottili separate da numerosissime cavità: ed era noto da tempo come a questa particolare struttura si dovesse attribuire la grande resistenza agli sforzi esterni che le ossa presentano in relazione coll'esiguo peso di materiale resistente che esse contengono.

In tempi relativamente recenti è stato poi osservato che la disposizione delle trabecole ossee non è affatto casuale, ma in modo ammirevole connessa cogli sforzi a cui esse debbono resistere.

Ciò è confermato non soltanto dal modo con cui tali trabecole si formano e si sviluppano nel bambino, ma sopratutto dal modo con cui, nell'uomo già adulto, esse si modificano spontaneamente in quelle ossa che, per avere per qualsiasi ragione assunte stabilmente posizioni anormali, vengono ad essere abitualmente sollecitate in modo diverso dal solito.

Nei casi in cui la sollecitazione prevalente è più facilmente individuabile si è potuto riconoscere che l'andamento delle trabecole ossee segue sensibilmente quello delle linee isostatiche.

Tra gli esempi più caratteristici si cita quello dell'epifisi superiore del femore.

In questo, come del resto in tutte le ossa lunghe, il tessuto compatto si limita ad una guaina che lo riveste completamente: essa ha il massimo spessore nella parte media, o diafisi, il cui interno è occupato da una vasta cavità, il canale midollare.

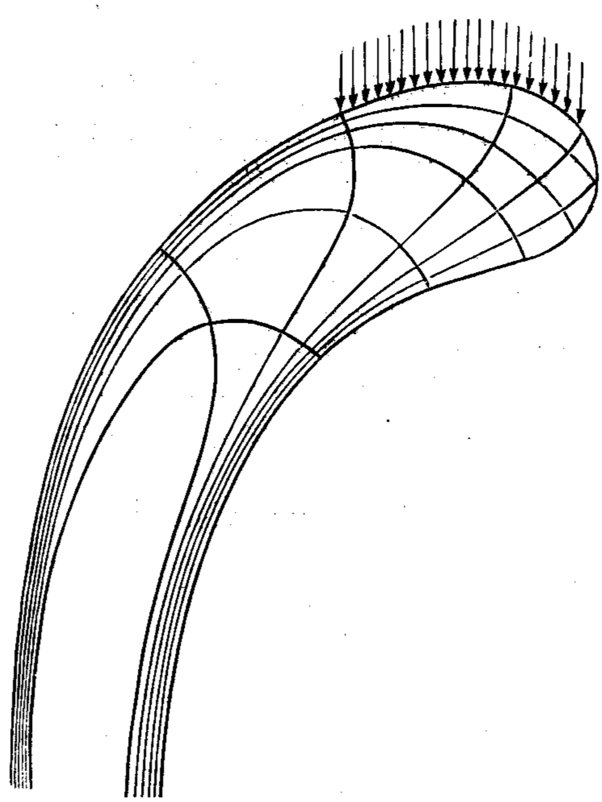


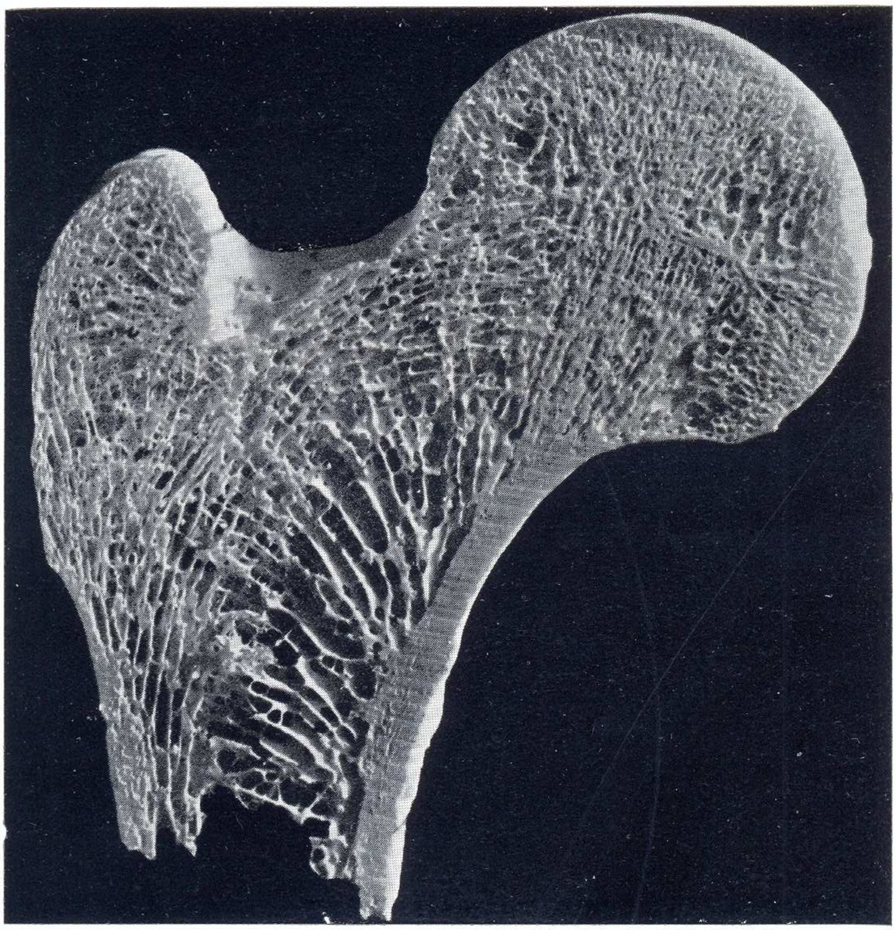
Fig. 3.

Verso la estremità, dalla guaina compatta si dipartono le trabecole, disposte in gettate ad arco, le quali intersecandosi mutuamente fra loro formano il tessuto spugnoso che occupa le epifisi dell'osso, su cui, attraverso le varie articolazioni, si trasmettono le principali forze esterne.

Nel caso che ci occupa la predominante di queste forze è il peso del corpo che, in posizione normale, grava sulla testa del femore.

Per facilitare lo studio teorico della ripartizione delle tensioni interne, il Culmann ha immaginato che l'estremità superiore del femore si potesse, dal punto di vista statico, paragonare ad un solido elastico omogeneo avente il profilo disegnato nella fig. 3.

Ridotta la condizione di carico normale a quella schematica-



mente ivi indicata, egli ha potuto tracciare le linee isostatiche che si vedono riprodotte nella figura, e constatare la notevole affinità tra il loro andamento e quello delle trabecole ossee.

Non occorre dire che il problema reale è incomparabilmente più complesso non solo per la forma irregolare dell'osso, ma per la continua variabilità della legge di ripartizione con cui lo stesso carico si trasmette attraverso l'articolazione coxo-femorale, e sopratutto per l'intervento di altre forze, esse pure variabilissime, come son quelle sviluppate dai varii muscoli, e specialmente dai muscoli rotatori i quali, come è noto, hanno le loro inserzioni in corrispondenza del margine superiore e della faccia interna del grande trocantere.

Malgrado tutto ciò, ripetiamo, l'affinità sopra accennata sussiste evidentissima. E chi osservi con qualche attenzione la sezione di femore fotograficamente riprodotta nella nostra tav. I non potrà che rilevare come in certe regioni, e sopratutto in corrispondenza del collo del femore, l'andamento delle trabecole ossee concordi perfettamente con quello delle linee isostatiche trovate dal Culmann.

***

Riprendiamo ora in considerazione le equazioni (29); èsse possono considerarsi come le espressioni delle componenti speciali di tensione in funzione delle componenti di deformazione.

E, visto che l'energia elastica elementare è una funzione quadratica ed omogenea di queste componenti di deformazione, le componenti speciali di tensione dovranno essere lineari ed omogenee nelle stesse variabili.

Il determinante formato coi coefficienti delle componenti di deformazione in quelle espressioni deve essere diverso da zero, perchè se fosse zero si potrebbe soddisfare al sistema

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x}=0 \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_y}=0 \;\ldots\ldots\; \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{xy}}=0$$

e quindi anche all'equazione

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x}\,\varepsilon_x+\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_y}\,\varepsilon_y+\ldots\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{xy}}\,\gamma_{xy}=0$$

che, pel già ricordato teorema di Eulero sulle funzioni omogenee [pag. 39], esprime l'annullarsi dell'energia elastica elementare, con valori non tutti nulli delle $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots \gamma_{xy}$, ciò che sappiamo essere impossibile.

Si potrà adunque risolvere il sistema delle (29) rispetto alle componenti di deformazione che risulteranno espresse alla loro volta sotto forma di funzioni lineari ed omogenee delle componenti speciali di tensione.

In conseguenza *l'energia elastica elementare può considerarsi anche come una funzione quadratica ed omogenea delle sei componenti speciali di tensione.*

È anzi facile dimostrare che le derivate prime di quest'energia così intesa, rispetto a queste componenti speciali di tensione, sono ordinatamente eguali alle componenti di deformazione.

Si ha infatti, come già testè si è accennato,

$$\begin{aligned} 2\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x}\varepsilon_x + \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_y}\varepsilon_y + \ldots\ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{xy}}\gamma_{xy} = \\ &= \sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \ldots\ldots + \tau_{xy}\gamma_{xy} \end{aligned}$$

quindi

$$2d\varphi = \sigma_x d\varepsilon_x + \varepsilon_x d\sigma_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \varepsilon_y d\sigma_y + \ldots\ldots + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \gamma_{xy} d\tau_{xy}.$$

Ma è ben noto che

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x}d\varepsilon_x + \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_y}d\varepsilon_y + \ldots\ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{xy}}d\gamma_{xy} = \\ &= \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \ldots\ldots + \tau_{xy} d\gamma_{xy} \end{aligned}$$

onde, per differenza, si deve anche avere

$$d\varphi = \varepsilon_x d\sigma_x + \varepsilon_y d\sigma_y + \ldots\ldots + \gamma_{xy} d\tau_{xy}$$

Questa espressione per coincidere colla

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_x}d\sigma_x + \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_y}d\sigma_y + \ldots\ldots + \frac{\partial\varphi'}{\partial\tau_{xy}}d\tau_{xy}$$

richiede che si abbia

$$\left.\begin{matrix} \varepsilon_x = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\sigma_x} & \varepsilon_y = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\sigma_y} & \varepsilon_z = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\sigma_z} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau_{yz}} & \gamma_{zx} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau_{zx}} & \gamma_{xy} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau_{xy}} \end{matrix}\right\} \quad (34)$$

come avevamo annunciato.

***

Coll'introduzione delle reazioni di vincolo e delle componenti speciali di tensione le equazioni indefinite (24) e le equazioni ai limiti (25) divengono rispettivamente

$$\left.\begin{aligned}
F_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\
F_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\
F_z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (35)$$

$$\left.\begin{aligned}
P_x + \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{zx} \cos(n, z) + R_x = 0 \\
P_y + \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{yz} \cos(n, z) + R_y = 0 \\
P_z + \tau_{zx} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z) + R_z = 0
\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

e sotto questa forma sono suscettibili di una interpretazione che per la sua semplicità merita di essere brevemente accennata.

A tal fine immaginiamo lo spazio V scomposto idealmente in elementi parallelipipedi mediante tre sistemi di piani, paralleli ai piani coordinati.

Consideriamo uno di questi parallelipipedi (fig. 4), e cerchiamo la risultante delle tensioni applicate alle varie sue faccie.

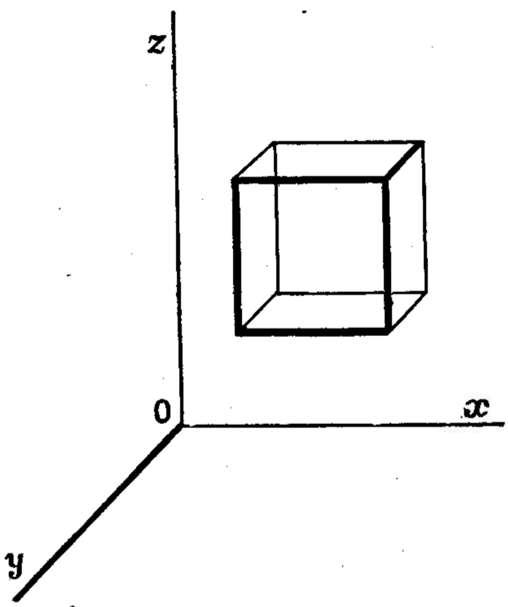


Fig. 4.

Detta $dy\,dz$ l'area di ciascuna delle faccie parallele al piano $y\,z$, la componente secondo x della tensione relativa a quella di esse la cui normale, rivolta al solito verso l'interno del parallelipipedo, è diretta secondo le x crescenti, va espressa con

$$-\sigma_x\, dy\, dz$$

mentre l'analoga componente relativa alla faccia opposta può scriversi sotto la forma

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz$$

Ne segue che la proiezione sull'asse x della risultante delle tensioni relative alle due faccie parallele al piano coordinato yz sarà misurata da

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\,dV$$

In modo analogo si troverebbe che

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\,dV \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\,dV$$

non son altro che le proiezioni sullo stesso asse delle risultanti delle tensioni relative alle due faccie parallele al piano zx e a quelle parallele al piano xy rispettivamente.

Se si tiene presente che

$$F_x\,dV$$

è per ipotesi la proiezione, sullo stesso asse delle x, della forza esterna applicata all'elemento di volume considerato, si può concludere che la prima delle equazioni indefinite esprime l'equilibrio di questo elemento alla traslazione nella direzione dell'asse x. Le altre due hanno significati analoghi rispetto ad y e rispetto a z.

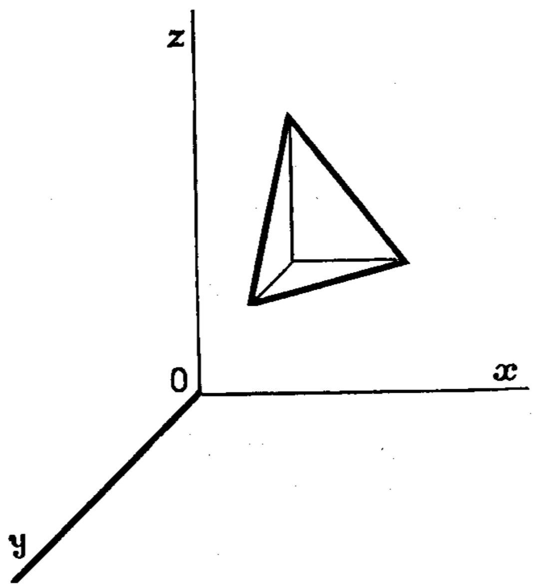


Fig. 5.

Per giungere ad un'interpretazione corrispondente delle tre equazioni ai limiti si osservi che in superficie la triplice famiglia di piani da noi considerata determina degli elementi tetraedrici (fig. 5), i quali sono soggetti, sopra una delle lor faccie, alla pressione esterna ed alle eventuali reazioni di vincolo. A fronte di queste forze superficiali, infinitesime del secondo ordine, riescono trascurabili le forze di massa che sono infinitesime del terzo ordine. Ciò premesso è facile constatare che le equazioni ai limiti esprimono l'equilibrio alla traslazione degli elementi superficiali imponendo che si annullino le somme delle componenti secondo i tre assi delle forze agenti sulle varie loro faccie.

Ed invero detta dS l'area della faccia che appartiene alla superficie S, le aree delle altre tre faccie si possono ottenere proiettando la prima sui tre piani coordinati. Le componenti secondo uno degli assi, per es. secondo l'asse x, delle tensioni interne relative a queste tre faccie riescono pertanto espresse, in grandezza ed in segno, da

$$\sigma_x dS \cos(n, x) \qquad \tau_{xy} dS \cos(n, y) \qquad \tau_{zx} dS \cos(n, z)$$

rispettivamente.

E la loro somma colla analoga componente delle forze applicate alla faccia esterna

$$P_x dS + R_x dS$$

si annulla, come si è detto, quando è soddisfatta la corrispondente equazione ai limiti.

La semplicità grande ed il carattere intuitivo di questo modo di stabilire le equazioni dell'equilibrio elastico ha fatto sì che molti autori lo preferissero ad ogni altro assumendolo come punto di partenza di tutta la teoria.

In tal caso, in mancanza del teorema da noi dimostrato a pag. 66, occorre naturalmente introdurre non sei ma nove componenti di tensione. Però esse si riducono immediatamente alle sole sei da noi considerate, in virtù delle tre equazioni dei momenti che debbono imporsi perchè oltre all'equilibrio alla traslazione sia assicurato, per ciascun elemento di volume, anche l'equilibrio alla rotazione.