

## Il tracciamento delle linee d'influenza per mezzo di modelli e di apparecchi meccanici.

Nel corso della nostra esposizione abbiamo avuto più di una occasione di accennare ai modi con cui potrebbero effettivamente determinarsi quelle distorsioni dei sistemi elastici che, in virtù del secondo principio di reciprocità, servono al calcolo delle reazioni dei vincoli.

Non è quindi fuor di luogo chiedersi se non si possono evitare le difficoltà di calcoli lunghi e laboriosi — come son quelli che bisogna affrontare quando si ha da fare con più di tre incognite iperstatiche, la cui determinazione dipende necessariamente da un sistema di altrettante equazioni — costruendo un modello in scala del sistema elastico che si vuol studiare, determinando in esso le volute distorsioni, e rilevando direttamente su di esso gli spostamenti dei diversi suoi punti.

In realtà un simile procedimento è stato in questi ultimi tempi tentato ed applicato con risultati così soddisfacenti da meritare che qui se ne faccia, prima di terminar l'argomento, un brevissimo cenno.

Secondo il Prof. Beggs, dell'Università di Princeton N. J. (U. S. A.), che ha presentato una interessante relazione su questo tema al recente II Congresso Internazionale di Meccanica Applicata, tenutosi in Zurigo nel settembre del 1926, si possono ottenere eccellenti risultati operando su modelli in cellululoide, la cui costruzione sarebbe singolarmente facilitata dal fatto che non occorre neppure che il modello riproduca in iscala la struttura in esame, bastando, secondo il relatore, che le varie sezioni del modello abbiano momenti d'inerzia (per rapporto ai loro assi neutri) proporzionali ai momenti d'inerzia delle corri-

spondenti sezioni della struttura data; sicchè il modello si può in ogni caso ricavare da una semplice e comune lastra di spessore costante.

Ciò premesso, si supponga di voler studiare un sistema elastico a più incastri: per esempio quello rappresentato nella nostra figura 161, e che comporta nientemeno che nove incognite iperstatiche.

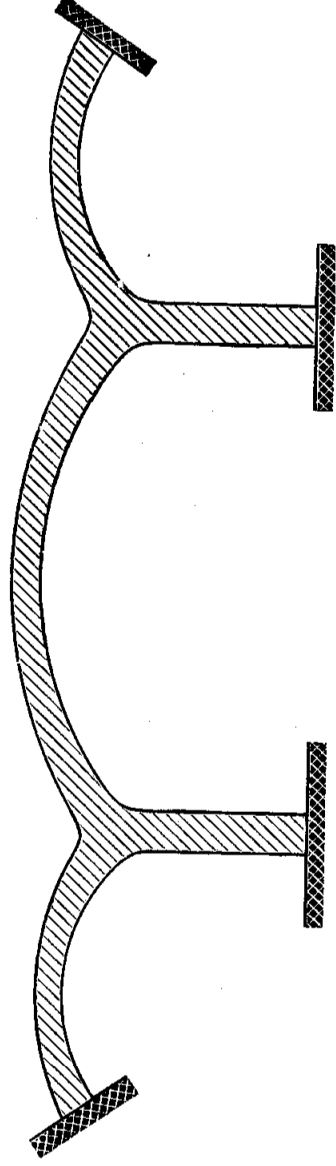


Fig. 161.

Il primo problema da risolvere è quello di munire uno degli incastri di un dispositivo il quale consenta, in modo semplice e sicuro, la realizzazione delle distorsioni che ci interessano: il quale consenta cioè di svincolare a volontà l'estremità incastrata e di farle subire il solito spostamento relativo, o la solita rotazione relativa, rispetto al sistema fisso di riferimento, al quale restano rigidamente connessi, nel frattempo, tutti gli incastri rimanenti.

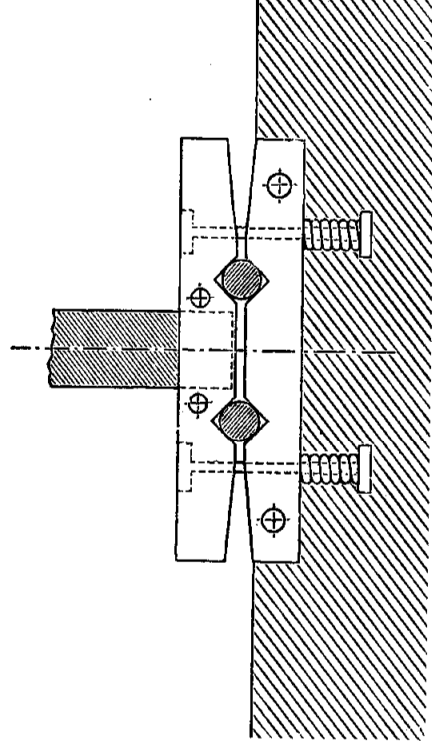


Fig. 162.

Serve bene a questo scopo il dispositivo rappresentato nella fig. 162; esso consta essenzialmente di due robuste traverse di

acciaio, una delle quali, la inferiore, è fissa, mentre l'altra, rigidamente collegata colla estremità del modello su cui si vuole

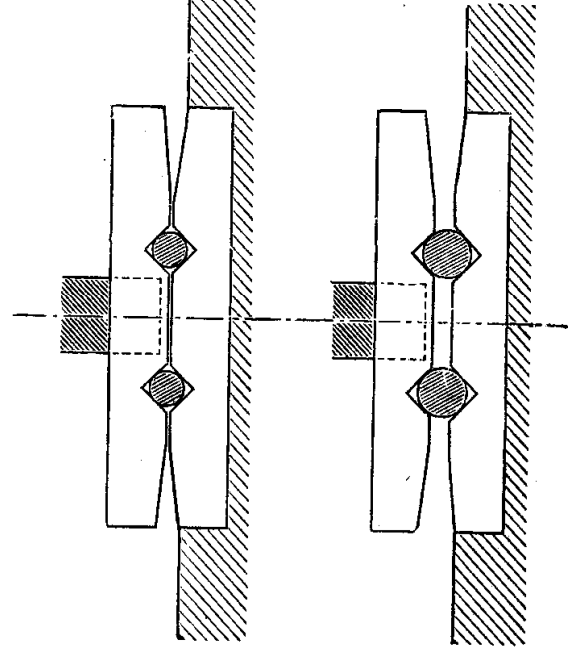


Fig. 163.

operare, è energicamente attratta verso la prima da un adatto sistema di molle tenditrici.

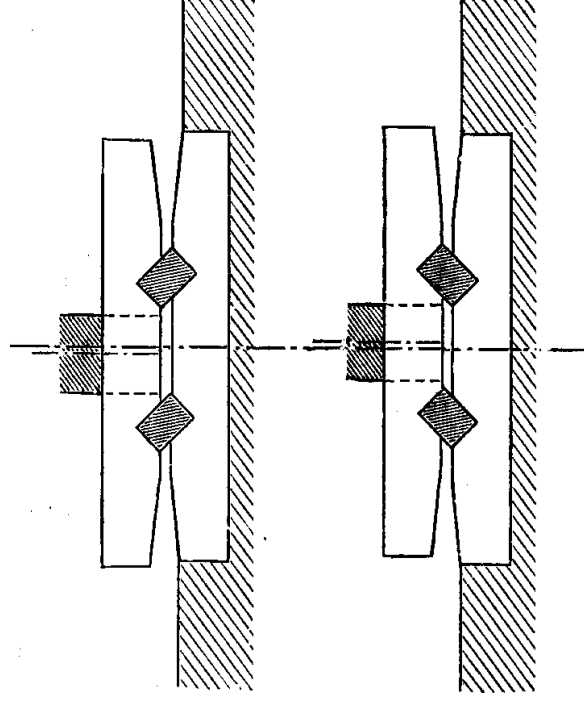


Fig. 164.

Le due traverse presentano due coppie di tacche a V affacciate, tra le quali si possono introdurre a volontà spine di forme

e dimensioni differenti, atte a determinare differenti posizioni della traversa mobile per rapporto a quella fissa.

Se le faccie delle tacche a  $V$  sono lavorate a regola d'arte, e se le spine sono rigorosamente calibrate, si possono così determinare traslazioni in una o in un'altra direzione (figg. 163 e 164) ovvero rotazioni (fig. 165) dell'estremità del modello di grandezza piccola quanto si vuole e tuttavia perfettamente nota.

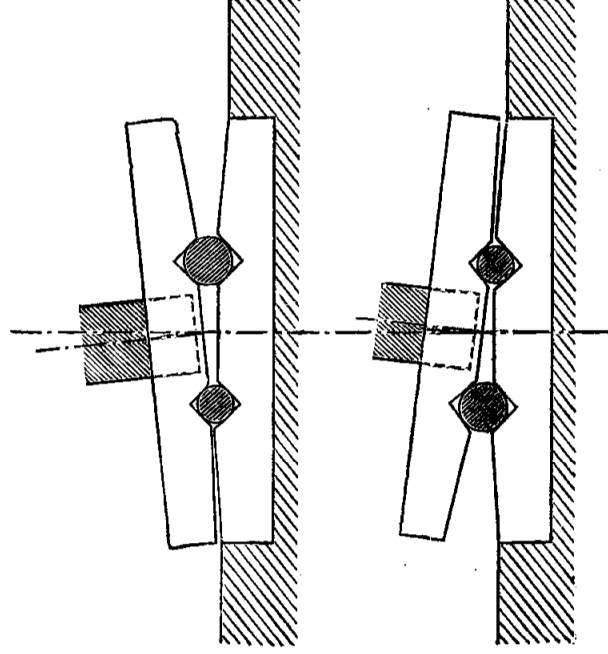


Fig. 165.

È infatti essenziale, per l'attendibilità dei risultati, che le deformazioni del modello siano contenute in limiti il più possibile piccoli, sì da scostarsi il meno possibile dalle ipotesi fondamentali che noi abbiamo a suo tempo assunte a base di tutta quanta la teoria dell'elasticità.

Di qui la necessità di risolvere non meno bene anche il secondo problema: quello della misura degli spostamenti.

Il Beggs si è servito a questo fine di microscopii micrometrici, disposti in corrispondenza dei vari punti  $M$  dell'asse geometrico del modello (fig. 166). Uno dei fili del reticolo, e precisamente quello coincidente coll'asse del micrometro, veniva in ciascuno strumento orientato in modo da coincidere coll'immagine della linea d'azione della forza  $P$  che sul punto osservato poteva venir applicata. L'altro filo veniva poi condotto in corrispondenza dell'immagine del punto nelle sue posizioni suc-

cessive  $M$ ,  $M'$ . Per differenza si leggeva sul micrometro la misura dello spostamento prodotto da ciascuna distorsione, già

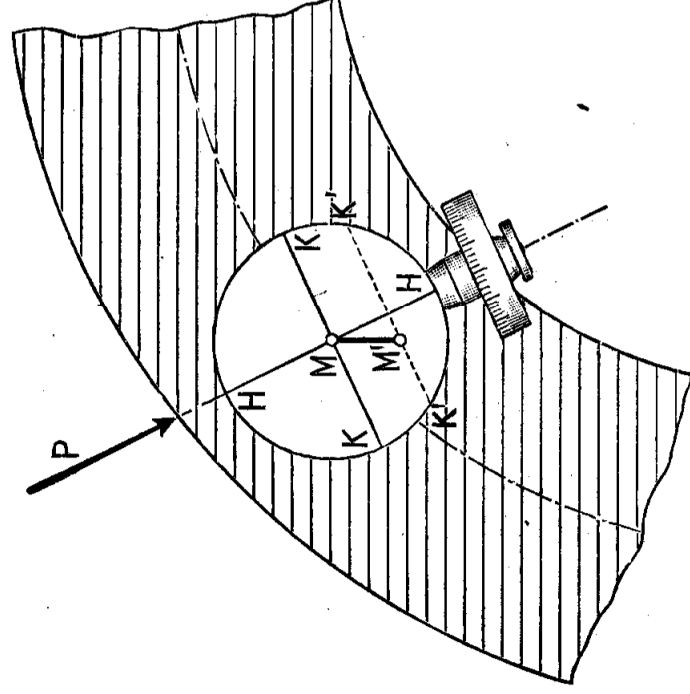


Fig. 166.

proiettato sulla direzione della forza, in condizioni quindi di immediata utilizzabilità ai fini e nei modi voluti dal secondo principio di reciprocità.

\* \* \*

Abbiamo detto che è essenziale, per l'attendibilità dei risultati, che le deformazioni del modello siano molto piccole. Non v'è dubbio infatti che, quando le deformazioni superano un certo limite, anche se per la particolare natura del materiale con cui è stato costruito il modello le proprietà elastiche di questo non fossero in nulla alterate, sarebbero certamente alterati quei rapporti di similitudine tra il modello e la struttura in esame che il procedimento necessariamente presuppone: teoria ed esperienza sono d'altronde d'accordo nell'affermare che, in simili casi, i risultati sono affetti da errori che possono anche essere molto grandi, ed il cui ordine di grandezza è in ogni caso ben difficile a prevedersi.

V'è soltanto un caso in cui sembra possibile trarre dei risultati attendibili da misure eseguite su deformazioni abbastanza grandi da poter essere osservate e rilevate direttamente, cioè senza l'aiuto di microscopii: ed è quello della trave continua a sezione costante.

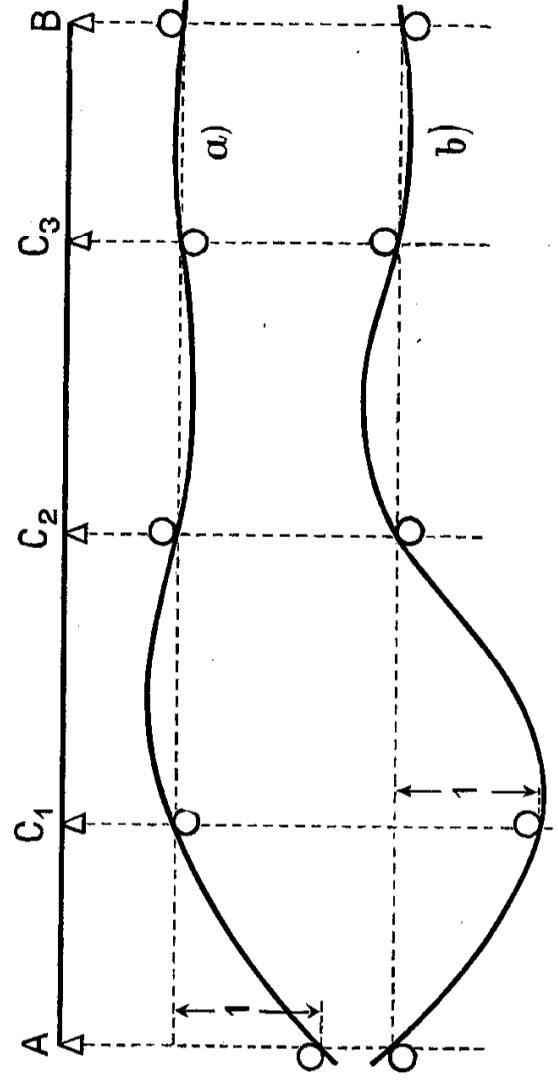


Fig. 167.

In questo caso, infatti, un qualsiasi nastro di acciaio od una qualsiasi listerella flessibile di legno può venire adottata come modello della trave; e le varie linee d'influenza delle reazioni degli appoggi si debbono poter ottenere costringendo il nastro o la listerella a passare per un certo numero di punti ottenuti riproducendo in piccola scala la disposizione degli appoggi, e disponendo uno di questi spostato per rapporto all'allineamento degli altri di quel tanto che si reputa opportuno adottare come unità di lunghezza.

Così, per esempio, nel caso della trave a cinque appoggi rappresentata nella figura 167, si disporrà il nastro come in *a*) se si vuole tracciare la linea di influenza della reazione dell'appoggio estremo di sinistra, come in *b*) se si ha per iscopo di costruire la linea di influenza della reazione del primo appoggio intermedio; gli altri casi si deducono da questi in modo ovvio.

Questa volta teoria ed esperienza sono d'accordo nel dimostrare che, se la scelta della scala di rappresentazione della trave e quella dell'unità di misura sono state fatte in modo da non

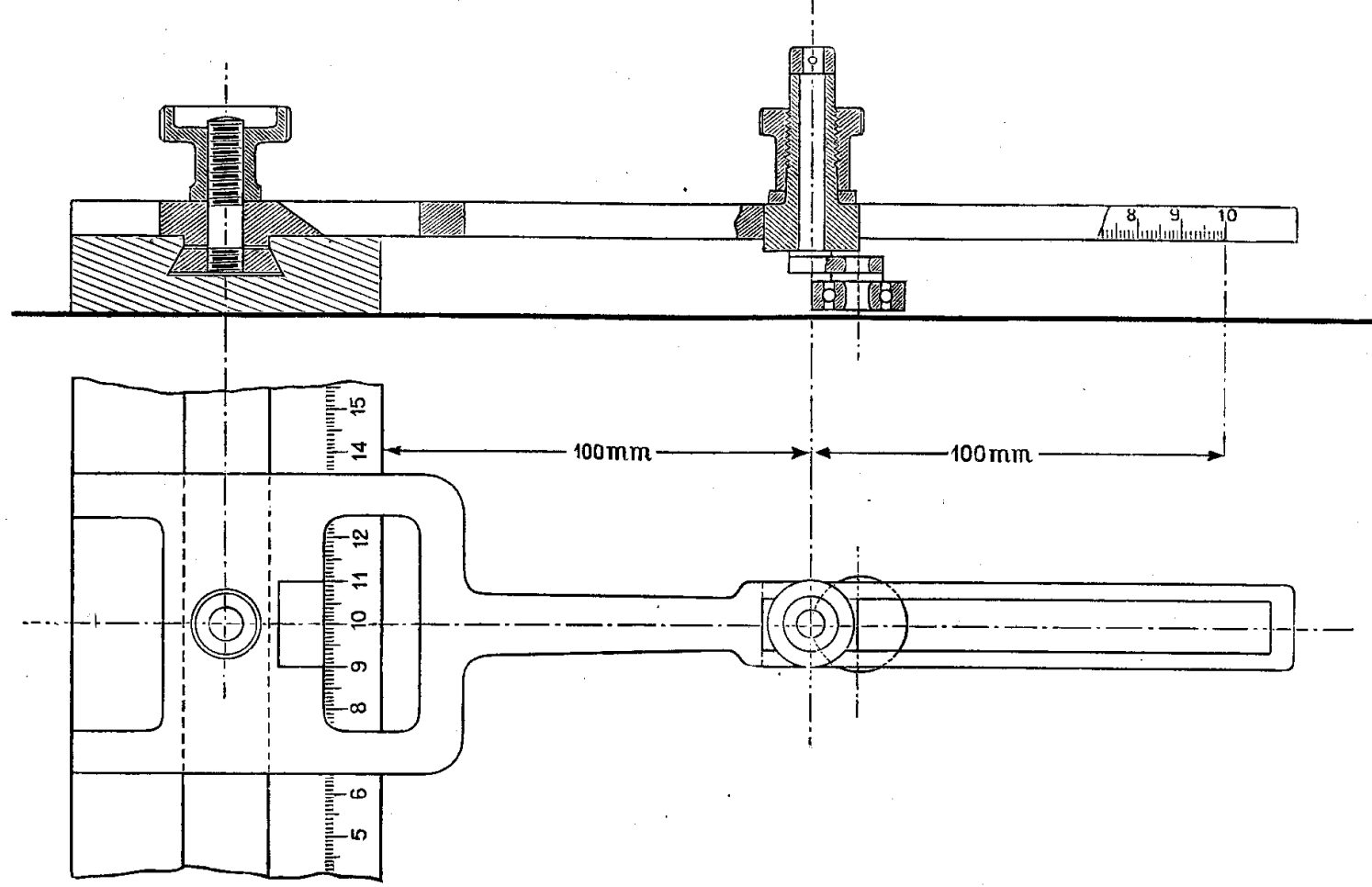


Fig. 168.

dar luogo ad inclinazioni eccessive del nastro in corrispondenza dei vari suoi appoggi — e se tra il nastro ed i corpi che gli servono da appoggi non si sviluppano sensibili resistenze di

attrito, sicchè il nastro stesso possa liberamente scorrere quanto è richiesto dalla maggior lunghezza della deformata per rapporto alla lunghezza rettilinea primitiva — i risultati che si ottengono sono ampiamente contenuti in quell'ordine di approssimazione del quale per tante ragioni la pratica tecnica è costretta ad accontentarsi.

Per soddisfare alla seconda condizione, per ridurre cioè al minimo l'attrito fra il nastro ed i suoi vari appoggi, è utile servirsi di piccoli rulli montati su sfere: per evitare poi che nell'inflessione del nastro i punti in cui esso tocca i vari rulli vengano a spostarsi lateralmente, e si alterino così più o meno sensibilmente i rapporti tra le varie luci, basta montare i rulli eccentricamente, con una eccentricità pari al loro raggio.

Nella Tavola XXXIII si vede, fotograficamente riprodotto in condizioni di funzionamento, un apparecchio ideato a questo scopo <sup>(1)</sup> che la ditta Amsler di Sciaffusa (Svizzera) costruisce sotto il nome di "Influenzografo Colonnetti".

La figura 168 mostra chiaramente come esso è costruito.

Su di un lungo regolo di acciaio, munito di scanalatura a coda di rondine, possono muoversi liberamente alcuni corsoi, i quali portano, scorrevoli in appositi glifi, gli organi di appoggio del nastro.

Ciascuno di questi organi di appoggio consta di un alberetto verticale liberamente girevole nel suo supporto e portante all'estremità inferiore un rullo, calettato, su sfere, in posizione eccentrica come sopra si è detto.

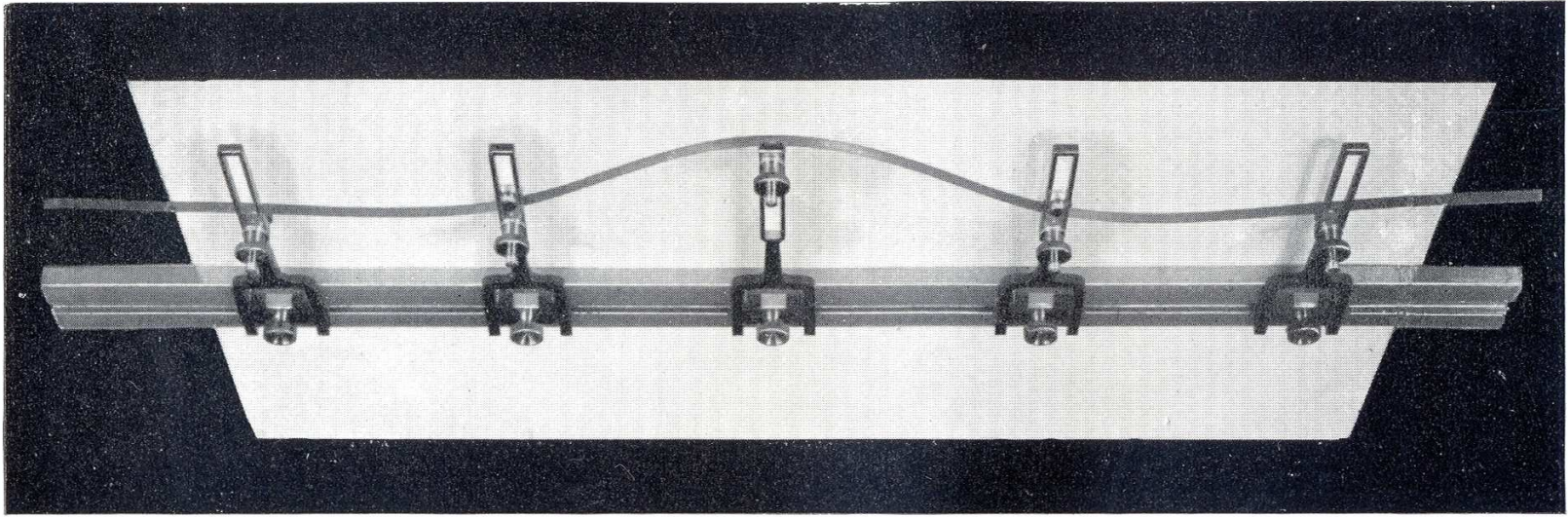
Contro questo rullo il nastro che si deforma viene a poggiare, costringendo colla sua pressione il sistema girevole ad orientarsi per modo che la generatrice di contatto venga a coincidere coll'asse dell'alberetto.

La posizione di quella generatrice di contatto riesce così assolutamente indipendente dall'andamento che potrà assumere il nastro inflettendosi: essa dipende soltanto dalla posizione del supporto dell'alberetto, posizione che nello strumento è completamente caratterizzata a mezzo di scale millimetriche incise sulla faccia superiore del regolo e sul fianco di ciascun glifo.

---

<sup>(1)</sup> Cfr. G. COLONNETTI, *Apparecchio per il tracciamento delle linee d'influenza della trave continua* ["Giornale del Genio Civile", 1914; "Bulletin Technique de la Suisse Romande", 1926].





COLONNETTI, I.

Tav. XXXIII (pag. 490).

Basta dunque disporre convenientemente, a seconda della linea di influenza che si cerca, i vari organi di appoggio; poi inflare fra i rulli il nastro flessibile in modo che esso venga effettivamente a contatto con ciascuno di essi <sup>(1)</sup>; la deformata secondo cui si atteggia il nastro flessibile si può direttamente riportare sul disegno — su cui l'apparecchio sarà stato collocato in posizione opportuna — facendo scorrere lungo di esso nastro una matita con mano molto leggera.

\* \* \*

È interessante rilevare come con questo apparecchio si possono costruire non soltanto le linee d'influenza delle reazioni d'appoggio, ma anche quelle dei momenti flettenti e degli sforzi taglianti in una qualsiasi sezione della trave.

Per ottenere queste ultime linee bisognerebbe infatti tagliare il nastro in corrispondenza della sezione che si considera. Però lo stato di deformazione di ciascuna delle due parti in cui il nastro verrebbe così a restar diviso, non si altera per spostamenti rigidi i quali si estendono anche ai relativi vincoli. Nulla ci vieta pertanto di immaginare — a distorsione avvenuta — impresso ad una delle due parti, ed ai vincoli ad essa relativi, uno spostamento rigido eguale e contrario a quello che ha generata la distorsione, sicchè le due faccie del taglio ritornino di bel nuovo fra loro coincidenti, ed il sistema riprenda la sua primitiva connessione.

Ciò si può esprimere dicendo che le linee d'influenza della componente secondo una data direzione (ovvero nel momento rispetto ad un dato asse) del sistema delle tensioni interne che si sviluppano in una data sezione della trave, si possono ottenere imprimendo ai due gruppi di appoggi che la data sezione separa, una traslazione relativa unitaria nella direzione prescelta (ovvero una rotazione relativa, pure unitaria, attorno all'asse prescelto) e riferendo poi la deformata del nastro, nelle nuove sue condizioni di vincolo, a quella che queste stesse condizioni di

---

<sup>(1)</sup> Nel caso di cui stiamo parlando il nastro va inflato fra i rulli in modo che questi vengano a trovarsi alternativamente da una parte e dall'altra di esso; in una posizione esso serve per tutte le linee relative ad appoggi di posto dispari (fig. 167 *a*), nell'altra per tutte quelle relative ad appoggi di posto pari (fig. 167 *b*).

vincolo determinerebbero se la trave fosse stata effettivamente tagliata in due parti in corrispondenza della sezione considerata.

In applicazione di questa regola la linea di influenza dello sforzo di taglio in una sezione generica  $S$  di trave continua (fig. 169) si otterrà immaginando i due gruppi di appoggi, rispettivamente a sinistra ed a destra della sezione, disposti su due allineamenti paralleli distanti fra loro dell'unità di lunghezza, e leggendo a partire dal primo allineamento tutte le ordinate della deformata situate a sinistra, a partire dal secondo tutte le ordinate situate a destra della sezione.

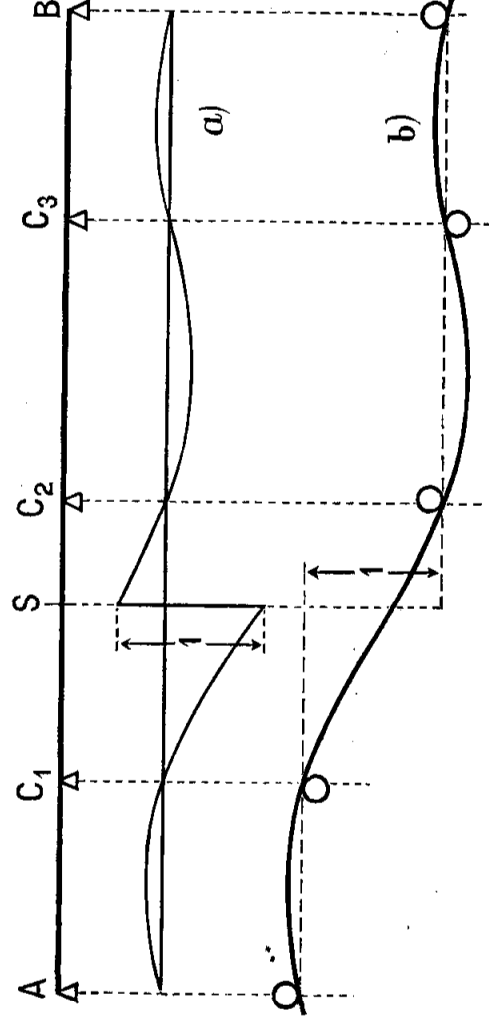


Fig. 169.

Il lettore non mancherà di rilevare che una medesima deformata serve per tutte le sezioni di una medesima luce.

Per costruire poi la linea d'influenza del momento flettente, si dovrebbero invece immaginare i due gruppi di appoggi, rispettivamente a sinistra ed a destra della sezione, disposti su due allineamenti i quali si incontrino sulla verticale della sezione sotto un angolo tale che il segmento che essi allineamenti intercettano su di una verticale distante dalla precedente dell'unità di lunghezza sia alla sua volta eguale all'unità di lunghezza.

Ciò non presenta difficoltà alcuna, specie se si ammette che possano essere diverse le scale delle lunghezze orizzontali e verticali.

In pratica si possono scegliere i due allineamenti senza

preoccuparsi della loro-reciproca inclinazione, salvo a valutare poi tale inclinazione mediante l'espressione

$$\frac{h_s}{l_s} + \frac{h_d}{l_d}$$

nella quale  $h_s$  ed  $h_d$  rappresentano rispettivamente i dislivelli di due coppie di appoggi consecutivi, l'una a sinistra l'altra a destra della sezione, mentre  $l_s$  ed  $l_d$  misurano nella stessa scala le ampiezze delle due luci che quelle coppie di appoggi limitano (fig. 170).

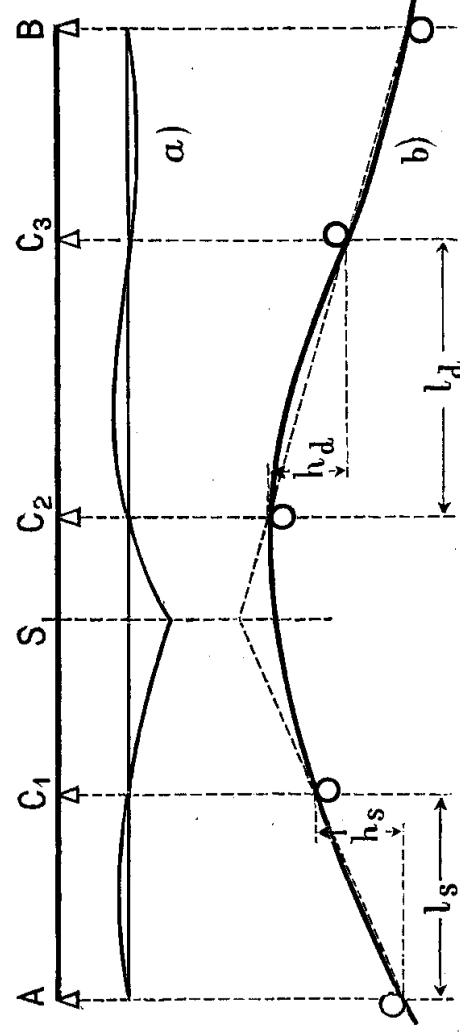


Fig. 170.

Il momento flettente prodotto nella sezione dal solito carico generico  $P$  si calcolerà quindi servendosi dell'espressione

$$P \cdot \eta \frac{h_d}{l_s} + \frac{h_d}{l_d}$$

nella quale l'ordinata generica  $\eta$  della linea d'influenza va valutata nella scala delle lunghezze adottata per la rappresentazione della travata.

Ciò che si è detto del momento in una sezione generica vale in particolare per i momenti sugli appoggi, le cui linee di influenza si costruiranno quindi procedendo nel modo indicato nella fig. 171.

\* \* \*

E veniamo, per terminare, al caso della linea d'influenza dell'abbassamento di una sezione.

In virtù del teorema di Betti una tal linea d'influenza coincide colla linea elastica della trave, supposta cimentata da un carico di intensità unitaria, applicato in corrispondenza della sezione di cui si vogliono gli abbassamenti.

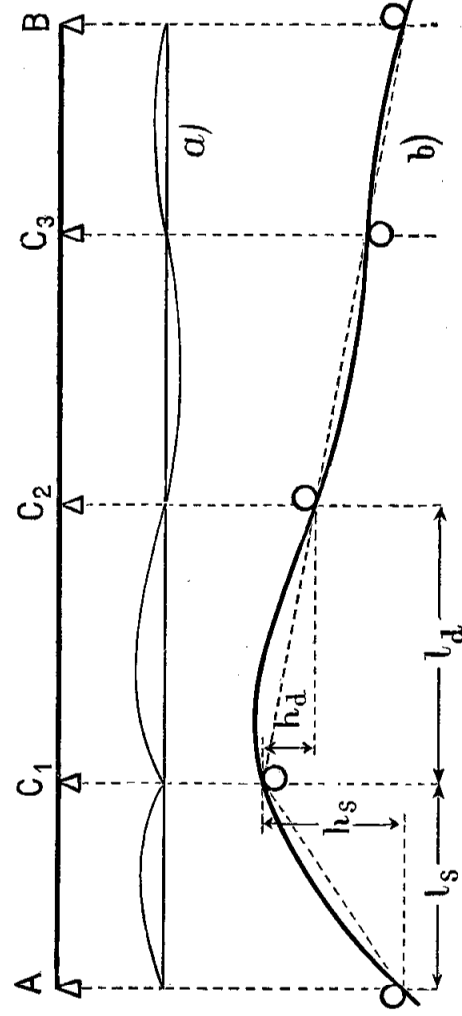


Fig. 171.

L'influenzografo può venire utilizzato se si conosce lo spostamento che, sotto l'azione di quel carico, deve subire il suo punto di applicazione.

Ora, indicati al solito con  $E$  e con  $J$  rispettivamente il modulo di elasticità normale del materiale, ed il momento di inerzia (rispetto all'asse neutro) della sezione della trave, e detto  $\mathcal{M}_z$  il momento flettente prodotto da quel carico unitario nella sezione generica di ascissa  $z$ , momento la cui legge di variazione può facilmente rappresentarsi in disegno (fig. 172a) una volta determinate nei modi sopra indicati le reazioni iperstatiche, quell'abbassamento si può in pratica calcolare mediante la formola approssimata

$$\delta = \frac{1}{EJ} \int \mathcal{M}_z^2 dz$$

nella quale l'integrale va esteso a tutta la lunghezza della trave.

Disposti pertanto i vari corsoi nel modo solito a rappresentare i singoli appoggi, riservandone però uno per la sezione in esame, si fisserà l'alberetto portante il rullo d'appoggio del nastro, che a detta sezione corrisponde, ad una distanza rappresentante in una conveniente scala lo spostamento  $\delta$ , dall'asse in corrispondenza del quale stanno allineati gli appoggi propriamente detti.

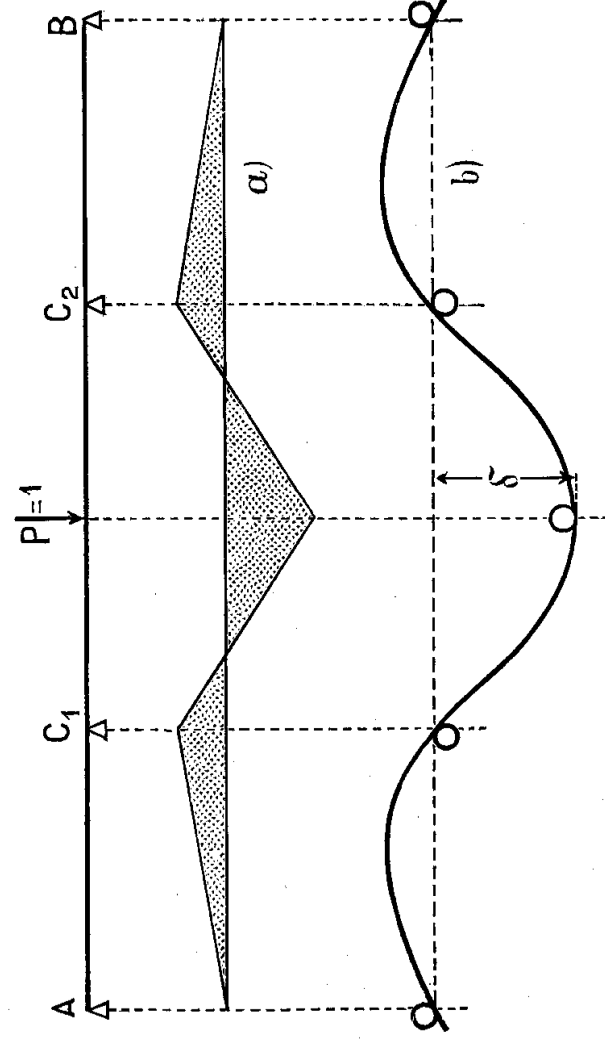


Fig. 172.

La linea descritta dal nastro assoggettato, oltre ai soliti, anche a quell'ulteriore vincolo (fig. 172b), rappresenterà allora nella medesima scala la linea d'influenza cercata, nel senso che l'abbassamento prodotto nella data sezione da un dato carico è misurato dal prodotto

$$P \cdot \eta$$

che si ottiene moltiplicando l'ordinata  $\eta$  della linea d'influenza, letta nella scala anzidetta sulla verticale del carico, per il numero  $P$  che ne misura l'intensità.

\* \* \*

Per eseguire a questo modo lo studio completo di una trave continua su  $n$  appoggi occorrerebbe che l'apparecchio fosse dotato di  $n + 1$  corsoi.

L'esperienza dimostra però che l'influenza esercitata su di un dato vincolo, ovvero su di una data sezione, da un carico, riesce praticamente trascurabile quando questo trovasi su di una luce distante di almeno due posti da quella a cui appartiene la sezione ovvero il vincolo che si considera: cinque soli corsi bastano pertanto in ogni caso alle esigenze del tecnico il quale si proponga la risoluzione pratica di uno dei problemi che abbiamo testè passati rapidamente in rassegna.

Lo stesso succede a maggior ragione quando si voglia utilizzare lo strumento per ricerche aventi carattere prevalentemente qualitativo.

Merita a questo proposito di essere menzionata la facilità e la rapidità con le quali l'influenzografo si presta a dare un'idea concreta del modo con cui l'andamento delle diverse linee di influenza si modifica al variare delle posizioni relative dei vari punti d'appoggio della trave, e quindi delle dimensioni relative delle varie sue luci.

