

VI.

Torsione semplice

(TERZO CASO PARTICOLARE).

Indichiamo al solito con c una costante piccolissima, e poniamo

$$u = -cz(y + a)$$

$$v = cz(x - b)$$

$$w = c [ax + by - \psi(x, y)]$$

$\psi(x, y)$ essendo una funzione ad un sol valore, finita, continua e ben determinata in tutti i punti dell'area A base del cilindro, ed a e b due costanti da determinarsi in base alle condizioni di vincolo.

Perchè infatti siano soddisfatte per $x = y = z = 0$ le (53), occorre e basta che nell'origine la funzione ψ si annulli e che le due derivate prime rispetto ad x e ad y riescano ivi eguali rispettivamente ad a ed a b : ciò che esprimeremo brevemente scrivendo

$$\psi_0 = 0 \quad a = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_0 \quad b = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_0 \quad (67)$$

In questa ipotesi le prime cinque delle (47) riescono identicamente verificate.

Perchè sia verificata anche l'ultima si richiede che la funzione ψ sia armonica:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (68)$$

Inoltre perchè sia soddisfatta la (51) relativa alla superficie laterale del cilindro è necessario e sufficiente che sul contorno s della suddetta area base si abbia

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + y\right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x\right) \cos(n, y) = 0 \quad (69)$$

Dette dx e dy le proiezioni di un elemento lineare dn scelto sulla normale generica n al contorno, si ha evidentemente

$$\frac{dx}{dn} = \cos(n, x) \quad \frac{dy}{dn} = \cos(n, y)$$

La (69) si può pertanto scrivere

$$\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy}{dn} = \frac{x dy - y dx}{dn}$$

o anche

$$\frac{d\psi}{dn} = x \frac{dy}{dn} - y \frac{dx}{dn} \quad (70)$$

Sia $f(x, y) = 0$ l'equazione del contorno s . Si ha:

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{dn}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

onde sostituendo si ottiene ancora

$$\frac{d\psi}{dn} = \frac{x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

Il secondo membro di questa equazione è noto quando è data l'area A o, ciò che fa lo stesso, la funzione $f(x, y)$.

Il primo membro rappresenta invece la derivata della funzione armonica incognita presa normalmente al contorno.

Si è così ricondotti ad un ben noto problema di analisi il quale consiste nel trovare una funzione armonica finita, continua,

e ben determinata in tutti i punti di un'area data, e tale che sul contorno di quest'area la derivata della funzione, presa normalmente al contorno, assuma dei valori dati.

**

Ciò premesso, le (48) divengono immediatamente:

$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_{yz} = -Gc \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x \right)$$

$$\tau_{zx} = -Gc \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + y \right)$$

Questi valori sono indipendenti dalla variabile z ; sussistono pertanto in particolare anche sulla base libera $z = l$, sulla quale perciò dovranno intendersi applicate delle forze esterne di componenti

$$P_x = -Gc \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + y \right)$$

$$P_y = -Gc \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x \right)$$

$$P_z = 0$$

Si avrà allora, secondo le (55):

$$\mathcal{N} = 0$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}' = 0$$

$$Q = -Gc \left[\int \frac{\partial \psi}{\partial y} x dA - \int x^2 dA - \int \frac{\partial \psi}{\partial x} y dA - \int y^2 dA \right]$$

$$\mathcal{T} = -Gc \left[\int \frac{\partial \psi}{\partial y} dA - \int x dA \right]$$

$$\mathcal{T}' = -Gc \left[\int \frac{\partial \psi}{\partial x} dA + \int y dA \right]$$

Ora, per le ipotesi fatte sull'orientazione degli assi x ed y , non soltanto

$$\int x dA = \int y dA = 0$$

ma anche

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial x} dA = \int \frac{\partial \psi}{\partial y} dA = 0$$

Si ha infatti, in virtù della formola di Gauss applicata in un campo a due sole dimensioni,

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial \psi}{\partial x} dA &= - \int_s \psi \cos(n, x) ds \\ &= - \int_s \psi \frac{dx}{dn} ds \end{aligned}$$

Applicando un noto lemma di Green ⁽¹⁾ e tenendo presente la (70) si ha ancora

$$\begin{aligned} &= - \int_s x \frac{d\psi}{dn} ds \\ &= - \int_s x^2 \frac{dy}{dn} ds + \int_s xy \frac{dx}{dn} ds \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Siano $f(x, y)$ e $g(x, y)$ due funzioni delle variabili x, y , date in un'area A connessa, limitata da un contorno s dotato generalmente di tangente determinata, le quali siano in tutti i punti di A e di s finite e continue insieme colle loro derivate prime e che ammettano derivate seconde generalmente finite ed atte all'integrazione.

Dalla identità

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(f \frac{\partial g}{\partial x} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

integrando a tutta l'area A ed applicando alla $f \frac{\partial g}{\partial x}$ la formola di Gauss, si ricava

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} dA + \int_A f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} dA = - \int_s f \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{dn} ds$$

Scrivendo la formola analoga che si ottiene scambiando x con y e poi sommando membro a membro, si ha il *lemma di Green*:

$$\int_A \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} \right) dA + \int_A f \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) dA = - \int_s f \frac{dg}{dn} ds$$

Se $g(x, y)$ è armonica il secondo integrale si annulla. Se tale è anche $f(x, y)$

e ritornando dagli integrali estesi al contorno s agli integrali estesi a tutta l'area A

$$= \int_A \frac{d(x^2)}{dy} dA - \int_A \frac{d(xy)}{dx} dA$$

Questa differenza è nulla perchè son nulli entrambi i suoi termini.

E poichè lo stesso ragionamento si può ripetere invariato per

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial y} dA$$

siamo autorizzati a concludere che il sistema di forze distribuite sulla base libera si può sempre ridurre ad una coppia agente nel piano stesso della base.

Indichiamo con

$$J_0 = \int x^2 dA + \int y^2 dA$$

il momento d'inerzia polare di detta base rispetto al suo baricentro e poniamo

$$q = \frac{J_0}{J_0 - \int \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dA} \quad (71)$$

Questo rapporto prende il nome di *fattore di torsione*, ed è da considerarsi come dato quando è data l'area A .

Il momento della coppia deformatrice si può allora scrivere sotto la forma

$$Q = Gc \frac{J_0}{q}$$

si può scambiare f con g senza che il primo membro muti. Si dovrà avere per conseguenza l'eguaglianza

$$\int_0^1 f \frac{dg}{dn} ds = \int_0^1 g \frac{df}{dn} ds$$

la quale si applica immediatamente al caso nostro se si pone

$$f(x, y) = \psi(x, y)$$

e

$$g(x, y) = x.$$

Al solito Q è da considerarsi come un dato del problema: si potrà allora dedurne il valore della costante

$$c = q \frac{Q}{GJ_0}$$

Si avranno così le espressioni definitive delle componenti di spostamento

$$\left. \begin{aligned} u &= -q \frac{Q}{GJ_0} z (y + a) \\ v &= q \frac{Q}{GJ_0} z (x - b) \\ w &= q \frac{Q}{GJ_0} [ax + by - \psi(x, y)] \end{aligned} \right\} (72)$$

nonchè delle componenti speciali di tensione

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= 0 \\ \tau_{yz} &= -q \frac{Q}{J_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x \right) \\ \tau_{zx} &= -q \frac{Q}{J_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + y \right) \end{aligned} \right\} (73)$$

La dilatazione cubica si mantiene, come è facile verificare, identicamente nulla.

Per formarci un'idea della deformazione così definita immaginiamo per un momento di trasportare gli assi coordinati parallelamente a sè stessi dal baricentro O in un punto O_1 della base $z=0$, di coordinate

$$x = b \quad y = -a$$

cioè poniamo

$$x_1 = x - b \quad y_1 = y + a \quad z_1 = z$$

Le componenti dello spostamento di un punto generico del solido assumono allora la forma

$$u = -q \frac{Q}{GJ_0} z_1 y_1$$

$$v = -q \frac{Q}{GJ_0} z_1 x_1$$

$$w = q \frac{Q}{GJ_0} \Psi(x_1, y_1)$$

essendo Ψ una funzione armonica come la ψ e come essa completamente determinata quando è data l'area A .

Consideriamo i punti di una data sezione retta del cilindro: e distinguiamo gli spostamenti di componenti u , v che stanno nel piano stesso della sezione da quelli w normali a tale piano.

Si vede subito che questi ultimi sono indipendenti dalla quota z della sezione: essi produrranno quindi, in generale, una specie di ingobbimento della sezione, eguale per tutte le sezioni rette, non escluse perciò neppure le due basi.

Per altra parte si ha

$$\frac{u}{v} = \frac{y_1}{x_1}$$

$$\sqrt{u^2 + v^2} = q \frac{Q}{GJ_0} z_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Dunque le componenti u , v definiscono un semplice moto rigido di rotazione di ciascuna sezione attorno alla retta di equazioni

$$x_1 = 0 \quad y_1 = 0$$

rotazione la cui ampiezza

$$\omega = q \frac{Q}{GJ_0} z \quad (74)$$

è proporzionale alla distanza della sezione dalla base incastrata $z = 0$.

Una tale deformazione viene designata col nome di torsione semplice: e la retta testè definita, parallela all'asse z condotta pel punto O_1 , prende il nome di *asse di torsione*.

Di tutte le rette inizialmente parallele a z essa è l'unica che si conservi tale; tutte le altre si trasformano in elicke cilindriche aventi la prima per asse.

* * *

Poco c'è da osservare a proposito dello stato di tensione, se non che le tensioni interne su ciascuna sezione retta sono indipendenti dalla sua posizione nel cilindro, come d'altronde è richiesto dal fatto che la sollecitazione relativa ad una tale sezione consiste nel solo *momento torcente* di grandezza costante

$$Q_x = Q$$

Assai interessante è invece il calcolo dell'energia potenziale elastica.

Si ha infatti, applicando la (50)

$$\varphi = q^2 \frac{Q^2}{2GJ_0^2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + y \right)^2 \right]$$

epperò

$$\Phi = q^2 \frac{Q^2}{2GJ_0^2} \int_V \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + y \right)^2 \right] dV$$

o anche, se si tien conto che l'espressione sotto integrale è indipendente da z

$$\Phi = q^2 \frac{Q^2 l}{2GJ_0^2} \int_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + y \right)^2 \right] dA$$

Ma

$$\begin{aligned} & \int_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + y \right)^2 \right] dA = \\ & = J_0 + \int_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dA - 2 \int_A \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dA \end{aligned}$$

che, per una già dimostrata proprietà delle funzioni armo-

niche ⁽¹⁾, diviene

$$= J_0 - \int_s \psi \frac{dy}{dn} ds - 2 \int_A \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dA$$

e ancora, vista la (70)

$$= J_0 - \int_s \left(\psi x \frac{dy}{dn} - \psi y \frac{dx}{dn} \right) ds - 2 \int_A \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dA$$

e finalmente, ritornando dall'integrale esteso al contorno ad un integrale esteso a tutta l'area

$$\begin{aligned} &= J_0 + \int_A \left(\frac{\partial(\psi x)}{\partial y} - \frac{\partial(\psi y)}{\partial x} \right) dA - 2 \int_A \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dA \\ &= J_0 - \int_A \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dA = \frac{J_0}{q} \end{aligned}$$

Resta così dimostrato che l'energia potenziale elastica è misurata da

$$\Phi = q \frac{Q^2 l}{2GJ_0}$$

cioè dal semiprodotto del momento Q per la rotazione

$$q \frac{Q}{GJ_0} l$$

da esso impressa alla base libera a cui è applicato: il che è precisamente quanto per ragioni già più volte ripetute ci era dato di prevedere.

⁽¹⁾ Nel lemma di Green dimostrato nella nota a pag. 148 si supponga

$$f(x, y) = g(x, y) = \psi(x, y)$$

Annullato il secondo integrale che vi compare per tener conto che si tratta di una funzione armonica, quella formola diviene immediatamente:

$$\int_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dA = - \int_s \psi \frac{d\psi}{dn} ds$$

**
**

Per procedere ulteriormente nell'analisi del problema occorre conoscere la funzione ψ , ciò che non può ottenersi se non è nota la forma del solido. Convien dunque che ci riferiamo a qualche caso speciale.

Incominceremo col supporre che il cilindro sia a base circolare. Allora sul contorno s dell'area A si ha

$$y \cos(n, x) - x \cos(n, y) = 0$$

La (69) si riduce a

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos(n, y) = 0$$

o più semplicemente ancora a

$$x \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

Essa risulta soddisfatta se si pone

$$\psi = \text{costante}$$

Più precisamente, tenuto conto delle (67) si assumerà

$$\left. \begin{aligned} \psi &= 0 \\ a &= b = 0 \end{aligned} \right\} (75)$$

epperò

Avvertiamo, di passaggio, che questa è l'unica soluzione del problema: $\psi = 0$ è cioè l'unica funzione armonica la quale verifichi sulla circonferenza la condizione imposta e prenda, in tutti i punti interni ad essa, valori finiti e determinati.

Dalla (71) si ricava subito

$$q = 1$$

Lo stato di deformazione riesce pertanto definito se si osserva che

$$w = 0$$

ed

$$\omega = \frac{Qz}{GJ_0} \quad (76)$$

Le singole sezioni rette si mantengono dunque piane. Ciascuna di esse ruota nel suo piano attorno al suo centro di un angolo $\omega = P_1 O_1 P_1'$ (fig. 15), direttamente proporzionale al momento torcente ed alla sua distanza dalla base incastata, e inversamente al momento d'inerzia polare della sezione rispetto al suo centro ed al modulo di elasticità tangenziale del materiale.

La misura di questo angolo, che può farsi sperimentalmente con mezzi molto semplici, costituisce il più ovvio metodo di determinazione diretta del modulo di elasticità tangenziale: determinazione che è di grande interesse per la verifica sperimentale delle relazioni che legano questo modulo G a quello E di elasticità normale ed al rapporto m di contrazione laterale. Quanto allo stato di tensione, si ha:

$$\tau_{yz} = \frac{Qx}{J_0} \quad \tau_{zx} = -\frac{Qy}{J_0}$$

epperò

$$\frac{\tau_{yz}}{\tau_{zx}} = -\frac{x}{y}$$

e

$$\sqrt{\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2} = \frac{Q}{J_0} \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dunque su ciascun elemento di sezione retta agisce una tensione tangenziale diretta normalmente al raggio che congiunge l'elemento stesso al centro della sezione, e di grandezza proporzionale alla lunghezza di quel medesimo raggio.

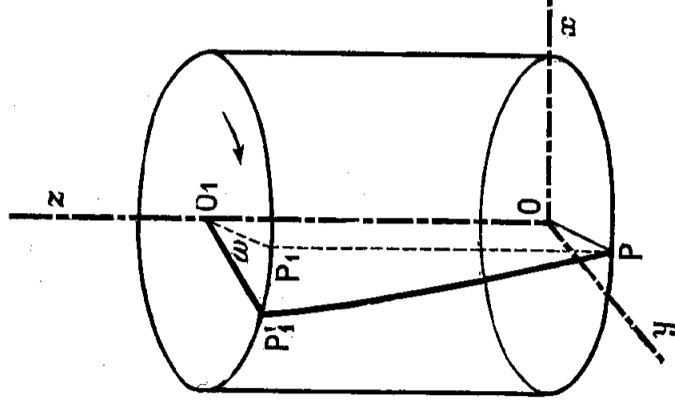


Fig. 15.

Tale tensione è naturalmente costante su ciascuna superficie cilindrica coassiale col cilindro dato e raggiunge il suo valor massimo sulla superficie laterale di esso.

* * *

Passando ora ad una seconda ipotesi, meno semplice della prima, supponiamo che il cilindro abbia per sezione retta un'elisse di semiassi ϱ_1 e ϱ_2 .

Più precisamente supponiamo data l'equazione del contorno s della base incastrata:

$$\frac{x^2}{\varrho_1^2} + \frac{y^2}{\varrho_2^2} = 1$$

Si può dimostrare che la funzione armonica che risolve il problema proposto a pag. 146 è allora

$$\psi = \frac{\varrho_1^2 - \varrho_2^2}{\varrho_1^2 + \varrho_2^2} xy \quad \left. \vphantom{\psi} \right\} (77)$$

$$a = b = 0$$

donde

Anche qui, come nel caso del cerchio, l'asse di torsione coincide dunque coll'asse geometrico del solido, cioè coll'asse delle z .

Sarebbe anzi assai facile far vedere che ciò deve avvenire necessariamente ogniquale volta la sezione A è simmetrica rispetto ai due suoi assi principali di inerzia.

Calcoliamoci il fattore di torsione: intanto si ha

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\varrho_1^2 - \varrho_2^2}{\varrho_1^2 + \varrho_2^2} y \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\varrho_1^2 - \varrho_2^2}{\varrho_1^2 + \varrho_2^2} x$$

epperò

$$\int_A \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dA = \frac{\varrho_1^2 - \varrho_2^2}{\varrho_1^2 + \varrho_2^2} \int_A (x^2 - y^2) dA$$

Ma

$$\int_A (x^2 - y^2) dA = J' - J = \frac{\pi}{4} \varrho_1 \varrho_2 (\varrho_1^2 - \varrho_2^2)$$

mentre

$$J_0 = J' + J = \frac{\pi}{4} \varrho_1 \varrho_2 (\varrho_1^2 + \varrho_2^2)$$

Sostituendo nella (71) e riducendo, si ha

$$q = \left(\frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}{2\varrho_1\varrho_2} \right)^2 \quad (78)$$

Per $\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = 1$ questa formula dà $q = 1$

2	1.56
3	2.78
4	4.52
5	6.76
6	9.50
7	12.75
8	16.50
9	20.75
10	25.50
.....

Dalla (74) si ricava per l'angolo di torsione

$$\omega = \left(\frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}{2\varrho_1\varrho_2} \right)^2 \frac{Q}{GJ_0} z$$

Sostituendo a J_0 il suo valore già indicato e tenendo presente che $\pi\varrho_1\varrho_2 = A$, si può anche scrivere

$$\omega = 4\pi^2 \frac{QJ_0}{GA^4} z \quad (79)$$

Sotto questa forma appare chiaramente che se si fa variare il rapporto dei due semiassi dell'ellisse mantenendone costante l'area, l'angolo di torsione prodotto da un dato momento torcente su di una data lunghezza di cilindro varia proporzionalmente al momento d'inerzia polare.

Se per semplicità si assume come unità il valore dell'angolo

di torsione relativo al caso del cilindro circolare, a parità di altre circostanze, ponendo

$\frac{\rho_1}{\rho_2} = 1$	si troverà	$\omega = 1$
2		1.25
3		1.67
4		2.13
5		2.60
6		3.08
7		3.57
8		4.07
9		4.56
10		5.06
.....	

Avvertiamo incidentalmente che la (79) può essere, in via di approssimazione, applicata a cilindri a sezione anche diversa dall'ellittica, e dà, in molti casi, risultati praticamente assai soddisfacenti.

Vediamo ora in qual modo si ingobba ciascuna sezione retta. L'ultima delle (72) diviene facilmente:

$$w = \frac{\rho_2^4 - \rho_1^4}{4\rho_1^2\rho_2^2} \frac{Q}{GJ_0} xy$$

e rappresenta un paraboloide iperbolico.

Per $x=0$, ovvero per $y=0$, si ha $w=0$, dunque gli assi della sezione si mantengono nel piano primitivo.

Inoltre se $\rho_1 > \rho_2$, w risulta positivo quando x ed y sono di segno contrario, riesce invece negativo dove x ed y hanno il medesimo segno.

L'opposto accadrebbe se fosse $\rho_1 < \rho_2$.

In ogni caso si può dire che un osservatore disposto secondo l'asse z , colla testa dalla parte delle z positive, vedrebbe abbassarsi i due quadranti che nel senso del momento Q fanno seguito ai due semiasse maggiori, ed innalzarsi gli altri due.

Nella fig. 16 la deformazione della sezione trovasi rappresentata mediante linee di livello, cioè mediante le proiezioni delle curve intersezioni della superficie con piani equidistanti condotti parallelamente al piano in cui la sezione giaceva inizialmente.

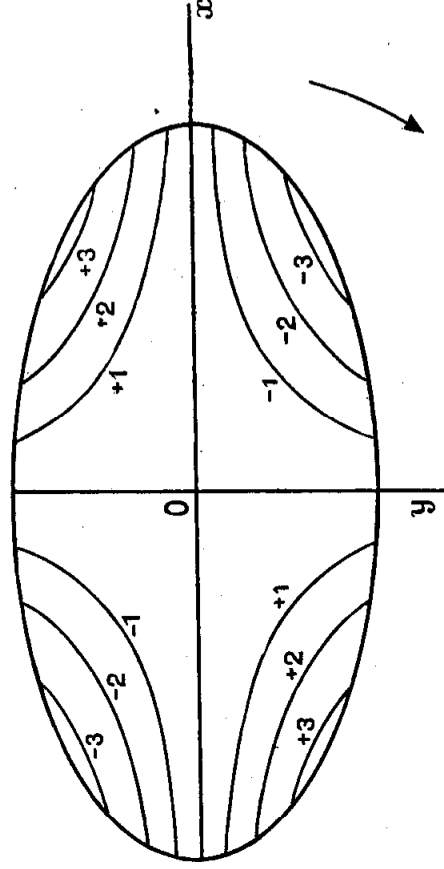


Fig. 16.

Anche più facile riesce rendersi conto della legge di distribuzione delle tensioni tangenziali.

Si ha infatti, applicando le (73)

$$\tau_{yz} = \frac{2Q}{Ae_1^3} x \quad \tau_{zx} = \frac{2Q}{Ae_2^3} y$$

Consideriamo un qualunque diametro dell'ellisse: lungo di esso le coordinate x ed y , e quindi anche le componenti τ_{yz} e τ_{zx} della tensione tangenziale, variano proporzionalmente alla distanza dal centro.

Segue da ciò, in primo luogo, che in tutti i punti di un diametro la tensione tangenziale ha la stessa direzione. E poichè in corrispondenza dei suoi estremi tale direzione deve coincidere con quella delle tangenti al contorno, si può senz'altro concludere che la tensione tangenziale che agisce su un punto generico della sezione ha la direzione coniugata al diametro che passa per quel punto (fig. 17).

Si può poi affermare, in secondo luogo, che anche la grandezza della suddetta tensione deve variare su ciascun diametro proporzionalmente alla distanza dal centro. Ne viene di conseguenza che i punti della sezione in corrispondenza dei quali detta tensione raggiunge il massimo valore non possono che appartenere al contorno.

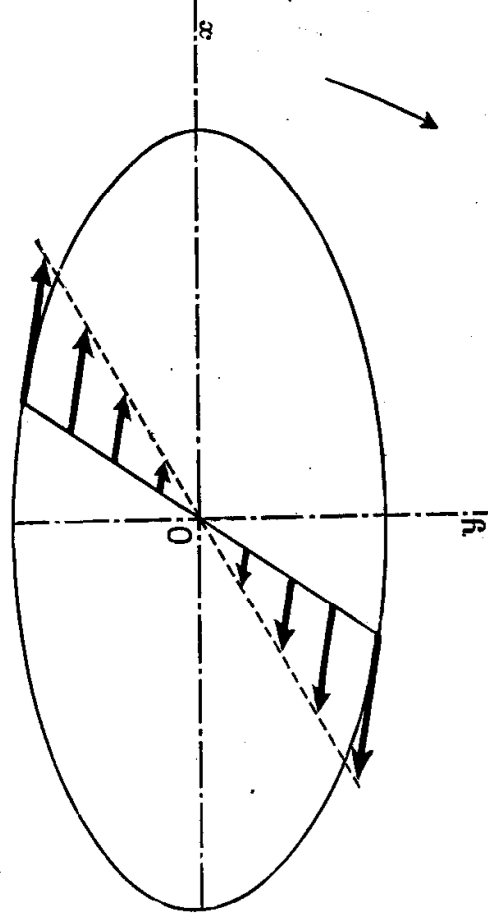


Fig. 17.

Ora se nell'espressione della grandezza di quella tensione che è della forma

$$\sqrt{\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2} = \frac{2Q}{A} \sqrt{\frac{x^2}{\rho_1^4} + \frac{y^2}{\rho_2^4}}$$

si suppone che x ed y siano le coordinate di un punto dell'ellisse contorno della sezione, il radicale al secondo membro divien eguale all'inverso della distanza del centro dalla tangente all'ellisse in quel punto.

La tensione tangenziale sarà dunque massima là dove questa distanza è minima, cioè in corrispondenza degli estremi dell'asse minore, il che è quanto dire in quei punti del contorno che sono più vicini all'asse di torsione.

Di questa proprietà, che può sembrare a prima vista alquanto singolare, e che è invece assai più generale di ciò che qui non appaia, avremo presto occasione di riparlare.

* * *

Termineremo con un accenno al caso di un prisma a base triangolare equilatera, caso che ha il pregio di presentare in forma semplice e facilmente dimostrabile molte delle caratteristiche che sono comuni nei casi più complessi.

Se si assume per asse delle x una delle mediane della sezione, l'asse y riesce parallelo ad uno dei lati.

Detta pertanto d la lunghezza di questi, l'equazione del contorno si può scrivere evidentemente sotto la forma

$$(2\sqrt{3}x + d)(\sqrt{3}x + 3y - d)(\sqrt{3}x - 3y - d) = 0$$

ovvero riducendo

$$\frac{2}{\sqrt{3}d}(3y^2x - x^3) + y^2 + x^2 = \frac{d^2}{9}$$

In queste condizioni si può dimostrare che si deve porre

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}d}(3x^2y - y^3)$$

e per conseguenza

$$a = b = 0$$

Ciò premesso si ha

$$w = q \frac{Q}{GJ_0} \frac{y^2 - 3x^2}{\sqrt{3}d} y$$

Il secondo membro si annulla in tutti i punti delle tre mediane

$$y = 0 \quad y = \sqrt{3}x \quad y = -\sqrt{3}x$$

Nell'ingobbimento della sezione retta le tre mediane restano dunque nel loro piano: esse dividono l'area della sezione in sei regioni le quali si deformano spostandosi alternativamente da una parte e dall'altra di esso nel modo indicato nella fig. 18. Similmente si ha

$$\tau_{yz} = q \frac{Q}{J_0} \left(x - \sqrt{3} \frac{x^2 - y^2}{d} \right)$$

$$\tau_{xz} = -q \frac{Q}{J_0} \left(1 + 2\sqrt{3} \frac{x}{d} \right) y$$

Ponendo $y = 0$ si trova $\tau_{zx} = 0$; dunque nei punti della mediana che si è assunta come asse delle x le tensioni tangenziali sono dirette perpendicolarmente ad essa e variano secondo una legge parabolica

$$\tau_{yz} = q \frac{Q}{J_0} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{d} x^2 \right)$$

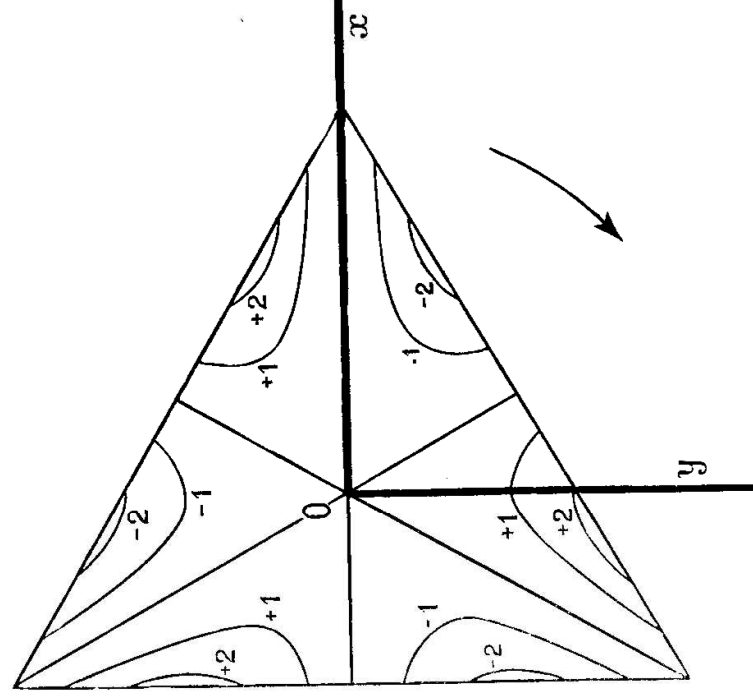


Fig. 18.

annullandosi nel baricentro ($x = 0$) e in corrispondenza del vertice ($x = \frac{d}{\sqrt{3}}$), e raggiungendo il massimo valore sulla mezzeria del lato opposto (fig. 19).

Non meno interessante riesce il ricercare quale è la distribuzione delle tensioni tangenziali nei punti dell'asse y .

Basta porre nelle espressioni sopra scritte $x = 0$: si ha allora

$$\tau_{yz} = q \frac{Q}{J_0} \frac{\sqrt{3}}{d} y^2$$

$$\tau_{zx} = -q \frac{Q}{J_0} y$$

da cui

$$\frac{\tau_{yz}}{\tau_{zx}} = \frac{y}{d} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

dunque le linee d'azione di quelle tensioni concorrono tutte nel vertice del triangolo che sta sull'asse x alla distanza $\frac{d}{\sqrt{3}}$ dall'origine.

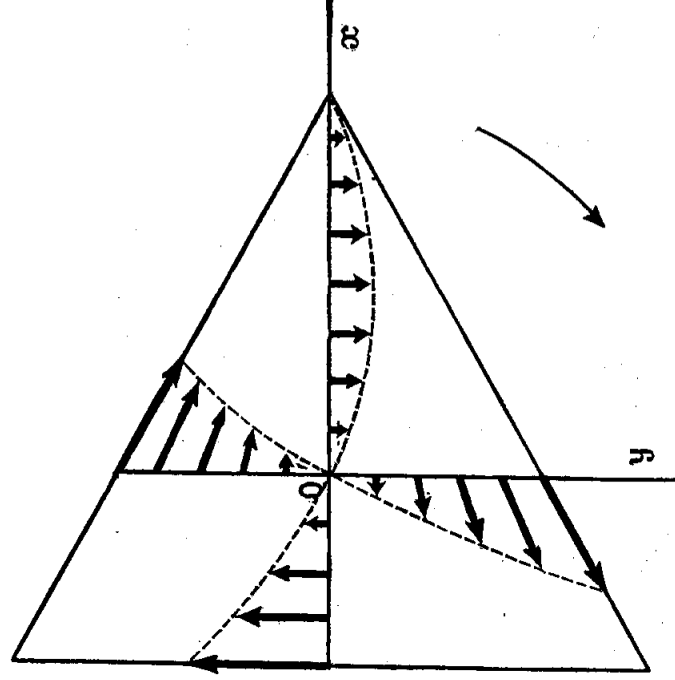


Fig. 19.

S'intende che risultati affatto analoghi si ritroverebbero se si studiassero le distribuzioni delle tensioni tangenziali lungo le altre due mediane, ovvero lungo le parallele condotte pel baricentro agli altri due lati del triangolo.

Le tensioni massime si sviluppano anche qui in corrispondenza dei punti del contorno della sezione che sono più vicini all'asse di torsione.

Nei vertici invece le tensioni si annullano.

Le considerazioni che verremo svolgendo nel capitolo che segue dimostreranno la grande generalità di questi risultati che noi abbiamo direttamente assodati solo nei pochi casi particolari che siamo venuti esaminando.