

## L'arco incastrato.

L'arco incastrato ad entrambi gli estremi (fig. 143) rappresenta il tipo dei problemi a tre incognite iperstatiche. Uno dei due incastri è infatti evidentemente sovrabbondante, e la libertà con cui si possono scegliere i tre parametri della relativa reazione rende agevole e naturale l'applicazione dei criteri illustrati nel precedente capitolo al fine di rendere le tre incognite indipendenti, e di facilitare il tracciamento delle relative linee d'influenza.

In linea generale la reazione dell'incastrato sovrabbondante — adotteremo come tale, tanto per fissar le idee una volta per tutte, quello di sinistra — si può esprimere mediante le sue tre componenti secondo tre rette qualunque del piano, purchè non concorrenti in un medesimo punto.

Assumiamo una di queste rette ad arbitrio, ed indichiamola con  $r_1$  (fig. 144).

Liberato idealmente l'arco dall'incastrato sovrabbondante, immaginiamolo sollecitato, in corrispondenza della faccia terminale  $AA$  che così si è venuta a rendere libera, da un complesso di forze la cui risultante  $X_1$  abbia la  $r_1$  per linea d'azione.

Noi sappiamo che, nella deformazione che così si produce, l'elemento terminale  $AA$  subisce una rotazione piccolissima attorno ad un punto  $C_1$  ben determinato del piano.

Sappiamo ancora che se si sostituisce alla sollecitazione rappresentata dalla forza  $X_1$  un'altra sollecitazione la cui risultante  $X_2$  abbia per linea d'azione una retta  $r_2$  passante per  $C_1$  (fig. 145) il nuovo centro  $C_2$  attorno a cui l'elemento terminale viene a ruotare giace sulla prima retta  $r_1$ .

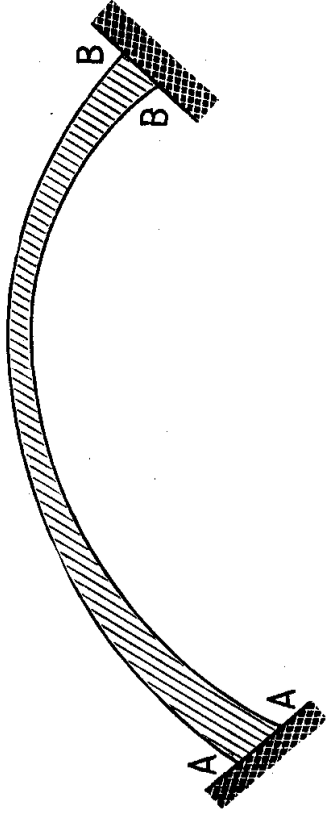


Fig. 143.

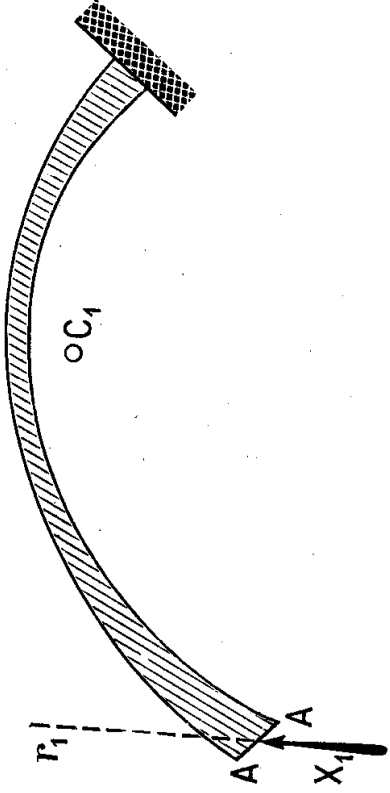


Fig. 144.

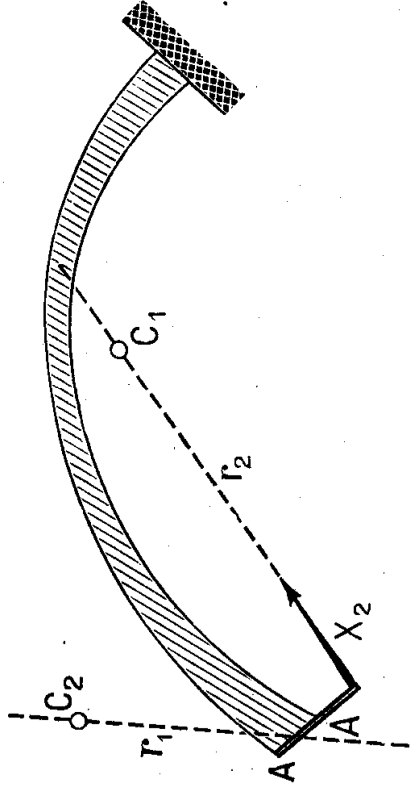


Fig. 145.

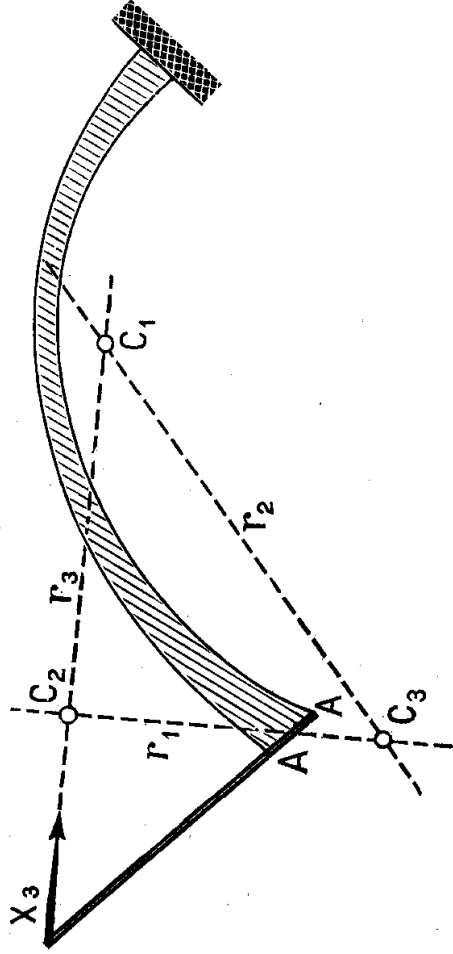


Fig. 146.

Sappiamo finalmente che ad una terza sollecitazione rappresentata da una forza  $X_3$  avente per linea d'azione la congiungente  $r_3$  dei due centri  $C_1$  e  $C_2$  (fig. 146) corrisponde per centro di rotazione  $C_3$  il punto di incontro delle due rette  $r_1$  ed  $r_2$ .

Nel triangolo che ha le tre rette  $r_1, r_2, r_3$  per lati, e per vertici i tre centri  $C_1, C_2, C_3$ , il lettore avrà certamente riconosciuto subito uno degli infiniti triangoli autocongiugati rispetto all'ellisse degli spostamenti elastici terminali dell'arco, di cui si è parlato a pag. 273.

Orbene, se si assumono le tre rette  $r_1, r_2, r_3$  come linee d'azione delle componenti della reazione dell'imposta sinistra — il che vuol poi dire: se si immagina sostituito il triplice vincolo rappresentato dall'incastro sovrabbondante con tre vincoli semplici aventi quelle tre rette per linee d'azione — le condizioni necessarie e sufficienti per l'indipendenza delle tre incognite sono senz'altro verificate.

Infatti la deformazione che viene determinata da una qualunque delle tre forze  $X$  sopra considerate, quando essa si supponga agente da sola sulla faccia terminale dell'arco, dando luogo ad una rotazione della stessa faccia terminale attorno ad un punto che sta sulla linea d'azione tanto dell'una come dell'altra delle  $X$  rimanenti, riesce compatibile tanto coll'uno come coll'altro dei due vincoli che queste rappresentano: perciò non verrebbe ad essere in modo alcuno modificata se questi due vincoli venissero ripristinati: nel qual caso non v'è dubbio che la deformata dell'asse geometrico dell'arco sarebbe immediatamente interpretabile come linea d'influenza della reazione dell'unico vincolo soppresso nel sistema triplamente iperstatico dato.

In particolare le condizioni necessarie e sufficienti per l'indipendenza delle tre incognite saranno verificate se, prendendo per primo lato del triangolo autopolare la retta all'infinito del piano, e quindi per vertice opposto il baricentro elastico dell'arco, si riferisce la reazione incognita dell'incastro sovrabbondante ad una qualsiasi coppia di diametri coniugati dell'ellisse di elasticità.

Allora le tre linee d'influenza delle tre incognite iperstatiche si potranno direttamente ottenere — in modo indipendente l'una dall'altra — costruendo le tre deformate dell'arco, reso stati-

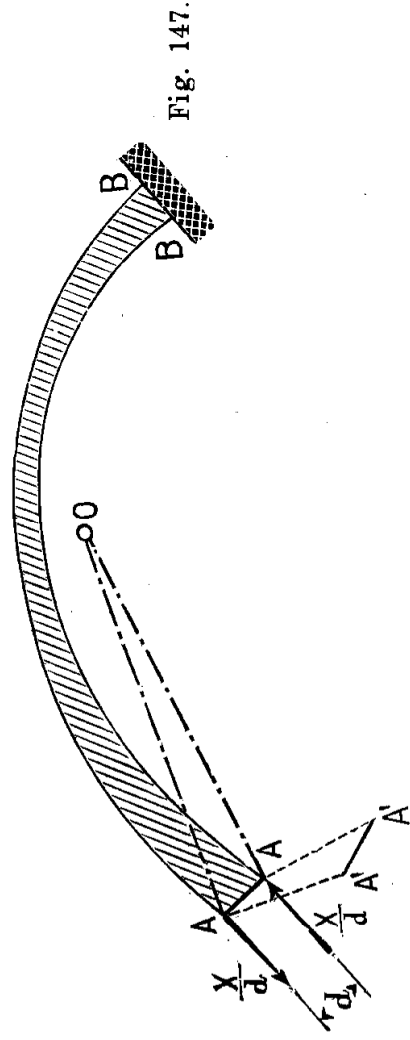


Fig. 147.

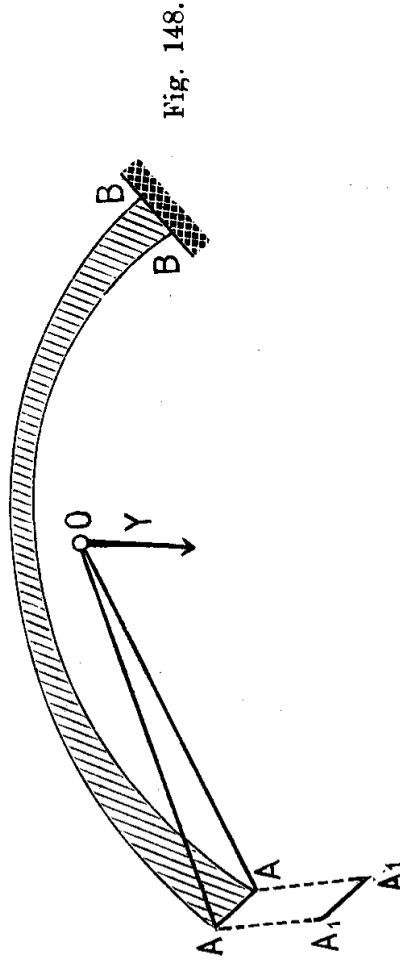


Fig. 148.

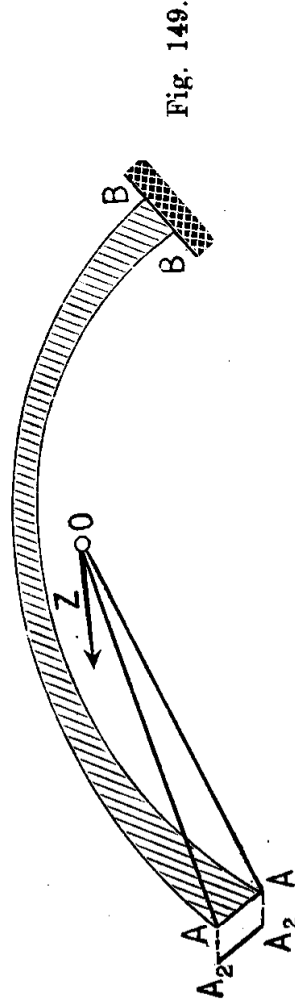


Fig. 149.

camente determinato, corrispondenti a tre sollecitazioni elementari caratterizzate rispettivamente:

- 1) da una coppia di momento  $X$  (fig. 147);
- 2) da una forza  $Y$  avente per linea d'azione una retta arbitraria condotta per il centro  $O$  attorno a cui l'elemento terminale ha ruotato per effetto della prima sollecitazione (fig. 148);
- 3) da una forza  $Z$  avente per linea d'azione la perpendicolare condotta per  $O$  alla direzione della traslazione che lo stesso elemento terminale ha subito sotto l'azione della seconda sollecitazione (fig. 149).

\*\*\*

Immaginiamo al solito l'arco suddiviso in tronchi che si possano praticamente ritenere prismatici, e dei quali si possano quindi facilmente determinare il peso elastico e l'ellisse di elasticità.

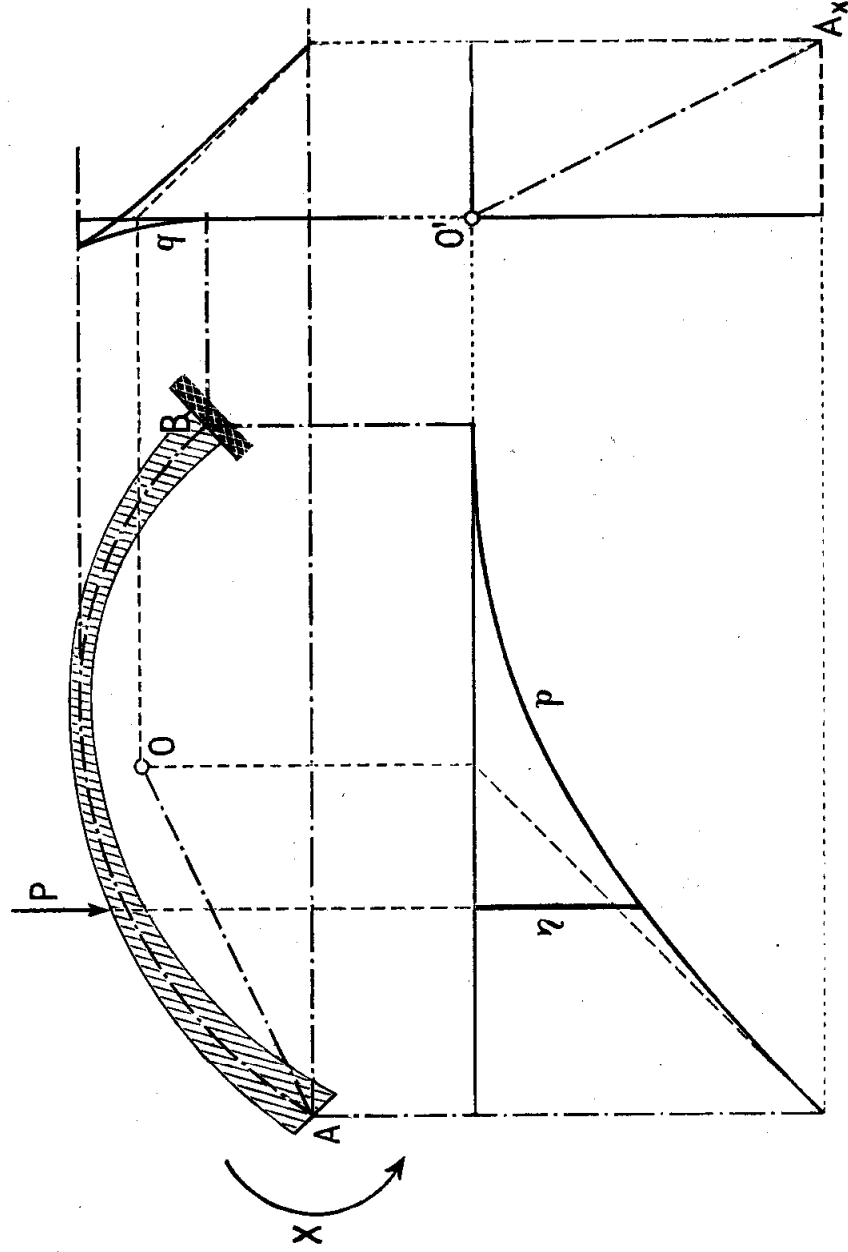


Fig. 150.

Se si considerano i pesi elastici come forze applicate nei rispettivi baricentri, dapprima in direzione verticale, poi in direzione orizzontale, e si collegano tali forze con due poligoni funicolari  $p$  e  $q$  (fig. 150), le ordinate di questi, contate a partire dall'ultimo loro lato (relativo all'incastro conservato) misurano rispettivamente le componenti verticali ed orizzontali degli spostamenti che i singoli punti dell'asse geometrico dell'arco subirebbero sotto l'azione della sollecitazione  $X$ , vale a dire di un complesso di forze applicate alla faccia terminale (corrispondente all'incastro soppresso) equivalenti ad una coppia di momento  $X$ .

Perchè tali poligoni siano interpretabili come linee d'influenza del momento  $X$  della reazione incognita dell'imposta sinistra per forze applicate ai vari punti dell'asse geometrico rispettivamente in direzione verticale ed orizzontale, occorre e basta, notoriamente, che la intensità della coppia applicata sia tale da dar origine ad una rotazione di grandezza unitaria della faccia terminale su cui essa è applicata, ciò che viene in figura indicato dall'essere eguale all'unità l'inclinazione della tangente terminale della linea elastica (primo lato del poligono funicolare) per rapporto alla retta di riferimento (ultimo lato dello stesso poligono).

Ora per ottenere ciò basta evidentemente assumere la distanza polare eguale alla lunghezza totale della retta delle forze, vale a dire al peso elastico totale dell'arco.

A queste condizioni, detta  $P$  una qualunque forza — orizzontale o verticale — applicata in un punto generico dell'asse geometrico, si può scrivere

$$X = P \cdot \eta$$

essendo  $\eta$  l'ordinata, letta nella scala delle lunghezze, cioè nella scala stessa del disegno, che il corrispondente poligono funicolare intercetta sulla linea d'azione di  $P$ .

\* \* \*

Intanto, dagli stessi due poligoni funicolari si deduce nel modo più ovvio la posizione del baricentro elastico  $O$ .

Prolungando poi i singoli lati del primo poligono fino ad incontrare la verticale per  $O$  si otterrebbero facilmente i momenti statici dei pesi elastici per rapporto a tale retta.

Tali momenti statici si potranno allora considerare come nuove forze applicate tanto verticalmente che orizzontalmente ai centri rispettivi, vale a dire agli antipoli della stessa retta per rapporto alle singole ellissi di elasticità: li supporremo collegati con due nuovi poligoni funicolari  $p'$  e  $q'$  (fig. 151).

Le ordinate di questi due poligoni, contate sempre a partire dall'ultimo lato, misureranno rispettivamente le componenti verticali ed orizzontali degli spostamenti che i singoli punti dell'asse geometrico dell'arco subirebbero sotto l'azione della

sollecitazione  $Y$ , vale a dire di un complesso di forze applicate all'elemento terminale, aventi per risultante una forza  $Y$  la cui linea d'azione sia la verticale passante per il centro  $O$ .

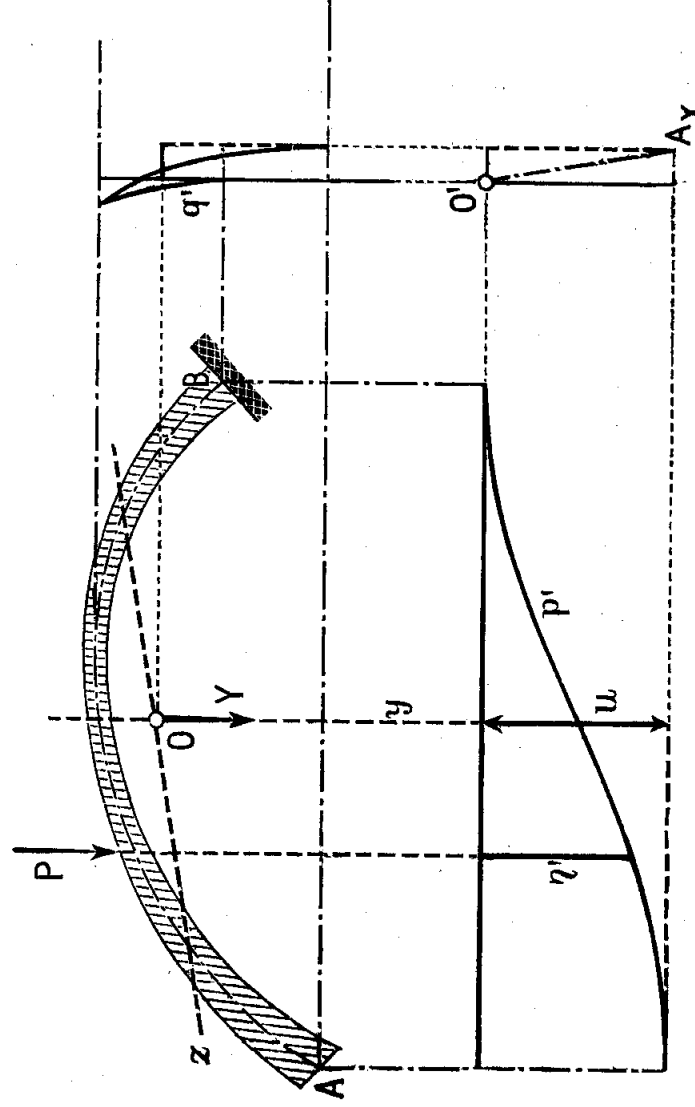


Fig. 151.

Questi due poligoni possono dunque senz'altro assumersi come linee d'influenza della componente  $Y$  della reazione dell'imposta sinistra, per forze agenti sui diversi punti dell'asse geometrico verticalmente od orizzontalmente, quando la intensità della sollecitazione adottata sia tale da dar origine ad uno spostamento dell'elemento terminale in direzione verticale, precisamente eguale all'unità di lunghezza.

La quale condizione si realizza immediatamente se si assume per unità di lunghezza, per la lettura delle predette ordinate, proprio il segmento  $u$  che in disegno rappresenta quello spostamento.

Si avrà perciò, nelle stesse ipotesi sopra enunciate, e colle notazioni della figura

$$Y = P \frac{\eta'}{u}$$





prima) dell'asse  $z$ ; finalmente collegare queste forze con due nuovi poligoni funicolari  $p''$  e  $q''$  (fig. 152).

Le ordinate di questi poligoni, contate sempre a partire dall'ultimo loro lato, misureranno le componenti (comutate rispettivamente nella direzione di  $y$  ed in quella di  $z$ ) degli spostamenti che i singoli punti dell'asse geometrico dell'arco subirebbero sotto l'azione della sollecitazione  $Z$ , vale a dire di un complesso di forze applicate all'elemento terminale, la cui risultante abbia per linea d'azione la retta  $z$ .

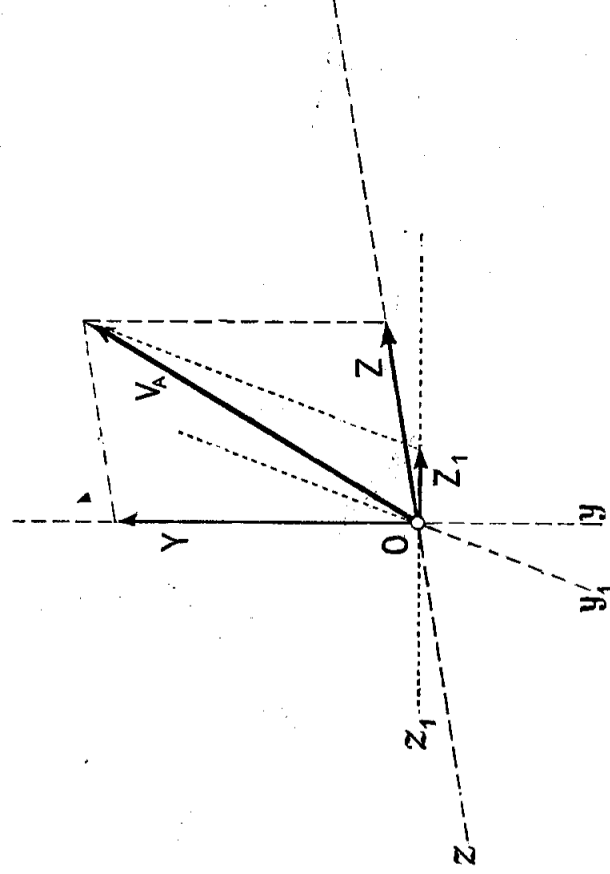


Fig. 153.

Questi due poligoni possono dunque senz'altro assumersi come linee di influenza della componente  $Z$  della reazione dell'imposta sinistra, per forze agenti, questa volta, parallelamente ad  $y$  ed a  $z$  <sup>(1)</sup>, a condizione che si assuma come unità di lunghezza per la lettura delle loro ordinate il segmento  $v$  che in

<sup>(1)</sup> Quando si vogliono utilizzare tutte queste linee d'influenza per studiare il comportamento statico dell'arco sotto l'azione di forze esterne comunque dirette, sorge qui una piccola complicazione su cui è necessario che il lettore fermi un momento la sua attenzione.

Tali forze esterne si possono infatti sostituire colle loro componenti verticali ed orizzontali fin che si tratta di servirsi delle linee  $p$  e  $q$  della fig. 150, nonchè della  $p'$  e  $q'$  della fig. 151.

Ma per utilizzare le linee  $p''$  e  $q''$  della fig. 152 bisogna invece aver l'avver-

disegno rappresenta lo spostamento dell'elemento terminale nella direzione stessa della forza (cioè dell'asse  $z$ ).

Si avrà quindi

$$Z = P \frac{\eta''}{v}$$

\*\*\*

La grandezza e la direzione della reazione  $V_A$  corrispondente ad una data condizione di carico si possono dunque immediatamente ottenere componendo insieme le due componenti  $Y$  e  $Z$  testè trovate (fig. 153).

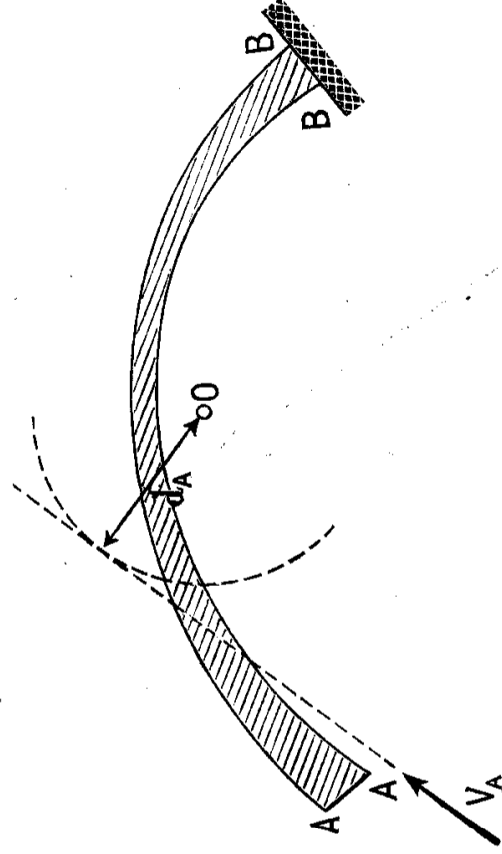


Fig. 154.

La sua posizione nel piano si otterrà conducendo la parallela alla direzione trovata che è tangente alla circonferenza di centro  $O$  e di raggio

$$d_A = \frac{X}{V_A}$$

da quella parte che è richiesta dal segno del momento  $X$  (fig. 154).

tenza di decomporre quelle forze esterne in componenti dirette secondo le due direzioni coniugate  $y$  e  $z$ .

L'inconveniente si potrebbe naturalmente evitare costruendo il poligono collegante i momenti statici dei pesi elastici per rapporto a  $z$  orientati orizzontalmente (anzichè parallelamente a  $z$ ). Ma si evita anche più semplicemente adottando una variante al procedimento di cui si parlerà nelle pagine seguenti.

S'intende poi che una volta conosciuta  $V_A$  resta immediatamente determinato lo stato di tensione dell'intero arco: in particolare resta determinata l'altra reazione  $V_B$ . Questa deve infatti essere equipollente al terzo lato di un triangolo i cui primi due lati sono rispettivamente equipollenti a  $P$  ed a  $V_A$ : con ciò restano determinate la sua direzione e la sua grandezza;

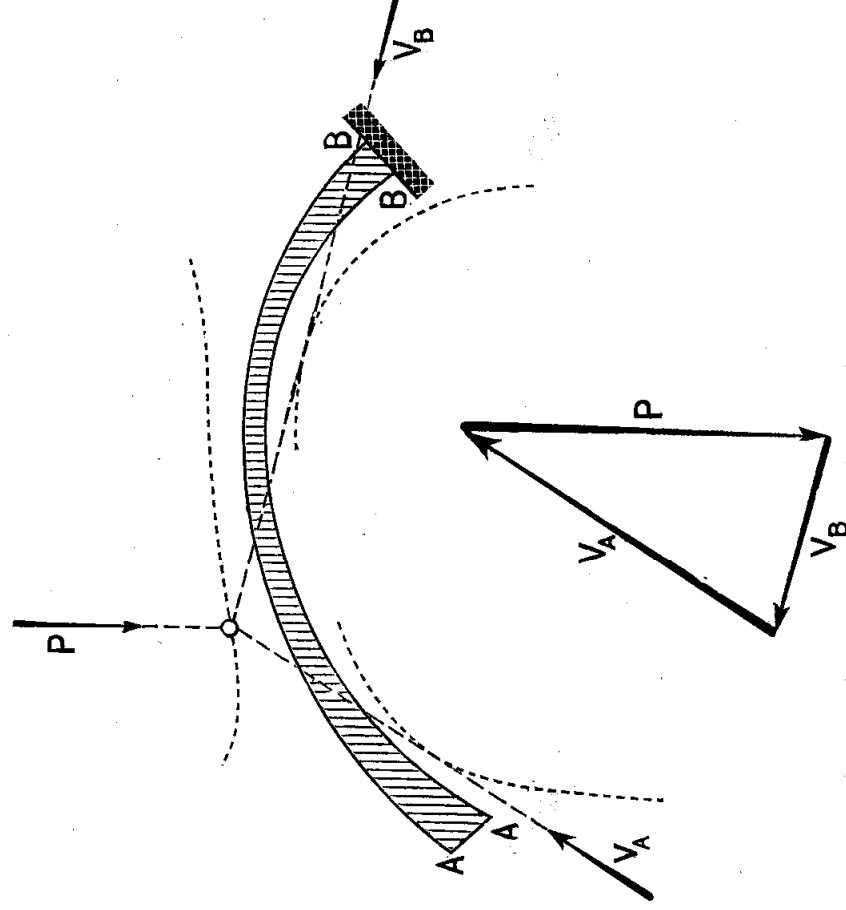


Fig. 155.

la sua linea d'azione potrà poi immediatamente tracciarsi se si tiene presente che essa deve incontrare la linea d'azione della  $V_A$  in un punto della linea d'azione della  $P$  (fig. 155).

Quando  $P$  si sposta, mantenendosi naturalmente parallela a se stessa — e più particolarmente quando  $P$  si sposta mantenendosi verticale, come accade in molti tra i più interessanti problemi della pratica — quel punto della sua linea d'azione in cui concorrono le linee d'azione delle due reazioni, descrive una curva ben determinata a cui i tecnici danno il nome di *linea delle intersezioni*.

Contemporaneamente le due reazioni involuppano due altre curve che si chiamano brevemente *linee involuppi*.

Tanto l'una che le due altre possono facilmente venir dedotte dalle tre linee d'influenza delle  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  ripetendo un conveniente numero di volte la costruzione indicata nelle precedenti figure. La loro conoscenza è d'altronde perfettamente equivalente alla conoscenza delle tre linee d'influenza agli effetti della determinazione delle reazioni corrispondenti ad una condizione di carico qualunque.

\* \* \*

Una semplificazione nelle operazioni grafiche descritte, particolarmente interessante dal punto di vista accennato nella Nota a pag. 474, si può conseguire se, in luogo della sollecitazione  $Z$ , avente la direzione coniugata alla verticale, si considera una sollecitazione  $Z_1$  diretta orizzontalmente.

In tal caso, infatti, i momenti statici dei pesi elastici rispetto alla sua linea d'azione si possono dedurre dal poligono  $q$  della figura 150. Si può quindi immediatamente procedere al tracciamento dei poligoni colleganti tali momenti statici applicati, verticalmente ed orizzontalmente, negli antipoli dell'asse orizzontale  $z_1$  per rapporto alle solite ellissi parziali di elasticità.

Si ottengono così due deformate aventi l'andamento indicato in figura 156, le quali potranno riguardarsi come le linee d'influenza (rispettivamente per carichi verticali ed orizzontali) della componente  $Z_1$  della solita reazione sinistra, supposta riferita alla nuova coppia di assi coordinati  $z_1$  ed  $y_1$  (il primo orizzontale, il secondo diretto normalmente allo spostamento  $O'A_{z_1}$ ).

Naturalmente si dovrà adottare come unità di misura, per la lettura delle ordinate di queste linee d'influenza, il segmento  $v_1$  che in disegno rappresenta lo spostamento dell'elemento terminale nella direzione (orizzontale) della forza.

Si avrà quindi

$$Z_1 = P \frac{\eta_1''}{v_1}$$

Con ciò la  $V_A$  viene ad essere completamente definita: si sa infatti di essa, che dev'essere la risultante della  $Y$  e di una componente incognita ma diretta secondo  $z$ , e che deve nel

tempo stesso essere la risultante della  $Z_1$  e di una componente incognita ma diretta secondo  $y_1$ . La si otterrà dunque molto semplicemente conducendo per l'estremità del vettore che rappresenta la  $Y$  una parallela a  $z$ , e per l'estremità del vettore che rappresenta la  $Z_1$  una parallela ad  $y_1$ .

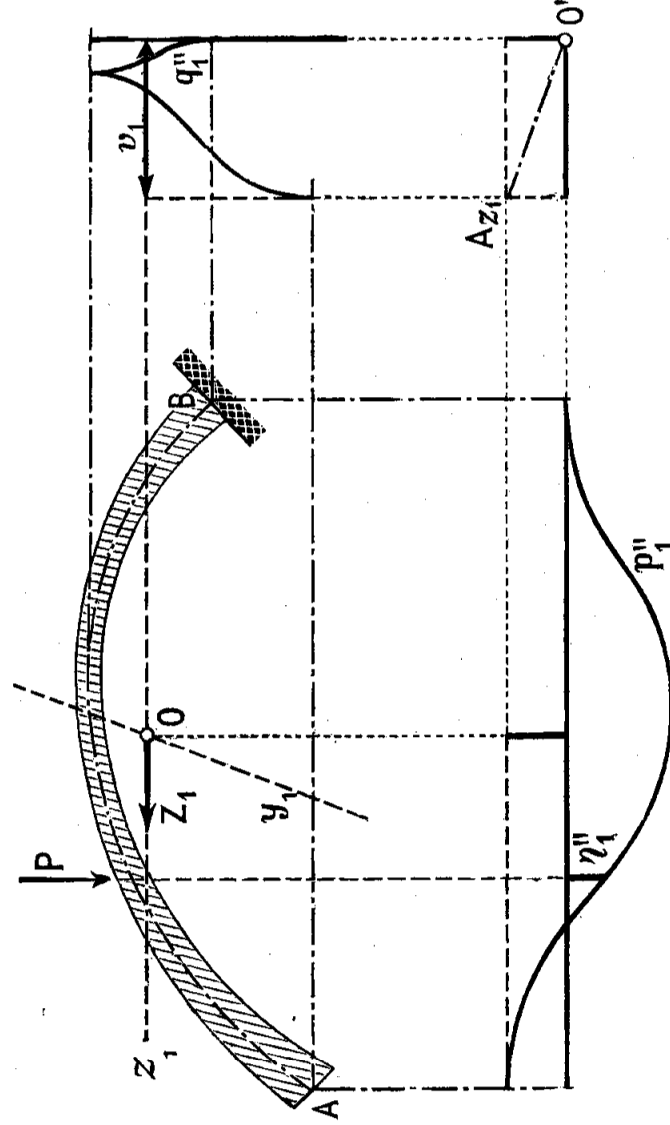


Fig. 156.

Ciò si è fatto nella figura 153 affinché risultasse più chiaramente l'identità dei risultati che si ottengono per questa via con quelli cui si perviene operando nel modo indicato prima.

Naturalmente i due procedimenti vengono a coincidere identicamente quando le due direzioni orizzontale e verticale sono coniugate rispetto all'ellisse di elasticità dell'arco: in particolare quando il sistema è simmetrico rispetto alla sua verticale di mezzo.

## APPLICAZIONE — TAVOLE XXIX, XXX, XXXI e XXXII.

\*\*

*Studio statico di un arco incastrato ad entrambi gli estremi.*

L'arco, rappresentato nelle nostre Tavole in scala 1:200, è simmetrico e vien caricato sempre e soltanto con forze verticali. Tutte le costruzioni grafiche sono perciò state limitate in conseguenza.

Su di esse poco ci resta da dire, dopo tutto quel che abbiamo detto a proposito del caso generale.

Ci limiteremo a richiamar l'attenzione del lettore sulla scelta delle distanze polari.

In realtà, da tutto quel che siamo venuti dicendo, risulta chiaro che una sola delle distanze polari è obbligata: è quella che deve servire per il tracciamento del poligono  $p$  (linea d'influenza del momento  $X$  della reazione sinistra) la quale deve sempre essere eguale al peso elastico totale dell'arco

$$\lambda = \Sigma w$$

Nulla impedisce invece che siano scelte ad arbitrio tanto la  $\lambda$  relativa al poligono  $q$ , come la  $\mu'$  relativa al poligono  $p'$ ; di questa libertà di scelta ci si vale utilmente in pratica per ottenere dei poligoni funicolari di dimensioni e proporzioni le più adatte alle esigenze del graficismo ed al conseguimento di risultati dotati di buona approssimazione.

Si può inoltre regolarsi in modo da aver da fare con un'unica unità di misura.

A tal fine, eseguito il tracciamento del poligono  $p'$  (linea di influenza della componente  $Y$ ) e determinata la lunghezza del segmento  $u$  cui le sue ordinate van riferite, si passerà al tracciamento del poligono  $q''$  assumendo per distanza polare

$$\mu'' = u$$

Si troverà così il segmento  $v$  cui dovrebbero venir riferite le ordinate del poligono  $p''$  (linea d'influenza della  $Z$ ) se questo venisse costruito colla stessa distanza polare.

Basterà allora prendere, per esso

$$\mu'' = v$$

perchè le sue ordinate risultino moltiplicate per il rapporto di  $u$  a  $v$ , o, ciò che fa poi lo stesso, perchè esse vengano ad essere rappresentate nell'unità di misura  $u$ .

Con queste avvertenze le componenti orizzontale e verticale della reazione si sono potute nelle nostre Tavole ritener rappresentate dalle ordinate stesse dei poligoni  $p'$  e  $p''$ . Di qui la costruzione grafica che delle reazioni si è fatta nella Tavola XXXII per arrivare al tracciamento della linea delle intersezioni e della linea involuppo.

\* \* \*

Tutto quel che siamo venuti dicendo a proposito degli archi si applica integralmente ed immediatamente a qualunque sistema a tre incognite iperstatiche.

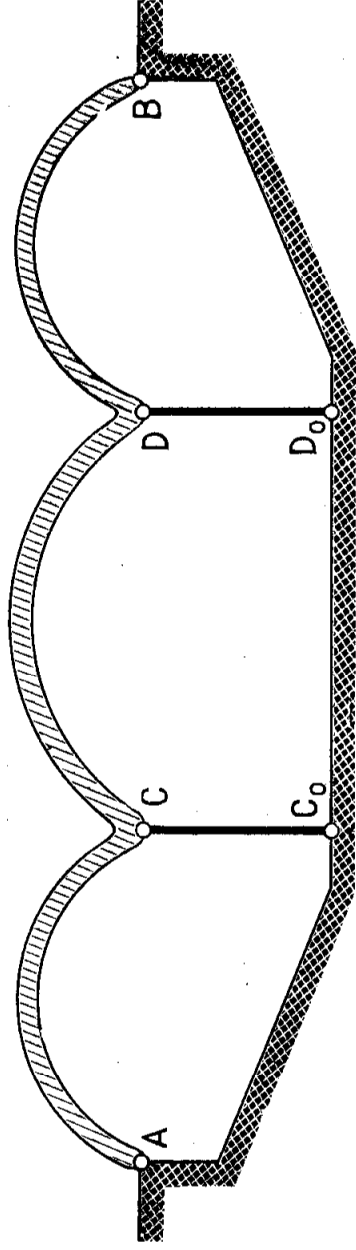


Fig. 157.

Riferiamoci, per fissar le idee, ad un esempio che ci è già familiare: alla trave ad archi rappresentata in figura 157.

Rendiamola staticamente determinata sopprimendo idealmente i due vincoli agenti in  $A$  ed in  $C$ , e consideriamo le tre incognite iperstatiche che quei due vincoli rappresentano come i tre parametri di un'unica reazione di cui è sconosciuta non soltanto la grandezza, ma anche la linea d'azione, e che si può immaginar applicata ad un qualunque sistema rigido collegato alla trave mediante quella medesima cerniera  $A$  e quella medesima asta  $C_0C$  che prima la collegavano al sistema fisso di riferimento (fig. 158).

TAVOLA XXIX

(pag. 480).

Studio statico di un arco incastrato ad entrambi gli estremi  
(Tracciamento della linea d'influenza del momento della reazione  
dell'imposta sinistra).



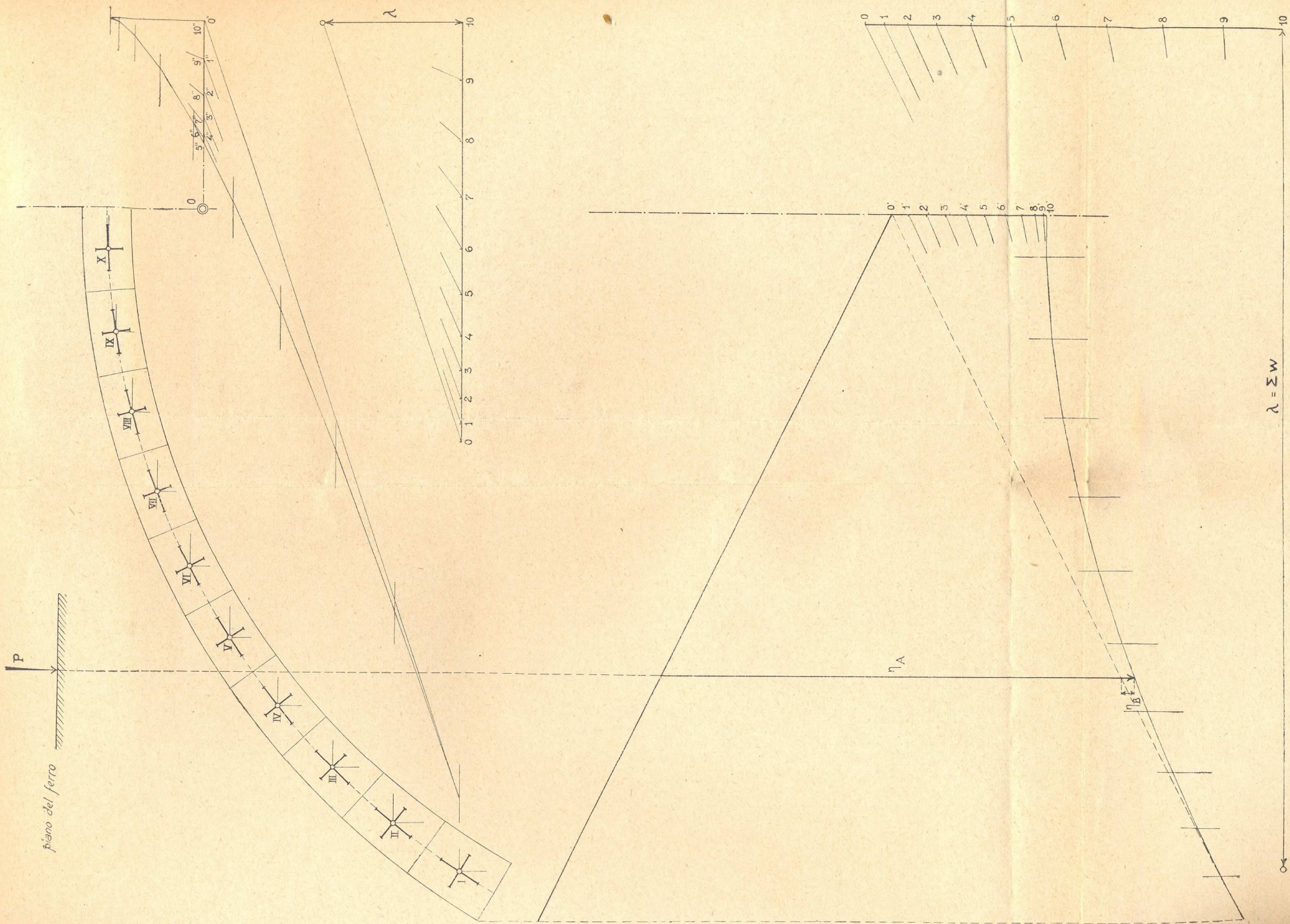


TAVOLA XXX

(pag. 480).

Studio statico di un arco incastrato ad entrambi gli estremi  
(Tracciamento della linea d'influenza della componente verticale della  
reazione dell'imposta sinistra).

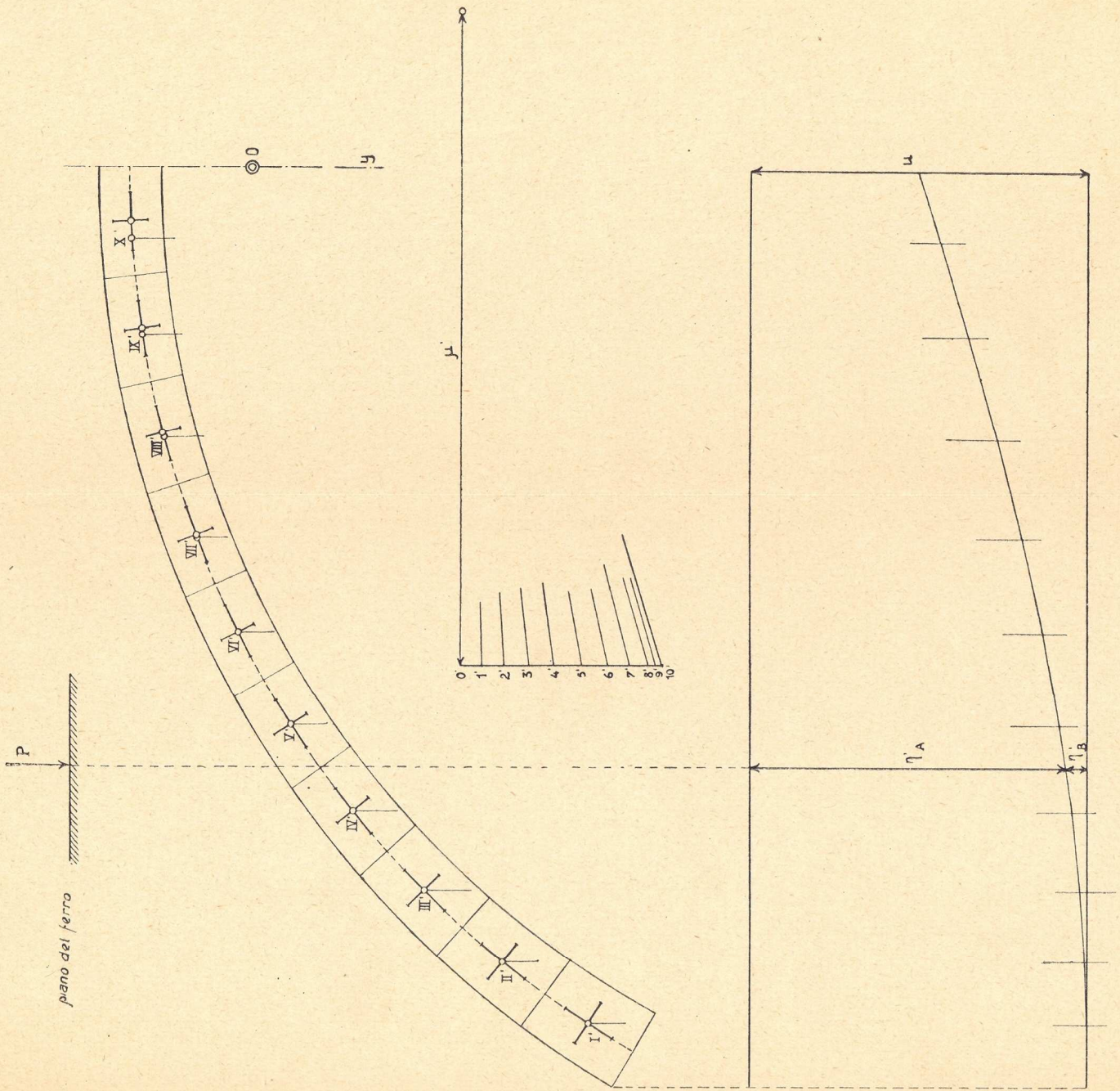


TAVOLA XXXI

(pag. 480).

Studio statico di un arco incastrato ad entrambi gli estremi  
(Tracciamento della linea d'influenza della spinta orizzontale).

piano del ferro

P

Z

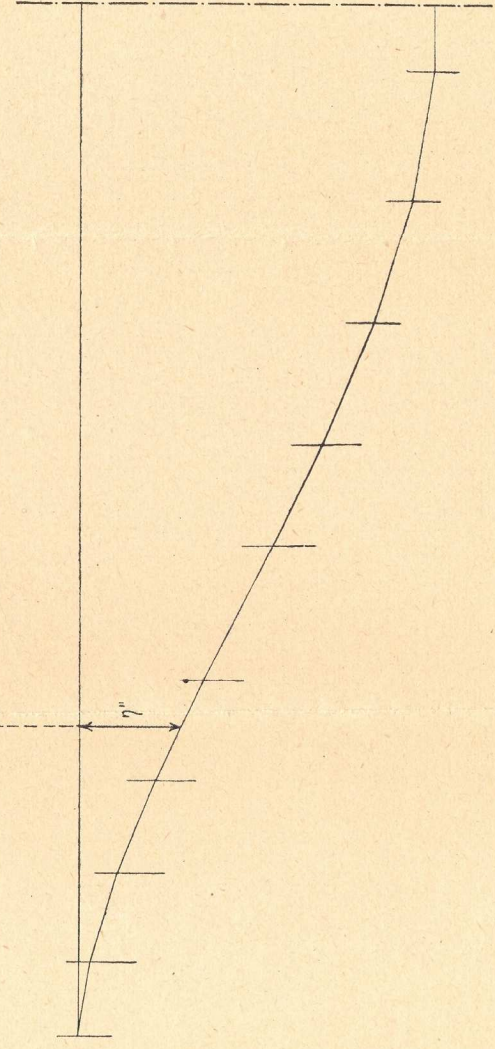
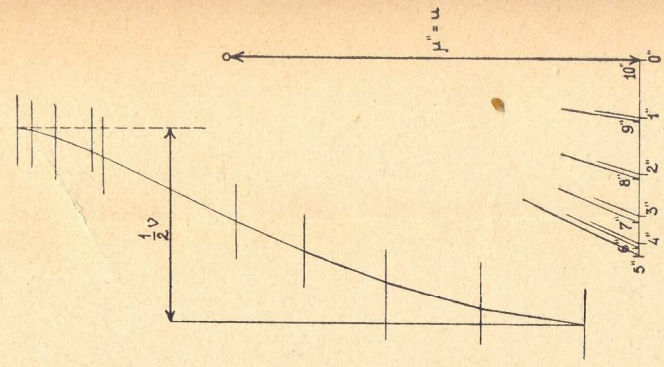
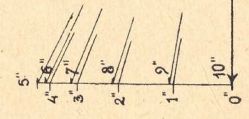
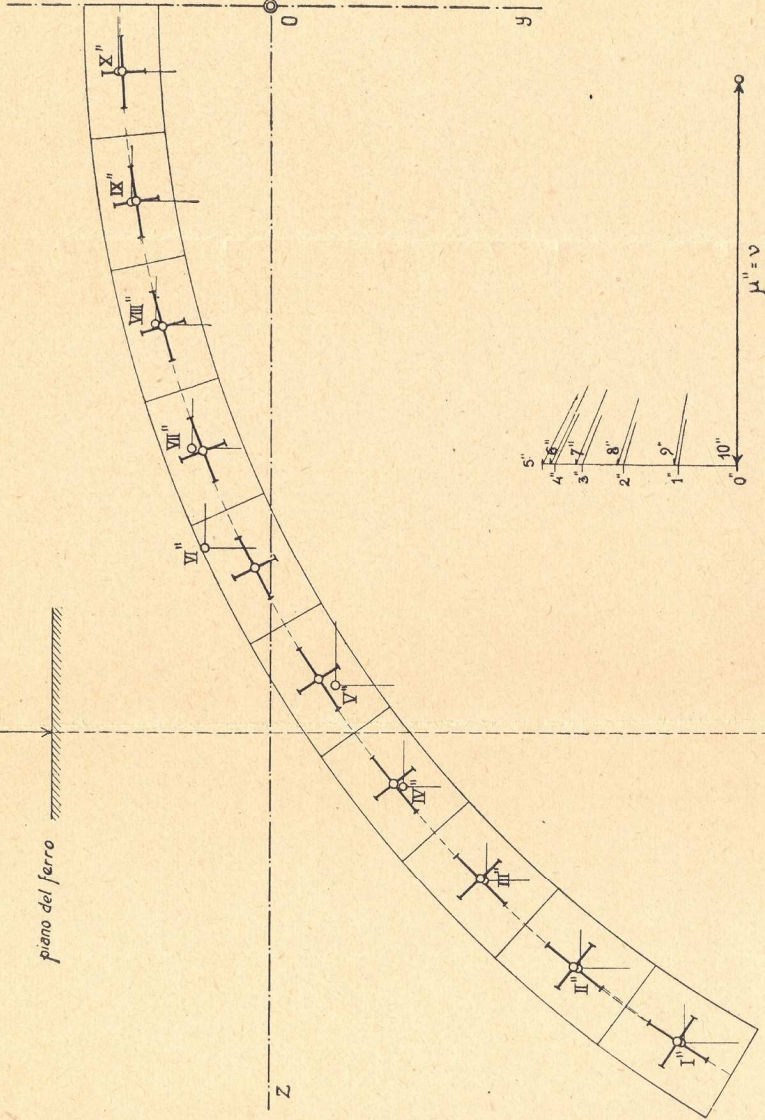
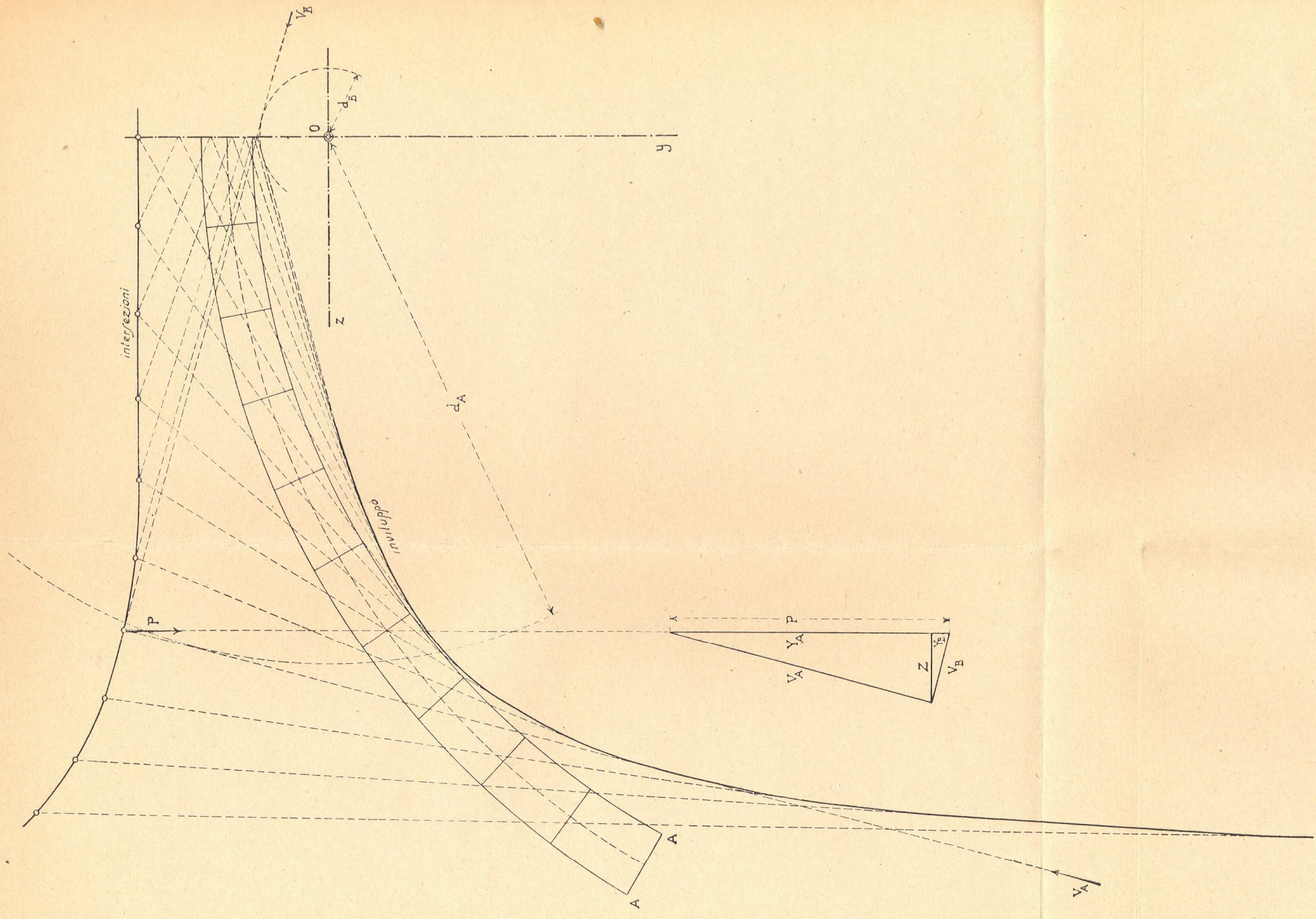


TAVOLA XXXII

(pag. 480).

Studio statico di un arco incastrato ad entrambi gli estremi  
(Tracciamento della linea delle intersezioni e della linea inviluppo della  
reazione dell'imposta sinistra).



Operando in quel modo istesso che è stato indicato per gli archi, si riuscirà subito ad esprimere questa reazione — e quindi anche le tre incognite iperstatiche che essa rappresenta — in

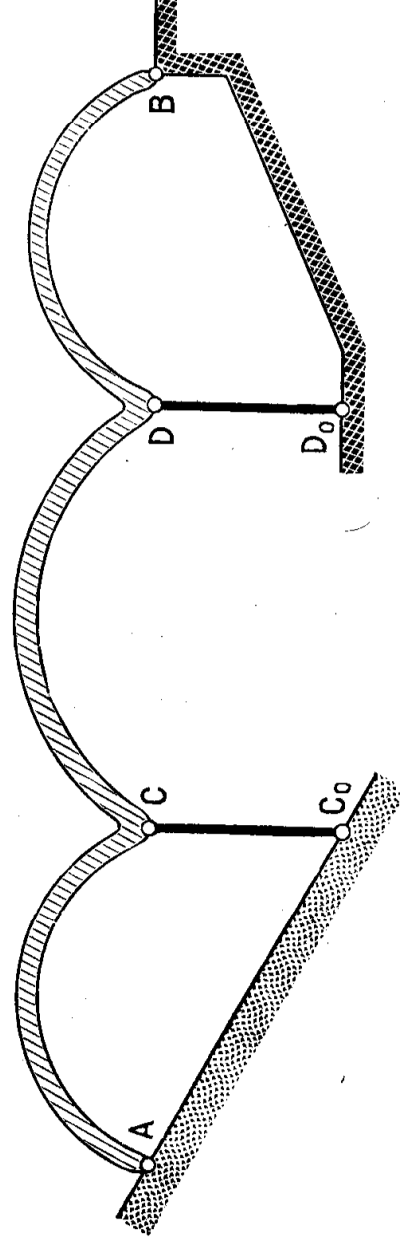


Fig. 158.

funzione di tre nuovi parametri indipendenti, le cui linee d'influenza si potranno immediatamente tracciare l'una dopo l'altra come deformate della trave resa staticamente determinata nel modo descritto e sottoposta a tre sollecitazioni elementari opportunamente scelte.

\*\*\*

V'è al solito un caso in cui il metodo sembra dover cadere in difetto: ed è quello in cui i vincoli sovrabbondanti si ridu-

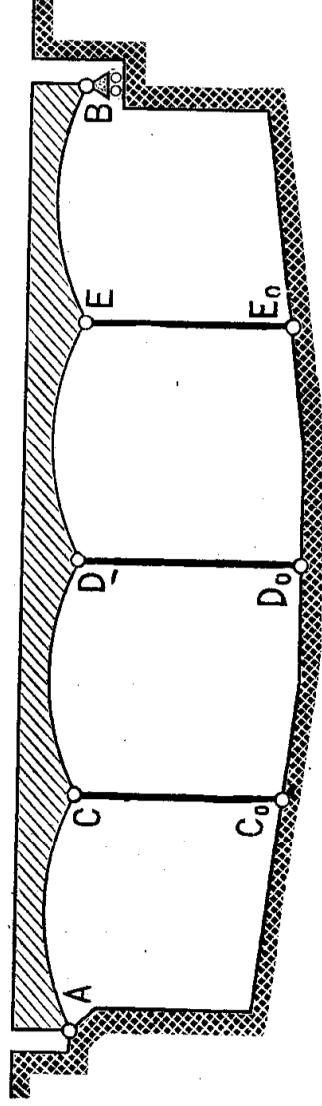


Fig. 159.

cono inevitabilmente a tre appoggi semplici, agenti nella medesima direzione: esempio tipico quello della trave continua rappresentata in figura 159.



Ma, al solito, l'eccezione è soltanto apparente; essa anzi scompare subito se, senza mutare lo stato del sistema, si riesce con qualche artificio a riportarlo in qualche modo a condizioni non particolari: sostituendo per esempio uno dei vincoli con un altro, ad esso perfettamente equivalente ma caratterizzabile con una reazione di differente direzione.

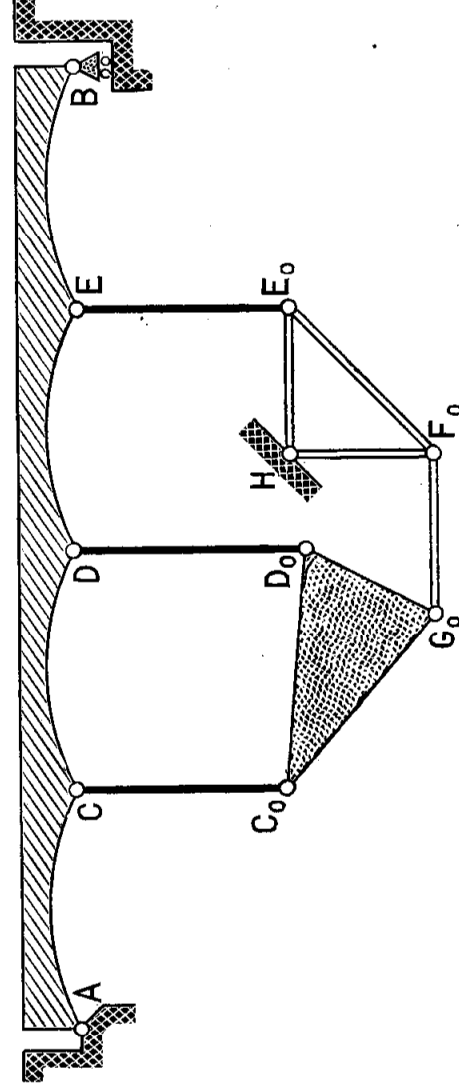


Fig. 160.

Un simile risultato si ottiene molto facilmente immaginando il sistema rigido ausiliario che deve funzionare da supporto della reazione incognita, collegato al sistema elastico dato, direttamente in  $C_0$  ed in  $D_0$ , in  $E_0$  invece indirettamente, vale a dire coll'intermediario di una squadra rigida  $E_0HF_0$  e di un tirante pure rigido  $F_0G_0$  attraverso al quale la reazione relativa al terzo appoggio intermedio si trasmette mutata di direzione non di grandezza (fig. 160).