## VI.

# Il principio di sovrapposizione degli stati di equilibrio.

Immaginiamo ora che

$$u',\ v',\ w' \quad \text{ed} \quad u'',\ v'',\ w''$$

siano le componenti dei due sistemi di spostamenti che caratterizzano le due configurazioni di equilibrio che un dato solido elastico assume sotto l'azione di due sistemi generici di forze esterne

$$F_x',\ F_y',\ \dots\ P_z' \quad \text{ed} \quad F_x'',\ F_y'',\ \dots\ P_z''$$

E consideriamo gli spostamenti

$$u = k'u' + k''u'', \qquad v = k'v' + k''v'', \qquad w = k'w' + k''w''$$

ove $k'$ e $k''$ sono due costanti arbitrarie.

Osservando che le corrispondenti componenti di deformazioni possono scriversi

$$\varepsilon_x = (\varepsilon_x)_0 + \frac{\partial u}{\partial x} = (\varepsilon_x)_0 + k'\frac{\partial u'}{\partial x} + k''\frac{\partial u''}{\partial x} =$$

$$= (\varepsilon_x)_0 + k'[\varepsilon_x' - (\varepsilon_x)_0] + k''[\varepsilon_x'' - (\varepsilon_x)_0]$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

e che in conseguenza deve aversi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right)_0 + k'\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right)' - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right)_0\right] + k''\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right)'' - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right)_0\right]$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

si può dimostrare, con un procedimento perfettamente analogo a quello che abbiamo seguìto nel capitolo precedente, che le equazioni indefinite e le equazioni ai limiti possono per la nuova deformazione ideale testè introdotta, essere ancora scritte sotto la forma (24) e (25) rispettivamente, purchè si ponga

$$F_x = k' F_x' + k'' F_x'', \quad F_y = k' F_y' + k'' F_y'', \quad F_z = k' F_z' + k'' F_z''$$
$$P_x = k' P_x' + k'' P_x'', \quad P_y = k' P_y' + k'' P_y'', \quad P_z = k' P_z' + k'' P_z''$$

con

$$\lambda = \lambda_0 + k' (\lambda' - \lambda_0) + k'' (\lambda'' - \lambda_0)$$
$$\mu = \mu_0 + k' (\mu' - \mu_0) + k'' (\mu'' - \mu_0)$$
$$\nu = \nu_0 + k' (\nu' - \nu_0) + k'' (\nu'' - \nu_0)$$

Vista la univocità della corrispondenza tra lo stato di deformazione di un corpo elastico in equilibrio ed il sistema di forze esterne ad esso applicato, e tenuto conto che le cose dette, prendendo a considerare due sole deformazioni, valgono evidentemente qualunque sia il loro numero, possiamo concludere, in modo generale che:

*Dati certi sistemi di forze esterne di componenti*

$$F_x', \; F_y', \; \ldots\ldots, \; P_z'$$
$$F_x'', \; F_y'', \; \ldots\ldots, \; P_z''$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

*i quali, applicati separatamente ad un dato corpo elastico, vi producono certi spostamenti di componenti*

$$u', \quad v', \quad w'$$
$$u'', \quad v'', \quad w''$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

*rispettivamente, nella deformazione dovuta al sistema di forze esterne che ha per componenti*

$$k' F_x' + k'' F_x'' + \ldots\ldots, \quad k' F_y' + k'' F_y'' + \ldots\ldots, \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad k' P_z' + k'' P_z'' + \ldots\ldots$$

*ove* $k', k'', \ldots,$ *sono delle costanti arbitrarie, si producono gli spostamenti di componenti*

$$k'u' + k''u'' + \ldots, \qquad k'v' + k''v'' + \ldots, \qquad k'w' + k''w'' + \ldots$$

Questo teorema, noto sotto il nome di principio della sovrapposizione degli stati di equilibrio è nella pratica della più grande utilità perchè permette spesso di scindere le varie diverse difficoltà di un problema facendone dipendere la soluzione da quella di altri problemi più semplici.

***

Come caso particolare questo teorema stabilisce la dipendenza lineare degli spostamenti dei singoli punti di un corpo elastico deformato dalla intensità delle forze deformatrici.

Così espresso esso si presta egregiamente a quella verifica sperimentale della teoria dell'elasticità a cui abbiamo alluso fin dal principio: la proporzionalità degli spostamenti alle grandezze delle forze che li hanno prodotti è infatti un fenomeno così semplice che, se vero, non può facilmente sfuggire all'attenzione dello sperimentatore.

Ed in realtà, tra tutte le caratteristiche delle deformazioni elastiche dei corpi naturali, è proprio questa che è stata sperimentalmente scoperta per la prima.

Fu Roberto Hooke, fisico inglese, che in seguito ad una serie di esperienze sul comportamento delle molle di acciaio per orologi, annunciò per la prima volta nel 1676, sotto forma di anagramma, quella legge (*ut tensio sic vis*) che doveva costituire il punto di partenza di tutte le teorie delle deformazioni elastiche.

La legge di Hooke trovò autorevole conferma nelle esperienze di molti fisici: segnatamente in quelle istituite dal Coulomb sul comportamento dei fili, e nelle ricerche di Hodgkinson e di Tresca sull'allungamento e sulla contrazione delle sbarre metalliche.

Non tardarono però a delinearsi le prime discordanze. Dapprima si trattò di corpi speciali i quali alla legge di Hooke non uniformavano che molto grossolanamente il loro comportamento: in seguito, col crescere della precisione dei mezzi sperimentali, la classe dei corpi che nel deformarsi appaiono soddisfare a quella legge andò sempre più restringendosi.

Sottoposto a studii sistematici sempre più minuziosi, il comportamento dei varii materiali si rivelò sensibilmente conforme alla legge di Hooke soltanto per sollecitazioni convenientemente limitate, la discordanza crescendo in ogni caso col crescere della sollecitazione e conseguentemente della deformazione prodotta. Anzi dalle esperienze di T. O. Thompson (1891) risulterebbe che anche per minime sollecitazioni la legge di Hooke è verificata appena approssimativamente.

Cionontpertanto questa legge restò per unanime consenso il caposaldo sperimentale della teoria dell'elasticità. Soltanto, a determinare fino a qual punto questa teoria fosse poi praticamente applicabile, si sentì la necessità di precisare quel limite a cui noi abbiamo già accennato nelle nostre " Premesse „ esaminando, in dati casi particolari, il comportamento dei corpi elastici sotto l'azione di forze di intensità gradatamente crescenti, e ricercando fino a qual punto la legge di proporzionalità apparisse verificata.

Per questa ragione quel limite ha preso il nome di *limite di proporzionalità*.

Esso non ha, nella sua ragion d'essere, nulla in comune col limite di elasticità, col quale troppo spesso viene confuso solo perchè, per certi metalli fra i più comuni, con esso coincide molto sensibilmente.

Si vede subito che entrambi questi limiti dipendono dall'ordine di grandezza degli errori sperimentali: più i mezzi di osservazione e gli strumenti di misura diverranno perfetti, più questi limiti diverranno piccoli.

Abbiamo già detto infatti a suo tempo che non esiste in natura nessun corpo perfettamente elastico: col trascurare, per sollecitazioni inferiori al limite di elasticità, le deformazioni permanenti, noi non abbiamo inteso dire che esse non esistono, ma soltanto che esse sono inferiori alle più piccole quantità che i nostri strumenti sono capaci di misurare.

Similmente noi non possiamo pretendere che il principio di sovrapposizione degli stati di equilibrio, come del resto qualunque altro teorema da noi dimostrato vero per quelle deformazioni infinitamente piccole che formano l'oggetto delle nostre ricerche, sia verificato nelle deformazioni piccole ma finite, che noi possiamo effettivamente osservare e sottoporre a misura: l'aver constatato che esiste un limite al di sotto del quale la teoria appare dall'esperienza confermata non deve tentarci a concludere che al di sotto di quel limite la teoria rappresenta rigorosamente l'andamento dei fenomeni naturali, sibbene soltanto che le divergenze fra la teoria e la realtà delle cose sono, al di sotto di quel limite, praticamente inapprezzabili perchè inferiori agli errori sperimentali.

In altri termini, e in conformità a quanto avevamo fin da principio preveduto [cfr. pag. 10], noi siamo condotti a conchiudere che il comportamento dei corpi elastici naturali si presenta tanto più vicino a quello dei corpi perfettamente elastici della teoria quanto minore è l'ampiezza delle deformazioni sulle quali si opera.

E ciò è tanto vero che, se invece di considerare delle deformazioni statiche, si prendono in esame i moti vibratorii dei corpi elastici, moti le cui caratteristiche possono essere, entro certi limiti, facilmente studiate, anche quando le deformazioni che loro corrispondono sono estremamente piccole, per mezzo degli effetti sonori che li accompagnano, l'accordo della teoria coll'esperienza *appare* assolutamente completo: già Stokes infatti citava con ragione come una prova perentoria del valore della teoria dell'elasticità la costanza del tono musicale che si ottiene eccitando in un corpo elastico delle vibrazioni di ampiezze anche molto differenti fra loro.

Se adunque per una parte la teoria non interpreta *completamente* nessuna esperienza, per altra parte tutte le esperienze mostrano concordi che, al decrescere dell'ampiezza delle deformazioni, i fenomeni che si osservano nei corpi naturali tendono ad uniformarsi alle leggi della teoria, la quale ci si presenta così con tutti i caratteri di una *teoria limite.*

***

Ma noi dobbiamo proporci la ricerca del valore della teoria dell'elasticità, del grado di approssimazione che essa consente, dei limiti del campo delle sue applicazioni, non soltanto dai varii punti di vista dai quali può mettersi il fisico, ma anche dal punto di vista dal quale deve studiare il problema l'ingegnere. Ora sotto questo aspetto, l'importanza e l'utilità della teoria che noi abbiamo abbozzata nei suoi principii fondamentali, e di cui veniamo esponendo i principali teoremi, è superiore ad ogni aspettativa.

Non è infatti da credersi che il grado di approssimazione che l'ingegnere deve chiedere ad una teoria fisica sia soltanto determinato dall'ordine di grandezza degli errori sperimentali: esso è determinato sopratutto dalle esigenze dei problemi speciali al cui studio la teoria deve essere applicata.

Ora per l'ingegnere la teoria dell'elasticità deve servire essenzialmente al calcolo delle dimensioni da attribuirsi agli organi resistenti delle costruzioni e delle macchine.

Il problema tecnico quale si presenta all'ingegnere consiste o nel determinare la forma da attribuirsi alle singole parti di un sistema resistente per ottenere la migliore utilizzazione della materia di cui son costituite, ovvero, più frequentemente, nel trovare il modo di sfruttare al massimo le proprietà resistenti dei pezzi che gli sono forniti direttamente dall'industria.

Problema in generale assai semplice quest'ultimo: mentre il primo, quasi sempre molto complesso, richiede una soluzione vera e propria soltanto in un numero assai limitato di casi sufficientemente generali perchè ad essi possano tutti gli altri essere ricondotti.

I calcoli tecnici non possono d'altronde che essere grossolani. La necessità in cui si trova il costruttore di prevedere possibili difetti nel materiale che impiega, o notevoli inevitabili imperfezioni nella sua lavorazione o nel modo stesso con cui viene messo in opera, e sopratutto il dovere che gli incombe di mettere la sua costruzione al sicuro dalle conseguenze di possibili eccezionali aumenti nelle sollecitazioni esterne (aumenti la cui entità, a volte anche ragguardevole, non gli è dato di prevedere nell'impostare i suoi calcoli), lo obbligano ad impiegare sempre una quantità di materiale resistente superiore di molto a quella richiesta dalla teoria. Coll'introdurre nelle sue formole, i cosidetti *coefficienti di sicurezza* egli viene a calcolare le sue costruzioni come se esse dovessero resistere a carichi assai più grandi di quelli che effettivamente egli pensa di realizzare.

Perciò non interessa in generale all'ingegnere il conoscere le condizioni statiche della sua costruzione ad ogni istante e corrispondentemente ad ogni condizione di carico: gli basta quasi sempre assicurarsi che il massimo cimento a cui il materiale può effettivamente venire assoggettato non giunga mai a mettere in pericolo la solidità della costruzione.

Adoperata in questo senso la teoria dell'elasticità si presta egregiamente, anzi nel migliore dei modi possibili, ai fini dell'ingegnere, in quanto che lo conduce a metodi di calcolo relativamente semplici nei quali la precisione poco importa che sia impossibile, dal momento che sarebbe assolutamente inutile.

***

Ciò non ostante è opportuno che noi cerchiamo ancora di renderci ragione del perchè la teoria dell'elasticità sia soltanto una teoria limite. Se infatti essa fosse tale solo perchè i parametri della deformazione vengono in essa trattati come infinitesimi, si potrebbe pensare alla possibilità di sostituirle con qualche vantaggio una diversa teoria la quale, tenendo conto di eventuali termini di grado superiore, giungesse, sia pure a prezzo di una maggior complicazione nelle formole, a rappresentare con maggiore approssimazione i fatti reali.

Orbene, anche prescindendo dal fatto che per rappresentare una deformazione finita non basterebbe affatto limitarsi a prendere in considerazione certi termini da noi trascurati come infinitesimi, ma occorrerebbe abbandonare tutto il meccanismo analitico della teoria classica, liberandosi addirittura da tutto ciò che ne costituisce l'intima essenza [pag. 35], è facile convincersi che un tal lavoro risulterebbe privo di ogni reale interesse qualora non si tenessero nel debito conto certi altri fenomeni che quasi sempre accompagnano le deformazioni elastiche che non sono piccolissime: fenomeni i quali fanno sì che la corrispondenza tra forze esterne e stato di deformazione del sistema perde, in pratica, quel carattere di biunivocità che, essenziale per la teoria classica, non potrebbe non esserlo per qualunque altra teoria che mirasse a qualche pratico scopo.

È infatti notissimo a tutti gli sperimentatori che la durata dell'azione delle forze esterne ha una influenza sovente essenziale sulle deformazioni dei corpi naturali.

La variazione col tempo dello stato di deformazione prodotto in un corpo dall'azione di un dato sistema di forze esterne, venne rilevata per la prima volta da W. Weber il quale ha osservato, fin dal 1835, il fenomeno seguente: un filo di seta sotto l'azione di un peso anche moderato si allunga immediatamente di una certa quantità, poi l'allungamento continua ad aumentare in modo lento ma sensibile per molte ore; se si toglie il peso, il filo si accorcia immediatamente senza però arrivare a riprendere la sua lunghezza primitiva: lunghezza che esso tende a riprendere soltanto dopo un certo tempo; in altri termini il fenomeno dell'accorciamento, dapprima rapido, non cessa subito ma prosegue sempre più lentamente mantenendosi ancora visibile dopo parecchi giorni. Questo fatto chiamato da Weber *elastische Nachwirkung* venne ripreso in esame nel 1863 da F. Kohlrausch il quale sperimentò sottoponendo a torsione dei fili sottilissimi di vetro.

Tanto sperimentando sul vetro come su certi metalli speciali, egli trovò che un filo abbandonato a se stesso dopo una torsione un po' prolungata in un certo senso, non ritorna immediatamente al suo stato iniziale, l'angolo di torsione diminuendo progressivamente col tempo.

Se, durante questo periodo di elasticità ritardata, si assoggetta il filo per qualche istante ad una piccola torsione in senso contrario e lo si abbandona poi nuovamente a se stesso, il *nuovo* angolo di torsione si annulla assai rapidamente ed il filo si ritorce spontaneamente di un certo angolo nel senso della deformazione primitiva, per riprendere poi a poco a poco il suo lentissimo moto di ritorno verso lo stato iniziale.

Questa ricomparsa della prima deformazione non ancora totalmente annullata venne riconosciuta anche da numerosi altri sperimentatori. Essi hanno potuto constatare che il fenomeno della elasticità ritardata, particolarmente evidente nel comportamento del vetro, del piombo e di pochi altri corpi, è appena sensibile per la maggior parte dei metalli: il che non impedì ad Austen di sottoporlo ad accurato esame e di misurarlo, nel caso dell'argento, del rame e dell'ottone, tanto bene da poterne apprezzare le variazioni di intensità dipendenti dalle variazioni di temperatura.

Recentemente i proff. Cantone (1893-1898) e Bouasse (1897-1904) hanno studiato un altro fenomeno, di natura anche più complessa, che era stato già avvertito dal Wiedemann (1858), e che, poco propriamente, si usa chiamare *isteresi elastica.*

Le esperienze dimostrano concordi che se si fa variare in modo continuo la forza deformatrice, dapprima crescendo progressivamente da zero fino ad un certo valor massimo, e decrescendo poi nuovamente fino a zero, per valori eguali di essa, la deformazione si mantiene sempre, nel periodo di decremento, un po' maggiore che durante l'incremento della forza.

Più generalmente si può dire che al variare della sollecitazione esterna tra un valor minimo ed un valor massimo comunque scelti, e tra questo massimo e lo stesso minimo, la curva che rappresenta la legge di variazione della deformazione in funzione della detta sollecitazione consta di due rami ben distinti, uno dei quali corrisponde ai valori crescenti, l'altro ai valori decrescenti; se si ripete successivamente un numero sufficiente di volte questa esperienza, si trova non di rado (per es. pel nickel, pel rame, per l'alluminio, e per molti altri metalli) che la curva rappresentativa tende verso una forma limite o *ciclo* chiuso [1], il quale racchiude una certa porzione di piano, la cui area rappresenta, come è facile riconoscere, quella parte del lavoro speso durante la deformazione del corpo, che non viene da questo restituita quando la deformazione stessa sparisce.

Ma se si viene accidentalmente ad oltrepassare uno qualunque dei due valori limiti sopra scelti per la sollecitazione, il punto rappresentativo del fenomeno esce dal ciclo suddetto per descrivere una curva nuova la quale tenderà, ove ne sia il caso, ad un nuovo ciclo limite, in generale diverso dal primo.

Se si tiene conto che non mancano poi altri materiali (piombo, ecc.) pei quali non si verifica neppure la suddescritta accomodazione dei cicli, si può concludere che lo stato di deformazione di un corpo deve, a rigore, considerarsi funzione non soltanto del sistema di forze a cui esso è *attualmente* soggetto, ma altresì di tutti quei sistemi di forze a cui il corpo stesso è stato assoggettato in precedenza.

Non ci è possibile soffermarci qui sui tentativi che in questi ultimi anni si son fatti nell'intento di stabilire le basi di una

---

[1] Di alcune proprietà caratteristiche dei *cicli di isteresi elastica* si trovano notizie dettagliate anche in alcune mie note, di indole sperimentale, intitolate: “*Esperienze sulla elasticità a trazione del rame*” [Rendic. della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXIII, 1° sem., 1914] e “*Nuove esperienze sulla elasticità del rame*” [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXIV, 2° sem., 1915].

teoria matematica dell'isteresi elastica (1): ci basta l'averne accennata la possibilità, nonchè la connessione colle più moderne vedute sperimentali.

Ci basta sopratutto l'aver fatto intravedere quanto complesso si presenti il problema delle deformazioni dei corpi a chi voglia in qualunque modo raggiungere un grado di approssimazione più elevato di quello consentito dalla teoria classica: la quale, sotto questo punto di vista, si presenta come dotata di un'importanza ben diversa, ma non meno reale, di quella che le è stata per tanto tempo attribuita in passato: essa è nè più nè meno di una teoria limite, ma è un limite eccezionalmente prezioso perchè determina il minimo di complessità dei fenomeni naturali.

---

(1) Questa teoria fa capo al concetto di *funzioni di linee*, introdotto fin dal 1887 dal Volterra in una sua Nota intitolata " *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni* " [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. III, 2° sem., 1887] e da lui stesso più tardi sviluppato ed applicato a svariati problemi di Analisi, di Meccanica, e di Fisica matematica [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XVIII e seguenti]. Da questa geniale idea del Volterra si può dire che abbiano avuto origine quasi tutti i numerosi lavori sulle equazioni integrali, sulle integro differenziali e sui complessi fenomeni della cosidetta *Meccanica ereditaria*. Il lettore desideroso di approfondire l'argomento leggerà con interesse il volume intitolato " *Leçons sur les fonctions de lignes* " [Paris, 1913] in cui il Volterra ha raccolte le brillanti conferenze da lui tenute su questo soggetto alla Sorbona nei primi mesi del 1912.