

Analisi dello stato naturale.

Fin da quando ci si è, per la prima volta, presentata l'occasione di definire lo *stato naturale* di un solido elastico (pag. 29) noi abbiamo esplicitamente avvertito come, pur essendo il solido libero da ogni qualsiasi forza esterna, possa accadere che — sia per effetto dei vincoli a cui esso è soggetto, sia anche soltanto in causa della connessione esistente fra le varie sue parti — queste si trovino in uno stato di mutua costrizione, o *coazione*, che non si elimina fino a che il corpo non viene sciolto da quei vincoli, o modificato nel suo stato di connessione mediante uno o più tagli, o addirittura sconnesso in un numero conveniente di parti indipendenti.

In quella occasione non abbiamo mancato di rilevare come l'espressione generale dell'energia potenziale elastica venga in conseguenza a dipendere non solo dalle deformazioni determinate nel solido dalle forze esterne esplicitamente applicate, ma anche da quelle eventualmente preesistenti nel suo stato naturale.

Ed abbiamo dimostrato in qual modo i due fenomeni si sovrappongano, per dir così, l'uno all'altro, nel senso che l'energia elastica si presenta nel caso generale come la somma di due termini essenzialmente distinti: l'uno funzione soltanto dello stato di coazione iniziale, l'altro indipendente affatto da esso, e dipendente solo dalla variazione di stato che il solido subisce nel suo passaggio dallo stato naturale allo stato generico di deformazione preso in esame.

Abbiamo finalmente constatato come questa sola seconda parte dell'energia elastica — lavoro di deformazione, funzione soltanto delle forze applicate — venga restituita dal solido, sotto forma di lavoro esterno, quando, pel cessare dell'azione delle forze, la deformazione si annulla, ed il solido ritorna nel suo stato naturale.

La prima invece non può mai essere restituita in libertà, se non distruggendo nel modo che dianzi si è detto la compagine stessa del solido. Donde il nome di *energia vincolata* con cui l'abbiamo senz'altro designata.

In seguito abbiamo poi avute poche occasioni di occuparci di essa. Sovente anzi abbiamo esplicitamente convenuto di prescindere da essa, supponendo noto lo stato naturale, per limitare il nostro studio agli stati di deformazione e di tensione che ad esso si sovrappongono all'agire delle forze esterne.

Ma prima di chiudere la nostra esposizione dei principii fondamentali della statica dei solidi elastici è indispensabile che noi — ritornando in certo qual senso sui nostri passi — riprendiamo di proposito in esame il problema dell'equilibrio nello stato naturale, ed indichiamo, sia pur soltanto per sommi capi, in qual modo esso possa essere posto, in qual modo possa venire trattato e risolto.

* * *

Il primo accenno alla possibilità che un corpo elastico presenti delle tensioni interne, pur non essendo sottoposto a forze esterne, è dovuto al Weingarten, il quale citava, a titolo di esempio, il caso di un anello non del tutto chiuso di cui si siano avvicinate le due sezioni piane libere, attaccandole l'una all'altra con uno strato infinitamente sottile atto a saldarle insieme.

Questo esempio del Weingarten, raccolto e discusso sotto ogni più interessante aspetto dal Volterra, ha dato origine a quella teoria delle distorsioni, delle cui importanti applicazioni noi abbiamo già avuto occasione di far cenno.

Più tardi il Somigliana mise in luce l'opportunità di conferire una maggiore generalità a quelle ricerche, estendendo il concetto e il nome di distorsione a tutti quegli stati di equilibrio elastico che si stabiliscono in assenza di ogni qualsiasi forza esterna, e che si possono pensar generati praticando nel solido che si considera un taglio di forma e posizione affatto arbitraria, imprimendo ai singoli elementi delle due faccie del taglio degli spostamenti relativi piccolissimi, e risaldando poi tra loro tali due faccie, dopo di avere naturalmente riempiti con nuovo materiale gli spazi vuoti che nello spostamento si fossero prodotti, ed asportata una conveniente porzione di materia là dove lo

spostamento stesso tendesse invece a determinare sovrapposizione di parti.

È però facile convincersi che l'artificio dei tagli e delle successive risaldature delle loro faccie spostate non è affatto sufficiente per giustificare tutti i sistemi di tensioni interne che l'esperienza quotidiana ci rivela possibili nei solidi elastici. in equilibrio in assenza di forze esterne.

A prova di ciò si possono segnalare, come particolarmente interessanti, certi fenomeni che sono ben noti ai tecnici, ma che, malgrado qualche tentativo isolato di trattazione, non hanno ancor trovato il loro posto nella teoria matematica dell'elasticità.

Ecco un esempio tra i più caratteristici: un pezzo di acciaio riscaldato a temperatura sufficientemente elevata viene improvvisamente portato a contatto di corpi freddi. L'improvviso e disuguale raffreddamento delle varie sue parti produce allora una contrazione di volume diversa da punto a punto. Le parti del pezzo che si raffreddano più rapidamente acquistano in breve tempo una consistenza maggiore, la quale non permette poi loro di seguire senza reazione i fenomeni di ritiro che si determinano nelle altre parti del pezzo man mano che queste vanno alla loro volta raffreddandosi.

Tutto ciò è comprovato da una quantità di fatti che si verificano regolarmente nelle operazioni di tempra degli acciai, quali la diminuzione di densità dei pezzi temprati (tanto maggiore quanto più grande è stata la velocità di raffreddamento) ed i cambiamenti di forma che nei pezzi stessi si osservano in dipendenza da ogni difetto di uniformità nel processo di raffreddamento.

Quanto alle tensioni interne che si vengono così a creare nel pezzo temprato è assai difficile metterle in evidenza direttamente: si può però considerare come una prova della loro esistenza la facilità con cui nei pezzi di acciaio temprati si verificano delle rotture improvvise ed impreviste, a volte sotto l'azione di sollecitazioni che per se stesse sarebbero assolutamente insufficienti a vincere la resistenza propria del materiale, a volte anche senza nessuna causa apprezzabile. È poi notevole che questa specie di fragilità caratteristica dei pezzi temprati scompare (insieme, del resto, con la diminuzione di densità a cui si è dianzi accennato) se alla tempra si fa seguire una opportuna ricottura con successivo raffreddamento abbastanza lento perchè si possa ritenere praticamente uniforme.

Fatti assolutamente analoghi si verificano nella fusione dei pezzi in ghisa, nella presa dei getti in calcestruzzo, nella fabbricazione del vetro, ecc.

Il caso del vetro è particolarmente interessante, almeno dal punto di vista sperimentale, perchè in esso, come ben sappiamo, le tensioni interne possono venir messe in evidenza, e anche in certi casi misurate, per mezzo della doppia rifrazione accidentale che le accompagna. Ora sta il fatto che qualunque pezzo di vetro rivela in generale, all'esame colla luce polarizzata, la presenza di tensioni interne distribuite nei modi più complicati: tensioni le quali non si eliminano completamente se non dopo un'accuratissima ricottura ed un raffreddamento lentissimo in un ambiente mantenuto a temperatura quanto più possibile uniforme.

* * *

Ciò posto è facile rendersi conto della impossibilità di giustificare come distorsioni tutti questi stati di coazione elastica: riesce infatti in primo luogo evidente che la loro presenza non è in alcun modo in relazione col grado di connessione dello spazio occupato dal solido, come dovrebbe accadere se si trattasse di distorsioni di Volterra; e per altra parte non si vede, almeno esaminando la questione dal punto di vista fisico, la necessità di superficie di discontinuità del tipo di quelle che il Somigliana ha incontrate nello studio delle distorsioni dei solidi semplicemente connessi.

L'impossibilità dipende però soltanto dal presupposto — essenziale in tutta la teoria delle distorsioni — che, una volta operati quei certi tagli lungo superficie opportunamente scelte caso per caso, lo stato di tensione si possa sempre generare mediante una ordinaria deformazione elastica, determinata dagli spostamenti relativi impressi alle faccie dei singoli tagli.

Questo presupposto, se per una parte è giustificato dal vantaggio di ricondurre i nuovi problemi a termini il meno diversi che sia possibile da quelli caratteristici della teoria classica dell'elasticità, può d'altra parte esser la causa di una limitazione del campo delle nostre ricerche.

Perchè infatti il descritto modo di generazione dello stato di tensione interna sia applicabile, occorre ovviamente che le

deformazioni elastiche dei singoli elementi che costituiscono il solido derivino da un unico sistema di spostamenti *generalmente* continuo, il quale cioè non implichi soluzioni di continuità nè sovrapposizioni di materia se non in corrispondenza di quelle particolari superficie lungo le quali si intendono praticati i tagli. Ed è noto che questo concetto si traduce analiticamente nella condizione che le sei componenti della deformazione soddisfino ad una certa sestupla di equazioni alle derivate seconde (7) ed (8) che noi abbiamo chiamate equazioni di congruenza, in tutti i punti del solido, eccezion fatta al più per quelli che appartengono alle particolari superficie sopra ricordate.

Ora, è questa condizione fisicamente necessaria? Evidentemente no, e noi lo abbiamo già chiaramente avvertito a pag. 19.

Abbiamo infatti detto allora che, se noi ci limitiamo a considerare l'intorno di un punto generico del solido come isolato ed indipendente dal resto, nulla ci impedisce di assumere un sistema comunque arbitrario di valori delle componenti della deformazione elastica per rappresentare uno stato effettivamente realizzabile della particella considerata.

E se prescindiamo dal modo di generare la deformazione, nulla ci impedisce di pensare il solido costituito da tanti elementi, deformati come ora si è detto nel modo più generale, i quali si mantengano in un tale stato di coazione elastica per virtù della loro mutua connessione, per modo che non possano restituirsi tutti insieme al loro rispettivo stato naturale non deformato se non vengono prima distrutti i vincoli che a ciascuno di essi sono imposti dalla presenza di tutti gli altri.

* * *

Vi sono, del resto, dei casi in cui il meccanismo di generazione di una siffatta deformazione è fisicamente ben definito e si presta anche ad essere analiticamente precisato in modo semplice e chiaro.

Sono quelli che traggono origine da variazioni non uniformi della temperatura.

È infatti evidente che, se si fa variare la temperatura da punto a punto di un solido elastico omogeneo, gli elementi portati a temperatura più elevata tendono a dilatarsi più degli altri: ma tale loro dilatazione si potrebbe effettivamente realizzare

nella sua interezza solo quando essi elementi fossero perfettamente liberi ed indipendenti gli uni dagli altri: la presenza accanto a ciascuno di essi degli elementi attigui, mantenuti a temperatura più bassa, ostacola in realtà la dilatazione dei primi e fa sì che essa si realizzi solo parzialmente: l'azione mutua che nasce dalla non distrutta continuità e connessione del sistema, determina negli uni e negli altri uno stato di deformazione evidentemente rientrante nella categoria delle coazioni.

Ora si può pensar di definire un simile stato deformato del solido elastico mediante due ben distinte operazioni successive. Nella prima delle quali i singoli elementi del solido sono da immaginarsi come idealmente isolati fra loro, e le variazioni di temperatura producono in essi, senza impedimenti di sorta, le corrispondenti dilatazioni (funzioni ben definite di quelle variazioni) determinando naturalmente distacchi ideali ed ideali sovrapposizioni di parti. Nella seconda operazione, poi, le faccie corrispondenti degli elementi attigui vengono riportate a coincidere mediante una nuova deformazione, esclusivamente elastica, degli elementi stessi: e questa deformazione — insieme collo stato di tensione che necessariamente l'accompagna e la giustifica — è da riguardarsi come completamente definita pel fatto che essa deve ripristinare la distrutta continuità e connessione del solido.

Volendo generalizzare, si può pensare di generare uno stato di coazione elastica del tipo più generale in un solido elastico occupante un certo spazio connesso V e limitato da una superficie, o da un complesso di superficie S , immaginando impresse idealmente ai singoli elementi che lo compongono certe deformazioni affatto arbitrarie che definiremo dandone al solito le sei componenti

$$e_x, \quad e_y, \quad e_z, \quad g_{yz}, \quad g_{zx}, \quad g_{xy}$$

e tenendo conto che, in realtà, poichè la compagine del sistema deve mantenersi inalterata, i singoli elementi reagiranno mutuamente dando origine ad una distribuzione ben determinata di tensioni, le cui componenti speciali — incognite del problema che ci accingiamo a risolvere — denoteremo con

$$(\sigma_x)_0, (\sigma_y)_0, (\sigma_z)_0, (\tau_{yz})_0, (\tau_{zx})_0, (\tau_{xy})_0$$

Detta

$$\varphi_0 = \varphi \left((\sigma_x)_0, (\sigma_y)_0, (\sigma_z)_0, (\tau_{yz})_0, (\tau_{zx})_0, (\tau_{xy})_0 \right)$$

l'energia potenziale elastica elementare, e quindi

$$(\varepsilon_x)_0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_x} \right)_0 \quad (\varepsilon_y)_0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_y} \right)_0 \quad (\varepsilon_z)_0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_z} \right)_0$$

$$(\gamma_{yz})_0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{yz}} \right)_0 \quad (\gamma_{zx})_0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{zx}} \right)_0 \quad (\gamma_{xy})_0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xy}} \right)_0$$

le componenti della deformazione *elastica* che in ciascun elemento accompagna le predette tensioni, sovrapponendosi alla deformazione *impressa*, dovrà sempre aversi

$$\left. \begin{aligned} e_x + (\varepsilon_x)_0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} & e_y + (\varepsilon_y)_0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} & e_z + (\varepsilon_z)_0 &= \frac{\partial w_0}{\partial z} \\ \gamma_{yz} + (\gamma_{yz})_0 &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial z} & \gamma_{zx} + (\gamma_{zx})_0 &= \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{xy} + (\gamma_{xy})_0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

u_0, v_0, w_0 essendo le solite tre funzioni delle coordinate che convien supporre, al solito, continue, uniformi e piccolissime rispetto alle dimensioni del solido, e dotate di derivate parziali prime alla lor volta continue, uniformi e piccolissime a fronte dell'unità.

Queste tre funzioni si possono ovviamente interpretare come le tre componenti degli spostamenti con cui si passa da una configurazione iniziale, precedente ad ogni deformazione impressa, alla configurazione attuale — stato naturale — del sistema.

* * *

Ma ritorniamo, per fissar le idee, al caso concreto in cui la deformazione impressa è una dilatazione termica: e riferiamoci anzi ad un caso particolare ben definito.

Consideriamo, per esempio, una trave omogenea, isotropa, prismatica, a sezione rettangolare (di lati h e k), e di lunghezza molto grande a fronte delle dimensioni trasversali, sicchè si possa sempre, nello studio del comportamento di un tronco ge-

nerico di essa, trascurare l'influenza dei tronchi di estremità, epperò trattare il problema come se la trave fosse di lunghezza indefinita.

Immaginiamo che nessuna forza esterna agisca su di essa, nè che alcun vincolo le sia imposto, ma che una delle sue faccie longitudinali (quella, per es., di larghezza k che supporremo, tanto per fissar le idee, parallela al piano coordinato zx) si trovi a contatto di una sorgente costante ed uniforme di calore.

In capo ad un certo tempo, più o meno lungo, per effetto della conduzione entro il materiale di cui la trave è costituita, e della dispersione attraverso le tre faccie libere, si stabilirà nella trave un regime termico accompagnato, in generale, da un ben determinato stato di coazione elastica.

Detta \mathfrak{k} la temperatura di un elemento generico di volume — misurata a partire da un'origine delle temperature che viene supporre senz'altro coincidente colla temperatura iniziale — e detto α il coefficiente di dilatazione termica del materiale, le sei componenti della deformazione impressa sono

$$e_x = e_y = e_z = \alpha \mathfrak{k}$$

$$g_{yz} = g_{zx} = g_{xy} = 0$$

Se si ammette che \mathfrak{k} dipenda soltanto dalla distanza dell'elemento generico di volume dalla faccia del prisma che si trova a contatto della sorgente di calore — ciò che non è assolutamente vero, ma è tanto più prossimo al vero quanto più piccola è la larghezza della faccia riscaldata per rapporto a quella delle due faccie attigue — lo stato di coazione viene necessariamente a dover soddisfare a tali vincoli di simmetria per cui, delle sei componenti della deformazione elastica, le tre prime soltanto possono assumere valori non nulli; tra esse d'altronde debbono sussistere le relazioni generali caratteristiche del problema di Saint-Venant [pag. 101]; in conclusione si deve avere

$$(\varepsilon_x)_0 = (\varepsilon_y)_0 = -\frac{1}{m} (\varepsilon_z)_0$$

$$(\gamma_{yz})_0 = (\gamma_{zx})_0 = (\gamma_{xy})_0 = 0$$

Delle sei componenti speciali di tensione, l'unica non nulla è la

$$(\sigma_z)_0 = E (\varepsilon_z)_0.$$

D'altra parte l'ipotesi della conservazione delle sezioni piane, che è inderogabile conseguenza della uniformità e della simmetria del fenomeno, vale a dire della indipendenza delle sue caratteristiche dalla z , richiede che si abbia

$$e_z + (\varepsilon_z)_0 = a + by \quad (122)$$

con a e b costanti.

Si può quindi immediatamente calcolare l'energia potenziale elastica, la quale, per un elemento generico di volume, varrà

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \overline{E} (\sigma_z)_0^2 = \frac{E}{2} (\varepsilon_z)_0^2$$

e per un tronco di lunghezza l

$$\Phi_0 = \int_V \varphi_0 dV = \int_V \frac{E}{2} (\varepsilon_z)_0^2 dV = \frac{E}{2} kl \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\varepsilon_z)_0^2 dy$$

Ma noi sappiamo bene che questa energia — *energia vincolata* — deve essere minima per rapporto a tutte le variazioni di configurazione *possibili e piccolissime*. Tra queste noi prendremo in considerazione quelle sole per cui l'ipotesi della conservazione delle sezioni piane risulta rispettata. Per esse

$$\delta (\varepsilon_z)_0 = a' + b'y$$

con a' e b' pure costanti; inoltre, a meno di infinitesimi di ordine superiore

$$\delta (\varepsilon_z)_0^2 = 2 (\varepsilon_z)_0 \cdot \delta (\varepsilon_z)_0$$

Sostituendo si trova, condizione *necessaria* per l'equilibrio, la seguente

$$\delta \Phi_0 = \frac{E}{2} kl \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} 2 (\varepsilon_z)_0 (a' + b'y) dy = 0$$

che — fatte le riduzioni ovvie, e tenuto conto che le costanti a' e b' sono affatto arbitrarie, che cioè l'equazione deve risultar verificata qualunque valore si attribuisca ad esse — si scinde subito nelle due

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\varepsilon_z)_0 dy = 0 \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\varepsilon_z)_0 y dy = 0 \quad (123)$$

È facile convincersi che queste condizioni sono anche *sufficienti* per la determinazione della deformazione elastica, data che sia la deformazione impressa. Dalla (122) si ha infatti

$$(\varepsilon_z)_0 = a + by - e_z$$

Sostituendo, dalla prima delle (123) si ricava

$$a = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} e_z dy$$

e dalla seconda

$$b = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} e_z y dy$$

Basta dunque conoscere ϵ e quindi e_z in funzione della y per potere immediatamente esprimere, in funzione della stessa variabile, tanto $(\varepsilon_z)_0$ che $(\sigma_z)_0$, per potere cioè completamente caratterizzare lo stato di coazione.

**

Supponiamo nota la legge di variazione della temperatura ϵ in funzione della y ; supponiamo per esempio che la temperatura

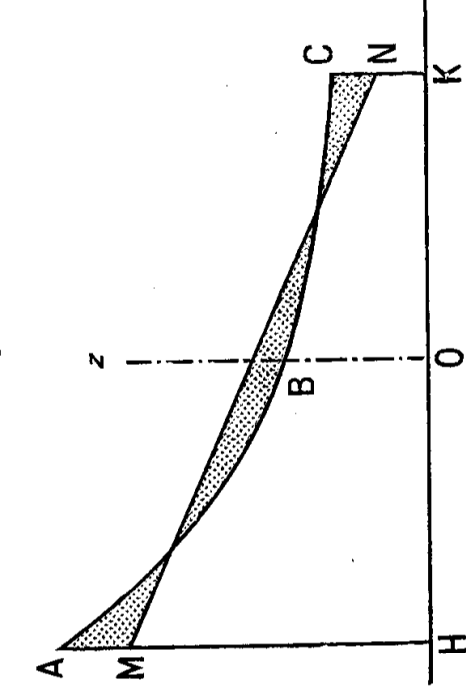


Fig. 58.

sia stata direttamente misurata in un certo numero di punti ben determinati, e che perciò la sua legge di variazione si possa praticamente rappresentare, per rapporto ad una fondamentale HK , con una certa curva ABC (fig. 58); lo stesso diagramma, previa una nuova conveniente scelta dell'unità di misura, rappresenterà anche la legge di variazione della deformazione impressa e_z .

Orbene, alle singole deformazioni impresse e_z immaginiamo

per un momento di saper aggiungere le corrispondenti deformazioni elastiche *incognite* ε_z .

La (122) e le (123) ci dicono che i punti che così si otterranno sul disegno dovranno stare su di una retta MN tale che la porzione di piano racchiusa tra essa retta, la curva ABC e le rettilinee ordinate estreme, abbia area nulla e momento nullo per rapporto all'asse delle z (e quindi anche ad una qualsiasi parallela a quest'asse).

Resta così riconfermato che la MN è perfettamente definita e senz'altro individuabile in disegno cogli ordinari procedimenti del calcolo grafico.

Il caso particolare considerato si presta del resto assai bene alla verifica sperimentale se si ricorre, come già abbiàm fatto altre volte, all'uso di modelli in vetro da studiarsi col sussidio della luce polarizzata.

Si ottengono allora delle immagini del tipo di quella fotograficamente riprodotta nella Tavola XX.

La trave di vetro sottoposta alla prova vi appare in posizione verticale, fiancheggiata a sinistra da una larga fascia nera che sta ad indicare lo spazio praticamente occupato nel dispositivo dalla sorgente di calore.

Questa era stata nel caso specifico realizzata mediante un nastro di nichel cromo opportunamente impacchettato fra fogli di amianto, e nel quale si faceva passare una corrente elettrica di conveniente intensità, sì da ottenere un riscaldamento ben uniforme e costante del foglio di amianto situato a contatto della trave.

Il compensatore è al solito disposto trasversalmente (cioè coll'asse orizzontale); nella regione in cui esso si sovrappone alla trave si vede la solita linea, luogo dei punti oscuri, la quale, riferita all'asse del compensatore, rappresenta la legge di variazione delle tensioni interne $(\sigma_z)_0$.

Il lettore rileverà immediatamente l'identità sostanziale esistente fra questo diagramma e quello racchiuso fra la curva ABC e la retta MN della fig. 58; e noterà come essi concordemente rivelino l'esistenza nella trave di una regione centrale cimentata a tensione, e di due regioni laterali cimentate a pressione.

**

La verifica sperimentale riesce poi anche più espressiva se, invece del solo stato di coazione che si determina quando il fenomeno termico è a regime, si prendono in esame anche i differenti stati che accompagnano il progressivo propagarsi del calore attraverso lo spessore della trave.

Così, per esempio, regolata la sorgente di calore in modo che lo stato di regime si possa considerar praticamente raggiunto in capo a soli cinque minuti primi, si sono osservati, nella trave di vetro di cui ci stiamo occupando, dei diagrammi delle tensioni interne che assumono, di minuto in minuto, le diverse forme rappresentate una sotto l'altra nella fig. 59.

Particolarmente istruttivi sono i primi due diagrammi, i quali si riferiscono a tempi in cui la variazione di temperatura (e quindi la deformazione impressa) è limitata ad una porzione soltanto della trave: essi fanno vedere come nella rimanente parte di trave, in cui la temperatura è ancora uniforme (e la deformazione impressa è nulla), la legge di variazione delle tensioni interne si mantenga rigorosamente lineare, non diversamente da quel che accadrebbe se si trattasse di una ordinaria deformazione, per es., a semplice flessione.

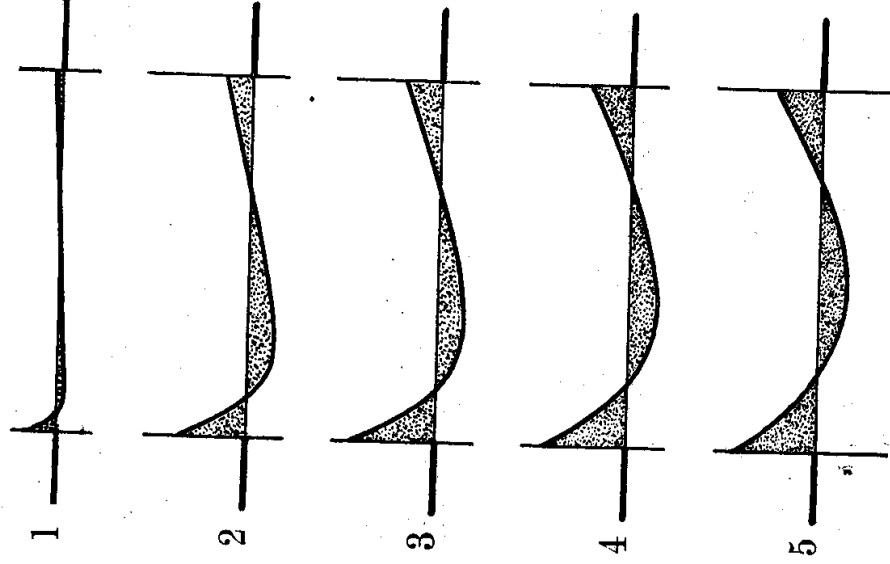


Fig. 59.

