V.

Le equazioni dell'equilibrio elastico.

L'equazione generale (16)

$$\int_V (F_x\delta u + F_y\delta v + F_z\delta w)\,dV + \int_S (P_x\delta u + P_y\delta v + P_z\delta w)\,dS =$$

$$= \int_V \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x}\,\delta\varepsilon_x + \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_y}\,\delta\varepsilon_y + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{xy}}\,\delta\gamma_{xy}\right) dV$$

si può trasformare per modo da farvi scomparire ogni sègno di integrazione. Per giungere a ciò basta svincolare nel termine che esprime la variazione dell'energia elastica le quantità δu, δv, δw in modo da farvele comparire linearmente come nell'espressione del lavoro delle forze esterne.

Intanto, tenute presenti le espressioni di $\delta\varepsilon_x$, $\delta\varepsilon_y$, ... $\delta\gamma_{xy}$ indicate a pag. 34, nonchè la formola (10) di trasformazione degli integrali di spazio in integrali di superficie, si ha

$$\int_V \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x}\delta\varepsilon_x\,dV = \int_V \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta u)\,dV =$$

$$= \int_V \frac{\partial}{\partial x}\left(\delta u\,\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x}\right) dV - \int_V \delta u\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x}\right) dV =$$

$$= -\int_S \delta u\,\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x}\cos(n,x)\,dS - \int_V \delta u\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x}\right) dV$$

Similmente

$$\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \delta\gamma_{yz} dV = \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\delta w) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta v) \right] dV =$$

$$= - \int_S \left[\delta w \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \cos(n,y) + \delta v \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \cos(n,z) \right] dS -$$

$$- \int_V \left[\delta w \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \right) + \delta v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \right) \right] dV$$

Operando queste sostituzioni e le loro analoghe, separando gli integrali di volume da quelli di superficie, e raccogliendo in ciascuno i termini che moltiplicano δu, δv, δw, l'equazione generale dell'equilibrio diviene:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_V \Bigg\{ \left[F_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}}\right) \right] \delta u + \\
&+ \left[F_y + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}}\right) \right] \delta v + \\
&+ \left[F_z + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_z}\right) \right] \delta w \Bigg\} dV + \\
+ &\int_S \Bigg\{ \left[P_x + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} \cos(n,x) + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \cos(n,y) + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}} \cos(n,z) \right] \delta u + \\
&+ \left[P_y + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \cos(n,x) + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y} \cos(n.y) + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \cos(n,z) \right] \delta v + \\
&+ \left[P_z + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}} \cos(n,x) + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \cos(n,y) + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_z} \cos(n,z) \right] \delta w \Bigg\} dS = 0
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Questa eguaglianza, come abbiamo già detto, non deve aver luogo, qualunque siano le δu, δv, δw. Essa deve solamente esser verificata per spostamenti compatibili coi vincoli, cioè per valori di δu, δv, δw i quali soddisfino, in ogni punto di S, alle equazioni di compatibilità (9):

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta u + \frac{\partial f}{\partial y} \delta v + \frac{\partial f}{\partial z} \delta w = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} \delta u + \frac{\partial g}{\partial y} \delta v + \frac{\partial g}{\partial z} \delta w = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} \delta u + \frac{\partial h}{\partial y} \delta v + \frac{\partial h}{\partial z} \delta w = 0$$

I principii del calcolo delle variazioni ci insegnano allora che debbono esistere certe funzioni incognite λ, μ, ν delle coor dinate, tali che, qualunque siano le δu, δv, δw, sia soddisfatta l'eguaglianza:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_V \Big\{ \left[F_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}}\right)\right] \delta u + \\
&\quad + \left[F_y + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}}\right)\right] \delta v + \\
&\quad + \left[F_z + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_z}\right)\right] \delta w \Big\} dV + \\
&+ \int_S \Big\{ \left[P_x + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} \cos(n, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \cos(n, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}} \cos(n, z) + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x} + \nu \frac{\partial h}{\partial x}\right] \delta u + \\
&\quad + \left[P_y + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \cos(n, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y} \cos(n, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \cos(n, z) + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \frac{\partial g}{\partial y} + \nu \frac{\partial h}{\partial y}\right] \delta v + \\
&\quad + \left[P_z + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}} \cos(n, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \cos(n, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_z} \cos(n, z) + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \mu \frac{\partial g}{\partial z} + \nu \frac{\partial h}{\partial z}\right] dw \Big\} dS = 0
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

In questa eguaglianza le quantità δu, δv, δw sono semplicemente soggette ad essere delle funzioni continue delle coordinate.

In conseguenza questa eguaglianza esige, in primo luogo, che in ogni punto del corpo si annulli l'espressione

$$F_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}}\right)$$

Supponiamo infatti che questa espressione sia differente da zero in un certo punto A; per ragioni ovvie di continuità si potrà sempre tracciare attorno al punto A un intorno V_a nell'interno del quale l'espressione scritta abbia un segno costante. Si attribuiscano allora a tutti i punti dell'intorno V_a degli spostamenti paralleli all'asse delle x, diretti dalla parte delle x positive, di grandezze tendenti gradualmente a zero in vicinanza della superficie che limita questo intorno; e si lascino immobili tutte le altre parti del corpo dato: ciò equivale a supporre in ogni punto di V_a

$$\delta u > 0 \qquad \delta v = \delta w = 0$$

e in ogni punto di V, esterno a V_a

$$\delta u = \delta v = \delta w = 0 .$$

Il primo membro della (23) si ridurrà così a

$$\int_{V_a} \left[F_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}}\right) \right] \delta u \, . \, dV$$

e siccome l'espressione sotto integrale ha per ipotesi un segno costante, questo primo membro non potrà annullarsi, contrariamente a quanto dovrebbe avvenire.

Per mezzo di questa dimostrazione e delle analoghe, sulle quali è inutile soffermarsi, si vede che la (23) equivale alle sei equazioni:

$$\left.\begin{aligned} F_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}}\right) = 0 \\ F_y + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}}\right) = 0 \\ F_z + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_z}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

$$\left.\begin{aligned} P_x + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\cos(n,x) + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\cos(n,y) + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}}\cos(n,z) + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} + \mu\frac{\partial g}{\partial x} + \nu\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ P_y + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\cos(n,x) + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y}\cos(n,y) + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}}\cos(n,z) + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} + \mu\frac{\partial g}{\partial y} + \nu\frac{\partial h}{\partial y} = 0 \\ P_z + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}}\cos(n,x) + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}}\cos(n,y) + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_z}\cos(n,z) + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} + \mu\frac{\partial g}{\partial z} + \nu\frac{\partial h}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

le prime tre delle quali diconsi *equazioni indefinite* perchè valgono in ogni punto del corpo; le altre tre, valide soltanto in superficie, prendono il nome di *equazioni ai limiti.*

***

È naturale chiedersi quale uso si possa fare delle equazioni indefinite e delle equazioni ai limiti.

Si è già detto altre volte che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}$$

sono funzioni lineari delle componenti di deformazione e che perciò contengono linearmente le derivate prime degli spostamenti.

Le derivazioni ulteriori di queste funzioni, accennate nelle equazioni indefinite, faranno pertanto comparire le derivate seconde di u, v, w. Adunque le equazioni indefinite sono equazioni alle derivate parziali del second'ordine; integrandole si otterranno le espressioni di u, v, w contenenti quantità arbitrarie, le quali dovranno venir determinate mediante sostituzione nelle equazioni ai limiti.

Ma qui sorge il dubbio: basteranno sempre le equazioni indefinite per individuare un sistema di spostamenti, e le equazioni ai limiti per completarne la determinazione?

Per risolvere la questione in tutta la sua generalità bisognerebbe dimostrare:

1° che quel duplice sistema di equazioni ammette sempre una soluzione, cioè che esiste sempre un sistema di spostamenti u, v, w che soddisfa alle equazioni indefinite in tutto lo spazio V, e che verifica, su tutta la superficie S che lo limita, le equazioni ai limiti;

2° che tale soluzione è unica, cioè che non possono esistere due diversi sistemi di spostamenti soddisfacenti entrambi a quell'insieme di condizioni.

I limiti che fin dal principio ci siamo imposti ci vietano assolutamente di soffermarci anche solo brevemente sulla prima questione: essa esce infatti completamente dal campo della meccanica per invadere quello dell'analisi: basti sapere che, dopo le ricerche di Lauricella, dei Cosserat e di Korn [1], l'esistenza della soluzione del problema della deformazione elastica per date forze superficiali può considerarsi, almeno in via generale, come dimostrata.

Dal punto di vista delle applicazioni poi la questione vien posta assai raramente: si preferisce dai più basarsi sul fatto che, quando ci si propone, in pratica, l'analisi di un problema di equilibrio, dell'esistenza di una soluzione, dal punto di vista fisico, si è già in ogni caso certi *a priori*; si può da ciò desumere che, se la traduzione matematica dei dati è stata fatta a dovere, anche il problema analitico deve necessariamente ammettere una soluzione.

Noi ci limiteremo pertanto allo studio del secondo quesito, in ordine al quale risponderemo subito che, *a prescindere da moti rigidi, le equazioni indefinite e le equazioni ai limiti sono sufficienti per la determinazione degli spostamenti.*

Supposto infatti che esistano due sistemi di spostamenti

$$u',\ v',\ w' \quad \text{ed} \quad u'',\ v'',\ w''$$

soddisfacenti entrambi alle equazioni indefinite (24), cioè tali che si abbia, in tutto V,

$$F_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right)' + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right)' + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}}\right)' = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right)'' + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right)'' + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}}\right)'' = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

con

$$\varepsilon_x' = (\varepsilon_x)_0 + \frac{\partial u'}{\partial x}, \ldots. \quad \text{ed} \quad \varepsilon_x'' = (\varepsilon_x)_0 + \frac{\partial u''}{\partial x}, \ldots..$$

si considerino gli spostamenti

$$u' - u'' = u, \qquad v' - v'' = v, \qquad w' - w'' = w$$

(1) Si confronti particolarmente: A. Korn, "*Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité dans le cas où les efforts sont donnés à la surface*" (Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, 2e série, tom. X, année 1908).

caratterizzanti una deformazione ideale di componenti

$$\varepsilon_x = (\varepsilon_x)_0 + \frac{\partial u}{\partial x} = (\varepsilon_x)_0 + \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial u''}{\partial x} = (\varepsilon_x)_0 + \varepsilon_x' - \varepsilon_x''$$

. . . .

Ricordando che le derivate di φ rispetto alle componenti di deformazione contengono linearmente queste componenti, risulta chiaro che deve aversi, in conseguenza

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right)_0 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right)' - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right)'', \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Se pertanto si tiene presente che, nello stato naturale del corpo, deve aversi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right)_0 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right)_0 + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}}\right)_0 = 0$$

. . . .

dai due sistemi di equazioni indefinite scritti sopra si ricava facilmente

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_z}\right) = 0$$

Queste non son altro che le equazioni indefinite dell'equilibrio nell'ipotesi che le forze di massa siano tutte nulle.

Quanto alle equazioni ai limiti, da quelle relative ai due ipotetici sistemi risolventi

$$P_x + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right)' \cos(n,x) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right)' \cos(n,y) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}}\right)' \cos(n,z) + \lambda' \frac{\partial f}{\partial x} + \mu' \frac{\partial g}{\partial x} + \nu' \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

. . . .

$$P_x + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right)'' \cos(n,x) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right)'' \cos(n,y) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}}\right)'' \cos(n,z) + \lambda'' \frac{\partial f}{\partial x} + \mu'' \frac{\partial g}{\partial x} + \nu'' \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

. . . .

e da quelle relative allo stato naturale

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x}\right)_0\cos(n,x)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{xy}}\right)_0\cos(n,y)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{zx}}\right)_0\cos(n,z)+\lambda_0\frac{\partial f}{\partial x}+\mu_0\frac{\partial g}{\partial x}+\nu_0\frac{\partial h}{\partial x}=0$$

. . . .

si ricava, ponendo per brevità di scrittura

$$\lambda_0+\lambda'-\lambda''=\lambda,\qquad \mu_0+\mu'-\mu''=\mu,\qquad \nu_0+\nu'-\nu''=\nu$$

e procedendo del resto come sopra,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x}\cos(n,x)+\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{xy}}\cos(n,y)+\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{zx}}\cos(n,z)+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}+\mu\frac{\partial g}{\partial x}+\nu\frac{\partial h}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{xy}}\cos(n,x)+\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_y}\cos(n,y)+\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{yz}}\cos(n,z)+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}+\mu\frac{\partial g}{\partial y}+\nu\frac{\partial h}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{zx}}\cos(n,x)+\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{yz}}\cos(n,y)+\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_z}\cos(n,z)+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}+\mu\frac{\partial g}{\partial z}+\nu\frac{\partial h}{\partial z}=0$$

Ma queste sono precisamente le equazioni ai limiti per forze superficiali tutte nulle.

È facile constatare che con ciò le funzioni ε_x, $\varepsilon_y, \ldots, \gamma_{xy}$ risultano completamente determinate in tutto il corpo. Si ha infatti pel teorema di Clapeyron [pag. 39]

$$\frac{1}{2}\int_V(F_xu+F_yv+F_zw)\,dV+\frac{1}{2}\int_S(P_xu+P_yv+P_zw)\,dS=\int_V\varphi_1\,dV$$

Ora poichè le F_x, $F_y, \ldots, P_z$ son nulle, il primo membro di questa eguaglianza deve risultare eguale a zero. Ma il secondo membro è una somma di quantità essenzialmente positive: è adunque necessario che sia nulla ciascuna di esse, cioè che si abbia

$$\varphi_1=0$$

in tutto il corpo.

Per altra parte è ormai noto [pag. 37] che φ_1 non può annullarsi se non son nulle tutte le $(\varepsilon_x)_1$, $(\varepsilon_y)_1, \ldots (\gamma_{xy})_1$, nel qual caso le componenti di spostamento debbono essere della forma [pag. 16]

$$\begin{aligned} u &= l + qz - ry \\ v &= m + rx - pz \\ w &= n + py - qx \end{aligned}$$

con l, m, n, p, q, r costanti.

Le due deformazioni date u', v', w' ed u'', v'', w'' differiscono perciò al più per un semplice moto rigido del sistema.

***

Che anzi anche questo semplice moto rigido non può verificarsi se il corpo trovasi effettivamente soggetto ad un numero sufficiente di vincoli esterni.

In tal caso infatti, dovendo per ipotesi tanto le u', v', w' quanto le u'', v'', w'' soddisfare alle relative equazioni di compatibilità, anche le u, v, w testè trovate dovranno verificare certe equazioni del tipo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w = 0$$

le quali, sostituendo ad u, v, w le loro espressioni, assumono la forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x} l + \frac{\partial f}{\partial y} m + \frac{\partial f}{\partial z} n + \left(\frac{\partial f}{\partial z} y - \frac{\partial f}{\partial y} z\right) p +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x} z - \frac{\partial f}{\partial z} x\right) q + \left(\frac{\partial f}{\partial y} x - \frac{\partial f}{\partial x} y\right) r = 0$$

In esse i coefficienti delle l, m, n, p, q, r sono da considerarsi come dati in ogni caso speciale, cioè quando sono noti i singoli punti soggetti a vincoli e le equazioni di questi vincoli. Esse sono dunque da considerarsi come equazioni lineari ed omogenee nelle l, m, n, p, q, r: basta perciò imporre ad un corpo vincoli tali da potersi tradurre in almeno sei di queste equazioni, purchè tutte fra loro linearmente indipendenti, perchè si debba avere di necessità

$$l = m = n = p = q = r = 0$$

e conseguentemente

$$u = v = w = 0$$

cioè

$$u' = u'', \quad v' = v'', \quad w' = w''$$

in tutto il corpo.