V.

La scelta delle incognite iperstatiche.

Vi sono dei casi nei quali le incognite iperstatiche di un sistema a più vincoli sovrabbondanti si presentano come indipendenti, nel senso che la linea d'influenza relativa ad una qualunque di esse può venire tracciata senza che occorra tenere in conto l'esistenza delle altre.

È facile prevedere quando un simile fatto si verificherà: basta ritornar col pensiero alle singole deformate costruite supponendo il sistema liberato da tutti i vincoli sovrabbondanti e caricato da un'unica forza in corrispondenza di uno di tali vincoli; è evidente che se i punti su cui agivano gli altri vincoli non subiscono, nella deformazione considerata, spostamento alcuno nella direzione d'azione dei vincoli stessi — se cioè, per dirla in poche parole, la deformata tracciata, prescindendo dall'esistenza degli altri vincoli, riesce compatibile con essi — tali altri vincoli possono venire idealmente ripristinati senza che occorra perciò introdurre alcun mutamento nè nello stato di tensione nè nello stato di deformazione che si è dianzi definito.

In queste condizioni la deformata costruita si può senz'altro considerare come la linea d'influenza della reazione incognita presa in esame, tanto nel caso che il relativo vincolo sia il solo vincolo sovrabbondante, come nel caso che con esso coesistano anche tutti gli altri vincoli sovrabbondanti che il sistema dato comporta.

Si tratta in sostanza, come è ben evidente, di una singolarità: singolarità degna della maggiore attenzione in quanto elimina tutte le complicazioni che nei due precedenti capitoli abbiam viste discendere dalla coesistenza di più vincoli sovrabbondanti, e riduce il problema del tracciamento della linea d'influenza di uno qualunque di essi a quei medesimi termini, particolarmente semplici, che abitualmente caratterizzano il problema nel caso in cui esso dipende da una sola incognita.

E la cosa ha poi un'altissima importanza pratica perchè, accanto ad un certo numero di casi in cui la singolarità si presenta spontaneamente, ve ne sono di quelli in cui essa si può far nascere a volontà mediante una oculata scelta delle incognite iperstatiche.

Noi incominceremo col sottoporre all'attenzione del lettore alcuni esempî del primo tipo, onde trarre dallo studio di essi regola e norma per la impostazione e la discussione del caso più generale.

***

Consideriamo una trave ad arco come quella rappresentata in fig. 132: vincolata a cerniera agli estremi A e B, semplicemente appoggiata in un punto intermedio C: dotata dunque di due vincoli sovrabbondanti.

Assumiamo come incognite iperstatiche le due componenti, orizzontale e verticale, della cerniera A.

Immaginiamo liberato l'arco da tale cerniera, e sul sistema staticamente determinato che ne risulta immaginiamo applicata dapprima una forza F_0 agente sul punto A secondo la linea d'azione (orizzontale) della prima incognita; e successivamente una forza F_1 agente pure in A ma secondo la linea d'azione (verticale) della seconda incognita.

Come abbiamo già accennato, vogliamo a bella posta supporre di trovarci per caso in una condizione tutt'affatto particolare: per precisare, supponiamo che lo spostamento del punto A nella deformazione causata dalla forza F_0 si verifichi proprio nella direzione stessa (orizzontale) di F_0.

Ciò è quanto dire che è nulla la componente di questo spostamento nella direzione (verticale) di F_1.

Il teorema di Betti ci autorizza a prevedere senz'altro che sarà allora nulla anche la componente orizzontale (cioè diretta secondo F_0) dello spostamento che A subirà sotto l'azione della forza verticale F_1: che cioè, nella deformazione causata da questa seconda forza, il punto A si sposterà verticalmente.

Se il lettore vorrà ritornar col pensiero alla trattazione generale che del problema a due incognite iperstatiche noi abbiamo

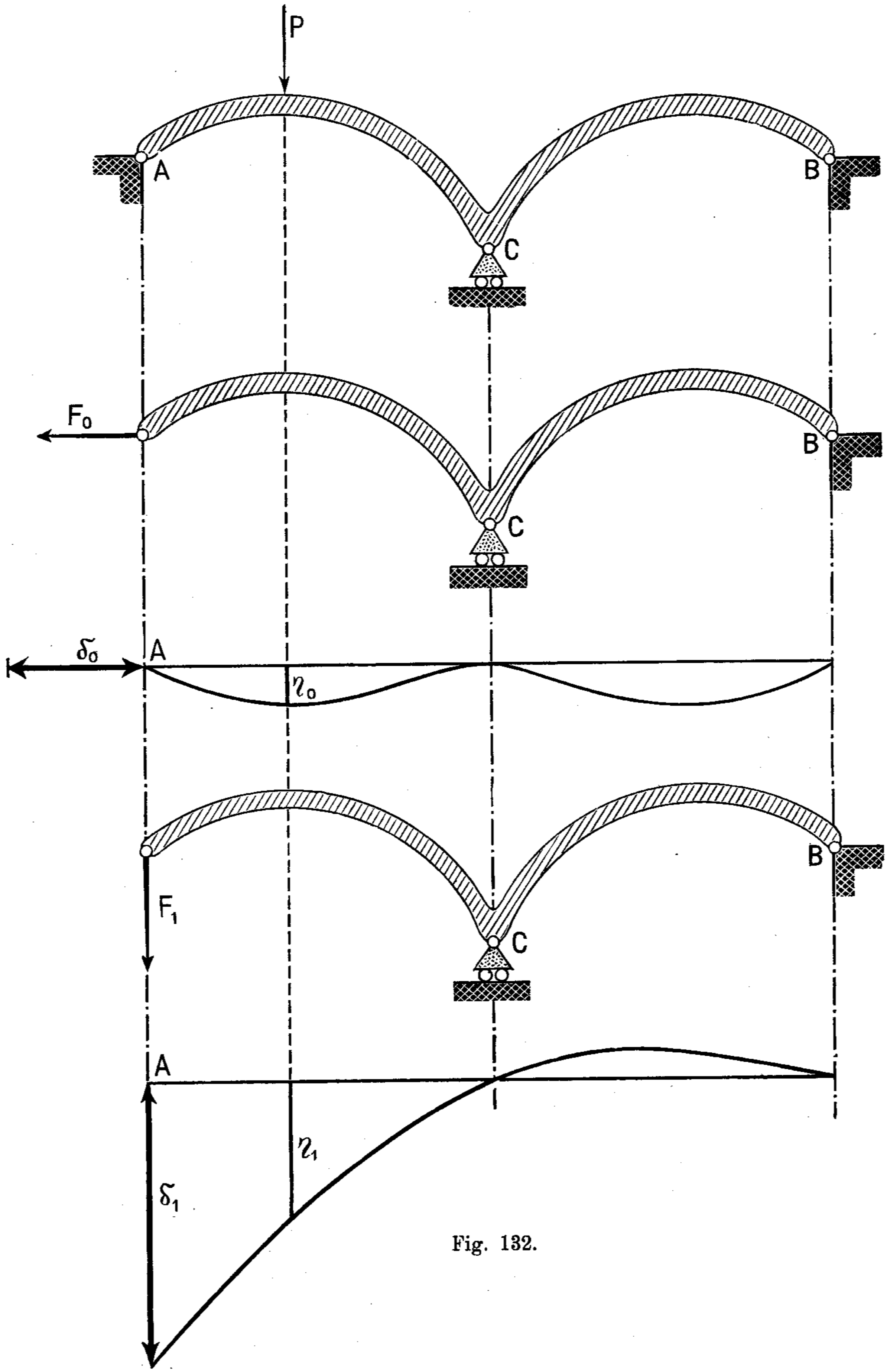

Fig. 132.

esposta a pag. 413, riconoscerà facilmente che la nostra attuale ipotesi rispecchia quel che nella predetta trattazione generale sarebbe accaduto se, per un'ipotesi allora inammissibile, si fosse trovato

$$\eta_{CD} = \eta_{DC} = 0$$

Si sarebbe allora dovuto, nelle figure 123 e 124, assumere

$$-F_C \frac{\eta_{CD}}{\eta_{DD}} = -F_C \frac{\eta_{DC}}{\eta_{DD}} = 0$$

e la linea d'influenza della reazione V_C non avrebbe differito per nulla dalla linea elastica costruita applicando la forza arbitraria F_C alla trave liberata da tutti e due gli appoggi sovrabbondanti.

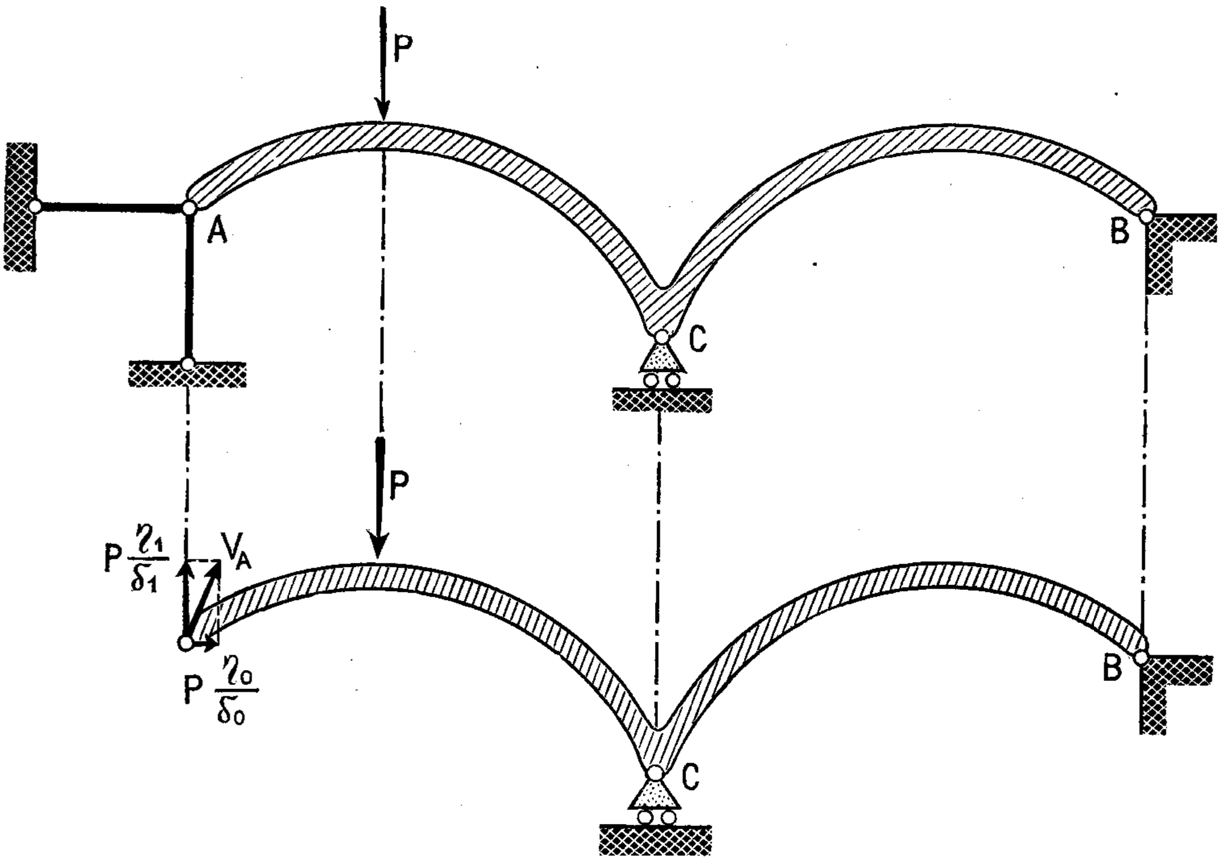

Fig. 133.

Ipotesi inammissibile, abbiamo detto, in quel caso; e conclusione assurda quindi, in quel caso; non qui, dove per una forma e dimensioni opportune della trave ad arco considerata, la singolarità prospettata può effettivamente e spontaneamente presentarsi.

Allora le due deformate (diagrammi degli spostamenti verticali) costruite in figura 132 si prestano senz'altro al calcolo delle due componenti

$$P\,\frac{\eta_0}{\delta_0} \qquad \text{e} \qquad P\,\frac{\eta_1}{\delta_1}$$

della reazione V_A determinata da un qualunque carico verticale P (fig. 133), ed il problema statico si può riguardare come completamente risolto.

* * *

Ecco un secondo esempio, nel quale il presentarsi della singolarità di cui ci stiamo occupando è addirittura prevedibile *a priori* come una inderogabile e necessaria conseguenza della simmetria del sistema.

Si tratta di due travi ad arco AC e CA' collegate fra loro a cerniera in C nel modo indicato in figura 134: ciascuna di esse è vincolata all'altra estremità da un semplice appoggio, ed in corrispondenza di un punto intermedio da una cerniera. Ciascuna di esse possiede dunque per conto suo i vincoli strettamente indispensabili per definirne la posizione nello spazio.

È quindi naturale considerar la cerniera C di collegamento come vincolo sovrabbondante, ed assumere come incognite iperstatiche le solite due componenti, orizzontale e verticale, della reazione da essa cerniera sviluppata.

Se tutto è simmetrico rispetto alla verticale per C, le varie costruzioni grafiche si possono naturalmente limitare ad una sola delle due travi.

La figura 134 rappresenta la deformata (o meglio il diagramma degli spostamenti verticali) della trave di sinistra supposta sollecitata da una forza F_0 applicata in C in direzione orizzontale. Naturalmente una forza eguale ed opposta deve intendersi operante sulla trave di destra.

Se Cc_0 è, in quella qualunque scala che si sarà assunta per la rappresentazione delle deformazioni, lo spostamento del

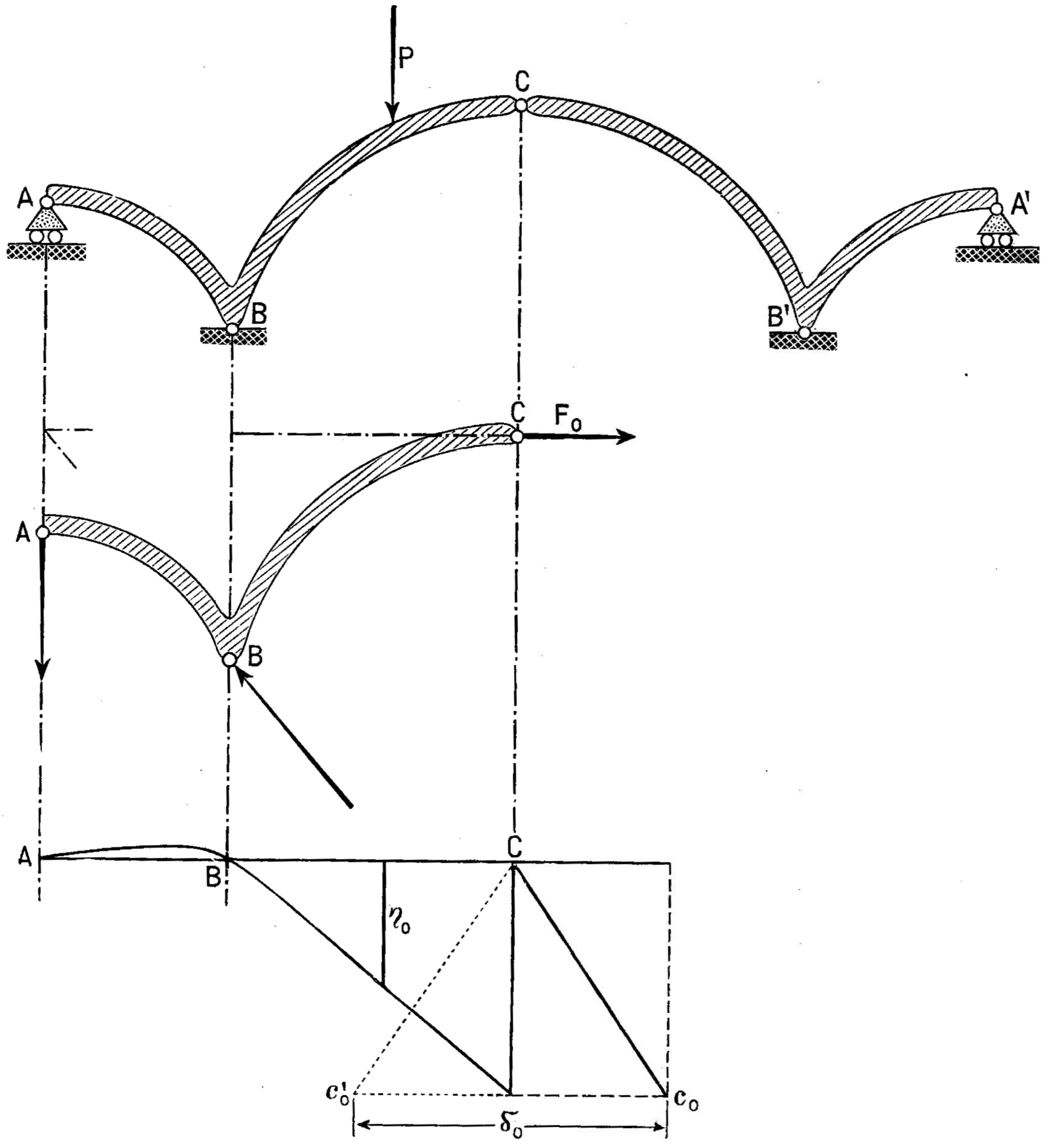

Fig. 134.

punto C considerato come appartenente alla trave di sinistra, e quindi Cc_0' è il contemporaneo spostamento dello stesso punto considerato come appartenente alla trave di destra, ragion di simmetria vuole che lo spostamento relativo δ_0 delle due faccie del taglio con cui le due travi si sono idealmente rese indipendenti risulti orizzontale.

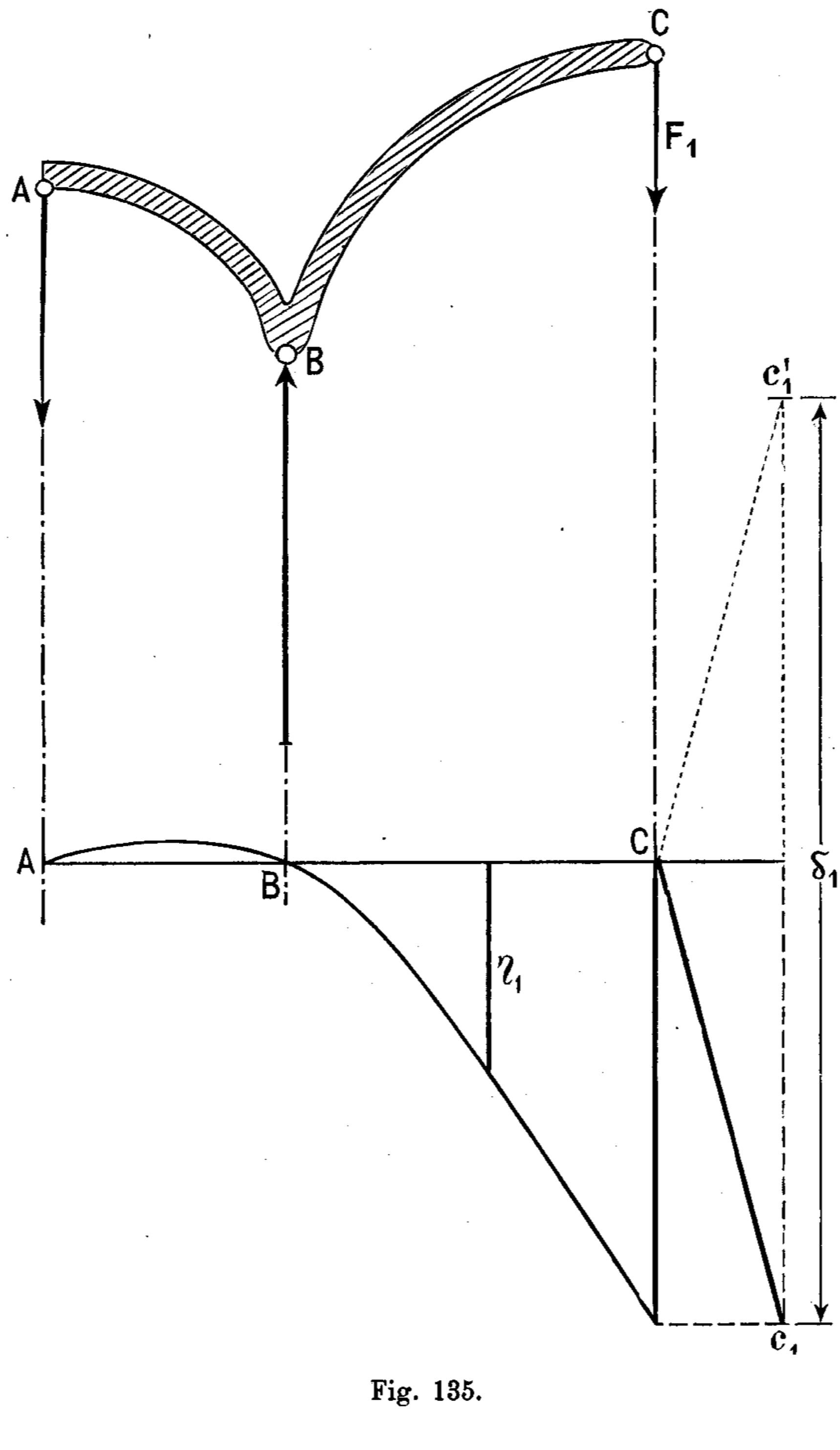

Fig. 135.

Similmente, e per logica conseguenza, se si suppone l'una delle due travi caricata in C da una forza verticale F_1 e l'altra cimentata da una forza eguale e contraria, gli spostamenti di C stesso, considerato prima come estremo dell'una poi come estremo dell'altra trave, saranno disposti come i vettori Cc_1 e Cc_1' della figura 135, in cui la deformata relativa a questa particolare sollecitazione (intesa nel solito senso di diagramma degli spostamenti verticali) è stata tracciata limitatamente alla sola trave di sinistra: per modo che lo spostamento relativo δ_1 delle due faccie del solito taglio risulterà in questo secondo caso verticale.

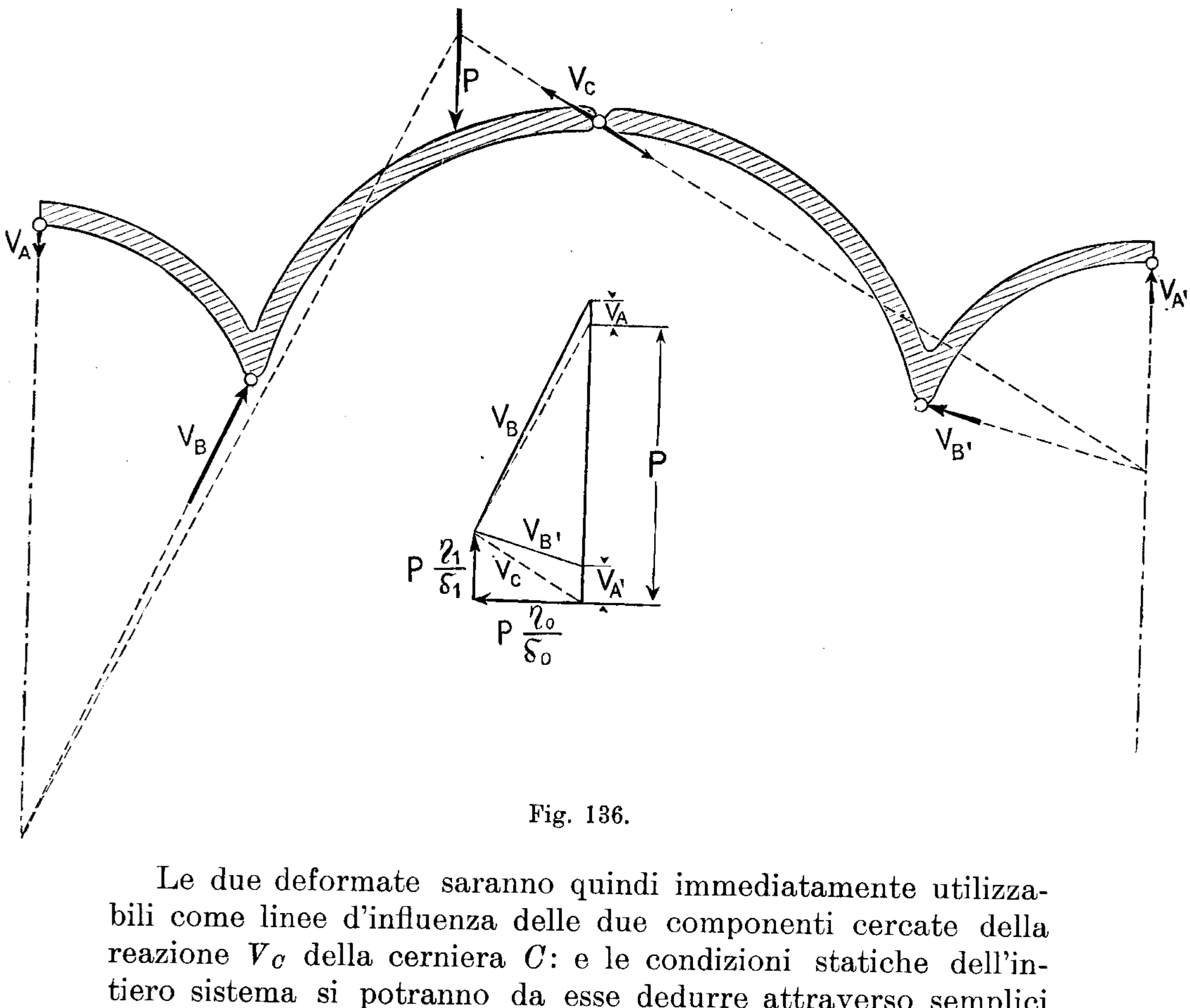

Fig. 136.

Le due deformate saranno quindi immediatamente utilizzabili come linee d'influenza delle due componenti cercate della reazione V_C della cerniera C: e le condizioni statiche dell'intiero sistema si potranno da esse dedurre attraverso semplici composizioni e decomposizioni di forze nel modo che è chiaramente indicato nella figura 136 per una condizione generica di carico costituita dalla solita forza P agente secondo una verticale arbitraria.

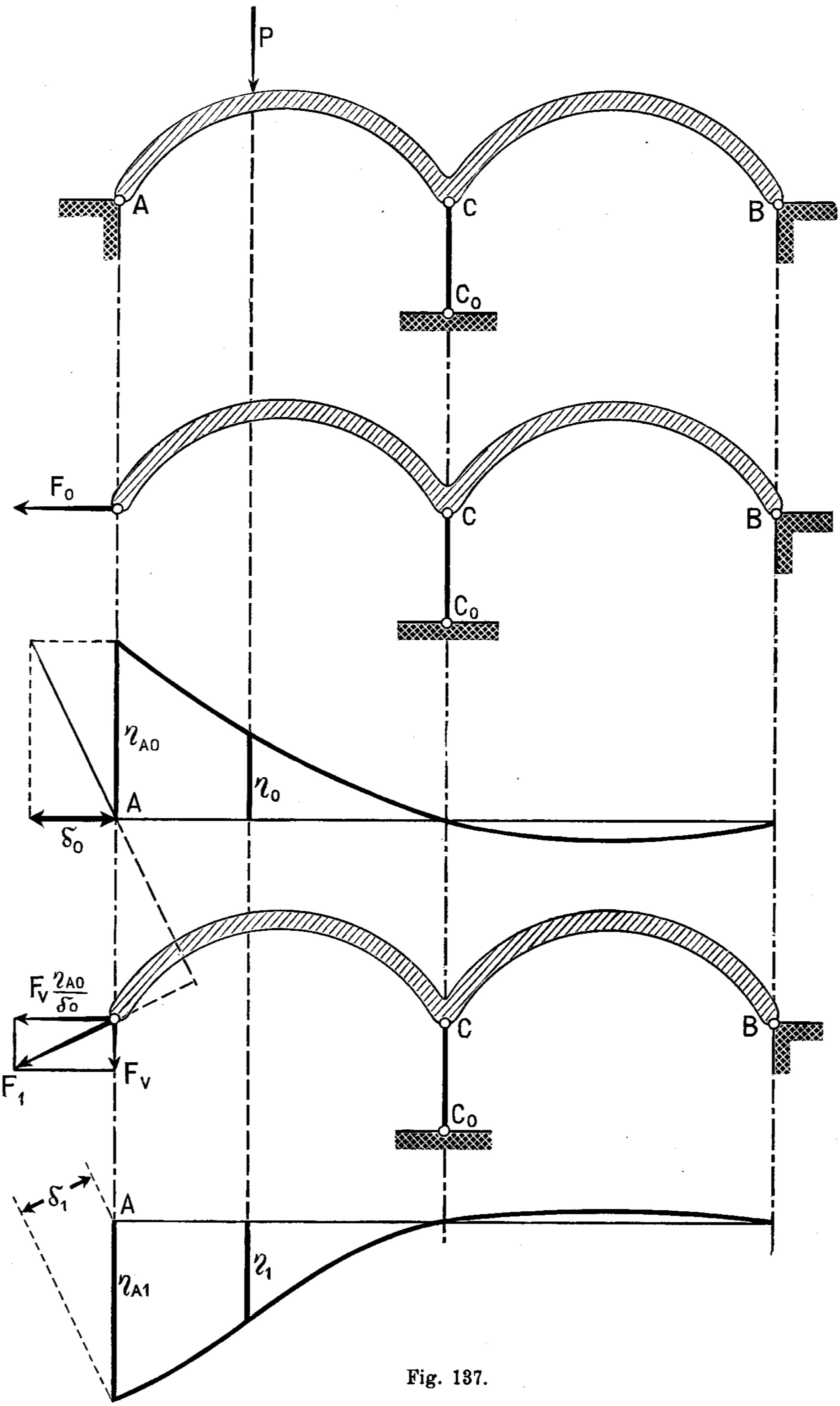
P
A
C
B
C_0
F_0
C
B
C_0
η_{A0}
η_0
A
δ_0
$F_v \frac{\eta_{A0}}{\delta_0}$
F_1
F_v
C
B
C_0
δ_1
A
η_{A1}
η_1

Fig. 137.

***

Passiamo ora ad un caso in cui la singolarità non si presenta più spontaneamente.

La trave ha la forma indicata in figura 137: i vincoli a cui essa è soggetta non differiscono sostanzialmente da quelli già considerati nella figura 132: anche qui vi sono due cerniere d'estremità A e B, ed un semplice appoggio in un punto intermedio C.

Anche qui si renderà il sistema staticamente determinato immaginando momentaneamente soppressa la cerniera A.

Soltanto le cose sono qui disposte in modo che, se al punto A reso così libero da ogni vincolo si applica una forza orizzontale F_0, lo spostamento che esso subisce nella deformazione elastica che così si viene a determinare nel sistema, non è più orizzontale, ma comporta insieme con una componente orizzontale, che indicheremo con δ_0, anche una componente verticale, che denoteremo con η_{A0}.

La deformata (verticale) della trave che così si viene a definire può pertanto bensì considerarsi come la linea d'influenza (per forze verticali) della reazione orizzontale in A nella ipotesi che la trave non sia ivi soggetta che ad un unico vincolo semplice operante appunto in direzione orizzontale, nel modo schematicamente raffigurato in figura 138; ma non può in alcun modo confondersi colla linea d'influenza della reazione orizzontale se si suppone che questa sia accompagnata da una reazione verticale capace, insieme colla prima, di ripristinare in A il doppio vincolo iniziale.

Se pertanto si vogliono assumere come incognite iperstatiche nella trave data le solite due componenti, orizzontale e verticale, della reazione della cerniera A, bisogna necessariamente applicare, per determinarle, il procedimento generale descritto ed applicato già nel caso generale a pag. 413.

Bisogna cioè utilizzare la prima deformata tracciata per determinare la reazione che un ipotetico appoggio semplice orizzontale svilupperebbe qualora, nel punto A stesso su cui esso agisce, venisse applicata una forza verticale F_V; tale reazione sarebbe misurata da

$$F_V \frac{\eta_{A0}}{\delta_0}$$

Naturalmente, sotto l'azione di questa particolarissima sollecitazione, il punto A si deve spostare verticalmente: la deformata della trave è adunque immediatamente interpretabile come linea d'influenza della reazione dell'unico vincolo attualmente soppresso, vale a dire della componente verticale della reazione V_A.

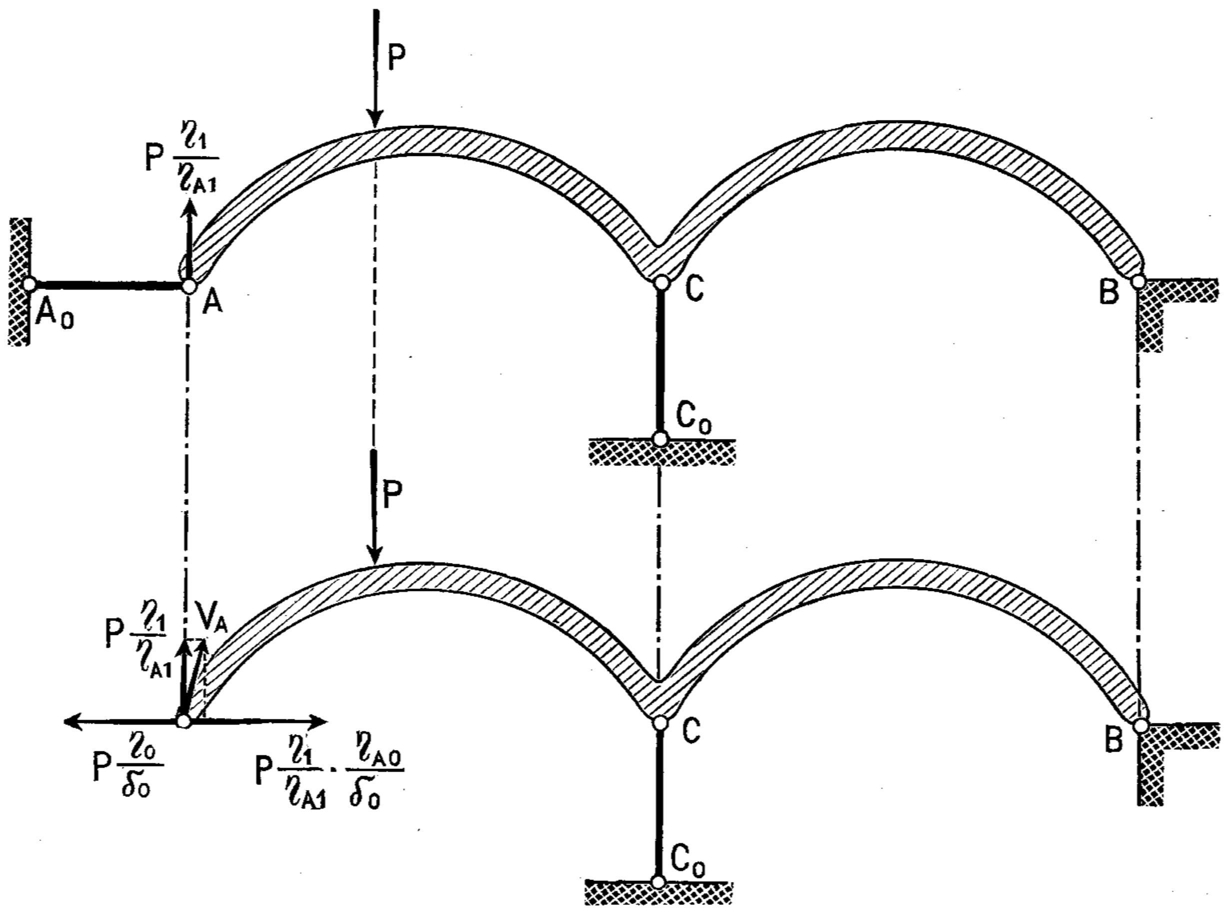

Fig. 138.

Dato un qualunque carico P, tale componente verticale deve dunque assumere il valore

$$P\,\frac{\eta_1}{\eta_{A1}}$$

E si potrà poi sempre completare il risultato calcolando la componente orizzontale a mezzo della deformata precedentemente costruita purchè si abbia l'avvertenza di tener ben presente che, per rapporto ad essa, anche la reazione verticale è da considerarsi come una forza applicata (negativa).

La reazione V_A sarà dunque la risultante della componente verticale

$$P\,\frac{\eta_1}{\eta_{A1}}$$

e di una componente orizzontale della forma

$$P\,\frac{\eta_0}{\delta_0} - P\,\frac{\eta_1}{\eta_{A1}}\cdot\frac{\eta_{A0}}{\delta_0}$$

Ma ecco che le cose possono anche riguardarsi da un punto di vista un po' differente.

La linea d'influenza della reazione verticale che noi abbiamo costruita come deformata della trave vincolata in A orizzontalmente e caricata nello stesso punto dalla forza verticale F_V, si sarebbe potuta anche costruire supponendo la trave completamente libera in A (epperò staticamente determinata) pur di immaginare ivi applicata una forza F_1 che fosse precisamente la risultante della forza verticale F_V e della conseguente reazione orizzontale $F_V\,\frac{\eta_{A0}}{\delta_0}$.

Ora risulta chiaramente dalla nostra figura che questa risultante F_1 è perpendicolare alla direzione dello spostamento determinato in A dalla sola forza F_0.

Il fatto che la componente dello spostamento dovuto ad F_0 nella direzione di F_1 sia nullo, costituisce d'altronde la condizione necessaria e sufficiente perchè sia nulla la componente dello spostamento dovuto ad F_1 nella direzione di F_0, vale a dire perchè lo spostamento determinato in A dalla forza F_1 riesca verticale.

Ciò posto si consideri la cerniera in A sostituita da due vincoli semplici AA_0 ed AA_1 operanti secondo le due direzioni di F_0 e di F_1 come è indicato in figura 139.

Poichè la prima delle deformate da noi tracciate nella figura 137 è compatibile col vincolo AA_1, è evidente che non fa bisogno di sopprimerlo per realizzarla. In altre parole essa si può ottenere operando sul sistema il solito taglio in modo da liberarlo dal solo vincolo AA_0. Essa si può dunque interpretare come la linea d'influenza della reazione del vincolo AA_0.

Similmente, pel fatto che la seconda delle deformate tracciate in quella figura è compatibile col vincolo AA_0, sicchè per costruirla basta immaginar liberato il sistema dal solo vincolo AA_1 conservando in posto il primo, essa si potrà a sua volta interpretare come linea d'influenza della reazione del vincolo AA_1.

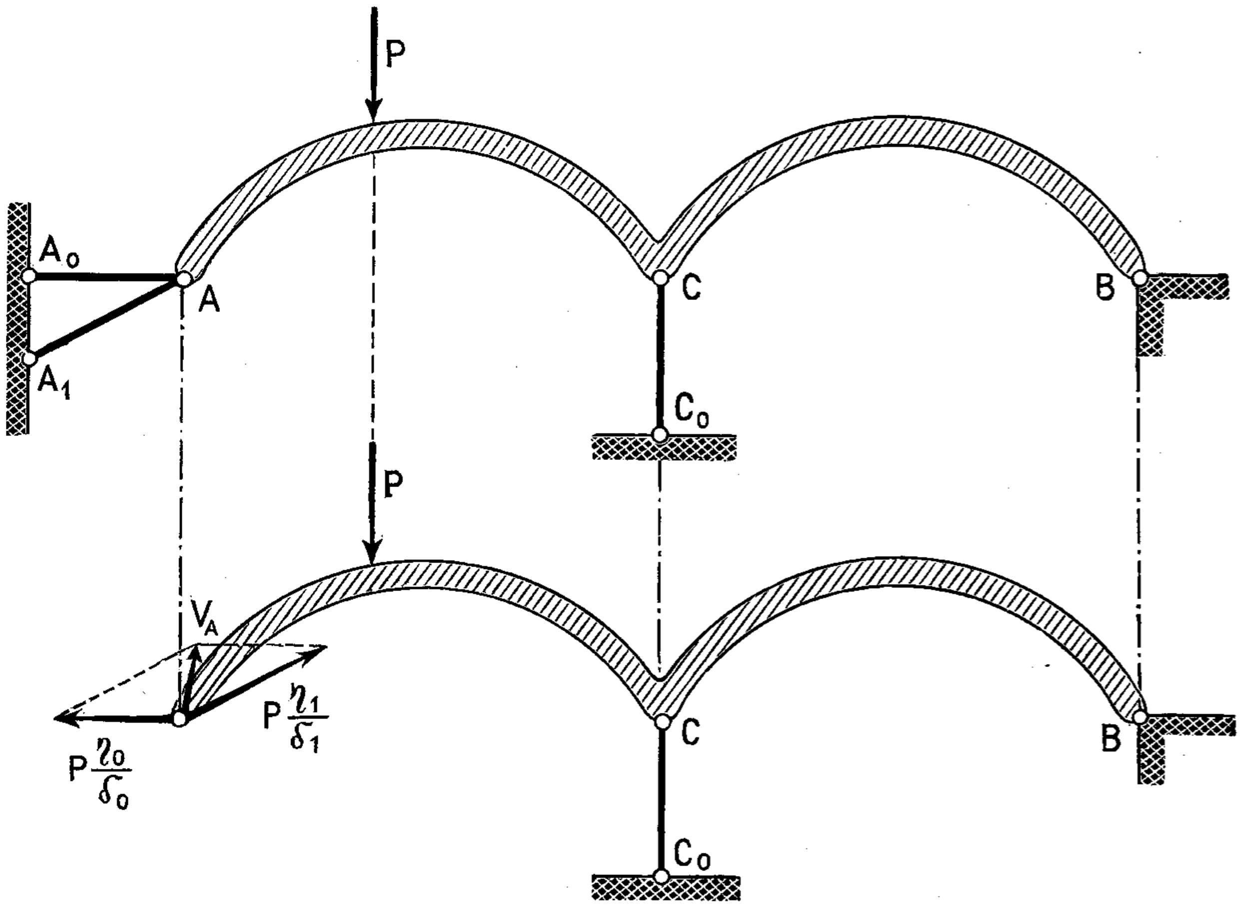

Fig. 139.

Naturalmente si dovranno, nei due casi, assumere unità di misura eguali agli spostamenti di A letti nella direzione d'azione dei vincoli cui le due linee si riferiscono. Nel primo caso si tratterà ancora di δ_0: ma nel secondo non si dovranno più riferire le ordinate alla η_{A1} bensì alla sua proiezione δ_1 sulla direzione di F_1.

Perciò per il solito carico P si dedurrà la reazione V_A come risultante delle due forze

$$P\,\frac{\eta_0}{\delta_0} \quad \text{e} \quad P\,\frac{\eta_1}{\delta_1}$$

nel modo indicato in figura 139.

***

Tutte le volte pertanto che si ha da studiare un sistema elastico comportante due incognite iperstatiche, la indipendenza delle due incognite, se pure non si verifica spontaneamente, si può sempre in definitiva conseguire se si scelgono le incognite stesse in modo opportuno.

Basterà assumere come vincolo sovrabbondante una cerniera, se v'è: se non v'è, si potrà sempre immaginar sostituita a due vincoli semplici una cerniera ideale situata nel punto d'incontro delle loro rette d'azione. Poi si caratterizzerà la reazione incognita di tale cerniera mediante due componenti, reazioni di due ipotetici vincoli semplici equivalenti, aventi direzioni tali che la deformazione che potrebbe esser causata da una di esse, supposta agente da sola, risulti compatibile coll'altra (cioè normale alla direzione dell'altra).

La direzione di una di queste due componenti si potrà sempre scegliere ad arbitrio: determinata poi la direzione dello spostamento ad essa corrispondente, si assumerà la normale ad esso come direzione dell'altra componente.

In virtù del teorema di Betti lo spostamento corrispondente a questa seconda componente dovrà necessariamente risultar normale alla prima.

Le deformate verticali dell'asse geometrico della trave, così ottenute, lette assumendo per unità di misura le proiezioni degli spostamenti della cerniera (reale od ideale che sia) sulle direzioni delle forze che li hanno prodotti, saranno le linee d'influenza delle due componenti della reazione cercata.

***

In un solo caso la soluzione ora indicata può a prima vista sembrare inapplicabile: ed è quando i vincoli sovrabbondanti si riducono inevitabilmente a due semplici appoggi agenti nella medesima direzione: esempio tipico quello della figura 140.

Ma l'eccezione è soltanto apparente: in realtà il procedimento è perfettamente applicabile: vuol solo dire che, in questo caso particolare, la cerniera ideale di cui abbiamo parlato si trova all'infinito, e che le due componenti della sua reazione hanno ancor esse la medesima direzione: si tratterà pur sempre di determinarne la linea d'azione.

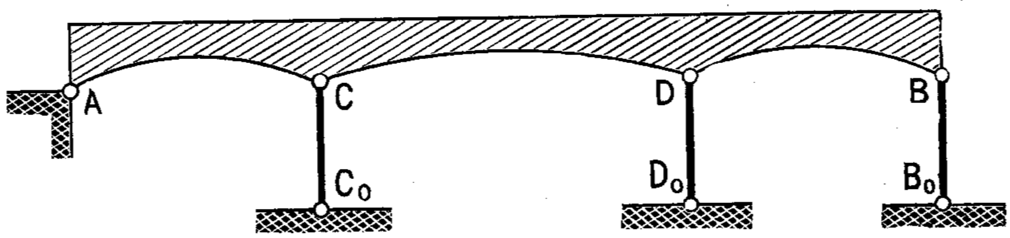

Fig. 140.

Sovente giova assumere come linea d'azione di una di esse la retta stessa all'infinito del piano. Si immaginerà pertanto il sistema sollecitato da una coppia di momento X, praticamente

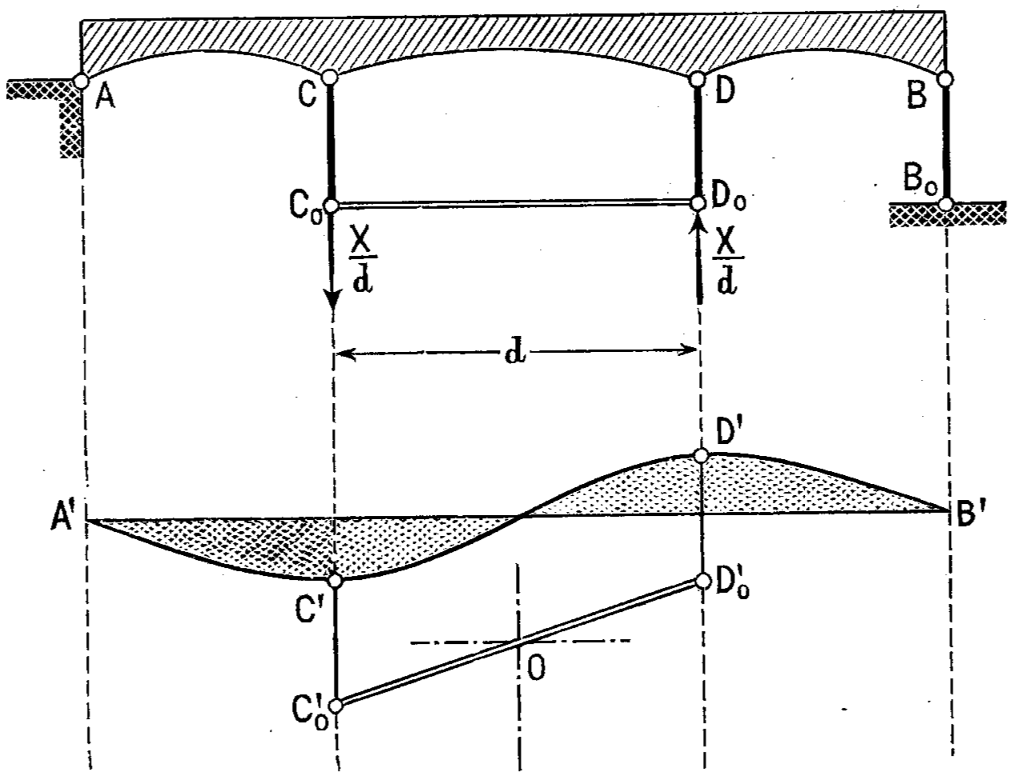

Fig. 141.

rappresentata da due forze eguali e di segno contrario, di intensità $\dfrac{X}{d}$ agenti secondo le linee d'azione dei due appoggi semplici che si sono assunti come sovrabbondanti, ed in conseguenza momentaneamente soppressi (fig. 141).

Tracciata la deformata e determinato il punto O attorno a cui ruoterebbe un'eventuale asta di collegamento C_0D_0 a cui la sollecitazione può intendersi applicata, si adotterà come linea d'azione dell'altra componente la parallela alla solita direzione passante per O.

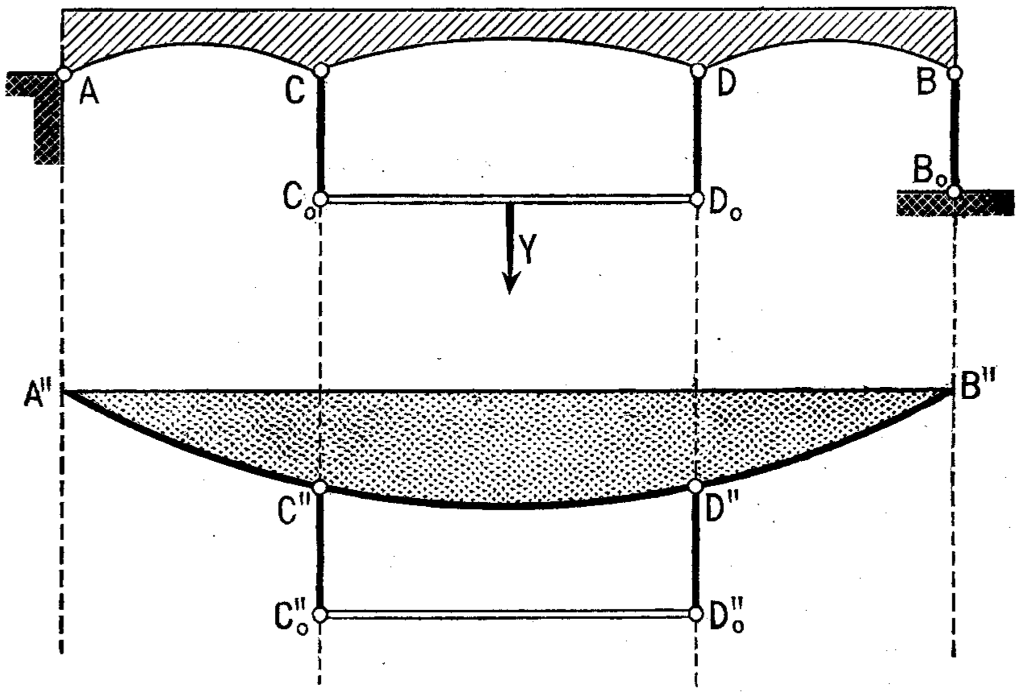

Fig. 142.

Applicata all'asta C_0D_0 una forza Y avente tale linea d'azione, e costruita la nuova deformata (fig. 142), si constaterà che in essa all'asta C_0D_0 compete una semplice traslazione.

La seconda deformata sarà la linea d'influenza della grandezza della risultante delle due reazioni incognite in C ed in D.

La prima sarà la linea d'influenza del momento loro per rapporto al punto O.

Dalla conoscenza di questi due elementi si potrà sempre e con tutta facilità risalire ai valori delle due reazioni.

Questo modo di procedere è per verità poco in uso fra i tecnici: tuttavia è fuor di dubbio che esso può, sotto certi aspetti, considerarsi come preferibile a quello generalmente adottato e da noi indicato a pag. 415.