

Il secondo principio di reciprocità.

Un teorema analogo a quello di Betti e che permette di introdurre nello studio dello stato di tensione di un solido elastico quegli stessi metodi che il teorema di Betti rende possibili nello studio delle deformazioni, si può stabilire se si riprendono in esame quelle variazioni di configurazione non congruenti, o almeno non compatibili coi vincoli, di cui ci siamo già occupati quando abbiamo dimostrato il teorema di Menabrea.

Ed ecco come.

Nello spazio V , certamente connesso, ed eventualmente anche a connessione multipla, occupato dal solido elastico, che supporremo in equilibrio sotto l'azione di un dato sistema di forze esterne, immaginiamo tracciato ad arbitrio un diaframma Σ , cioè una superficie contenuta tutta entro V , la quale non seghi sè stessa, ed abbia il suo contorno sulla superficie S del solido.

Se si suppone, lungo quel diaframma, operato un taglio nel corpo elastico dato, il primitivo stato di equilibrio di questo si può conservare, dopo il taglio, immutato, se si immaginano applicate alle due faccie del taglio due distribuzioni di forze, ovunque equivalenti alle tensioni interne che nel corpo dato inizialmente si trasmettevano attraverso la superficie Σ .

Nei riguardi del solido tagliato queste tensioni possono allora riguardarsi come delle forze esterne: se perciò indichiamo al solito con

$$X_n \quad Y_n \quad Z_n$$

le componenti secondo i tre assi coordinati, riferite come sempre all'unità di area, della forza superficiale che deve ritenersi applicata all'elemento generico di normale n della superficie Σ , e

se teniamo conto che le analoghe componenti per l'altra faccia dello stesso elemento risultano eguali a

$$-X_n \quad -Y_n \quad -Z_n$$

le condizioni di equilibrio del solido tagliato si possono notoriamente riassumere nella relazione

$$\begin{aligned} & \int_V (F_x \delta u + F_y \delta v + F_z \delta w) dV + \int_S (P_x \delta u + P_y \delta v + P_z \delta w) dS + \\ & + \int_\Sigma [X_n(\delta u_\alpha - \delta u_\beta) + Y_n(\delta v_\alpha - \delta v_\beta) + Z_n(\delta w_\alpha - \delta w_\beta)] d\Sigma = \\ & = \int_V \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y} \delta \varepsilon_y + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_z} \delta \varepsilon_z + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \delta \gamma_{yz} + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}} \delta \gamma_{zx} + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy} \right] dV \end{aligned}$$

nella quale

$$\begin{array}{ccc} \delta u_\alpha & \delta v_\alpha & \delta w_\alpha \\ \delta u_\beta & \delta v_\beta & \delta w_\beta \end{array}$$

stanno a denotare i valori delle componenti

$$\delta u \quad \delta v \quad \delta w$$

dello spostamento virtuale, relativi ad un punto generico di Σ considerato come appartenente all'una ovvero all'altra faccia del taglio.

Più precisamente, assunta al solito come positiva la direzione della normale ad S che è rivolta verso l'interno di V , si dovranno intendere contraddistinte coll'indice α le componenti dello spostamento di un punto di Σ se lo si considera come appartenente a quella faccia del taglio rispetto a cui la normale a Σ entra in V , e coll'indice β quelle relative allo stesso punto considerato come appartenente all'altra faccia del taglio, rispetto a cui la normale a Σ esce da V .

Noi supporremo che il moto relativo delle due faccie del taglio sia un semplice moto rigido nello spazio: vale a dire che alle differenze

$$\delta u_\beta - \delta u_\alpha \quad \delta v_\beta - \delta v_\alpha \quad \delta w_\beta - \delta w_\alpha$$

si possano rispettivamente attribuire espressioni del tipo

$$l' + q'z - r'y$$

$$m' + r'x - p'z$$

$$n' + p'y - q'x$$

con l', m', n', p', q', r' costanti.

E prenderemo in considerazione la variazione di configurazione che un tale spostamento relativo delle due faccie del taglio determina nel sistema, supposto provvisoriamente libero da ogni qualsiasi forza esterna.

Si può sempre pensare di realizzare fisicamente una tale variazione di configurazione: basta immaginare le due faccie del taglio saldate nella loro nuova posizione relativa, previa interposizione di un sottile strato resistente là dove lo spostamento produce un distacco, e sottrazione di materia là dove lo spostamento tende a produrre una sovrapposizione di parti.

Una simile variazione di configurazione implica in generale una vera e propria deformazione elastica, alla quale si dà il nome di *distorsione*.

Con ciò non si esclude però che, come caso speciale, la variazione di configurazione in discorso possa degenerare in un semplice moto rigido relativo di una parte del corpo rispetto all'altra: ciò può avvenire ogniqualevolta, per effetto del taglio praticato secondo Σ , lo spazio V cessa di essere connesso, se i vincoli imposti al sistema non sono sufficienti a definire la posizione nello spazio di tutte le singole parti in cui il solido risulta diviso.

La teoria delle distorsioni non degeneri è opera del Volterra, il quale ne ha stabiliti con successo i teoremi fondamentali che la ricollegano alla teoria delle ordinarie deformazioni ⁽¹⁾.

Dalle sue ricerche risulta immediatamente che date le sei costanti

$$l', m', n', p', q', r'$$

dette *caratteristiche della distorsione*, questa riesce completa-

⁽¹⁾ V. VOLTERRA, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*, "Ann. Éc. Norm." (3), XXIV, sept.-nov. 1907.

mente definita: si possono cioè determinare in modo unico le componenti

$$u', v', w'$$

di spostamento, e conseguentemente le sei componenti della deformazione

$$(\varepsilon_x)_1', (\varepsilon_y)_1', (\varepsilon_z)_1', (\gamma_{yz})_1', (\gamma_{zx})_1', (\gamma_{xy})_1'$$

e le corrispondenti sei componenti speciali di tensione

$$(\sigma_x)_1', (\sigma_y)_1', (\sigma_z)_1', (\tau_{yz})_1', (\tau_{zx})_1', (\tau_{xy})_1'$$

È notevole che, mentre gli spostamenti sono naturalmente discontinui su Σ , lo stato di deformazione e quello di tensione si presentano invece caratterizzati da valori delle loro componenti che sono sempre continui in tutto lo spazio V , non esclusi i punti della superficie Σ .

Ci troviamo qui precisamente in uno di quei casi che noi abbiamo già caratterizzati quando abbiamo introdotte le deformazioni non congruenti o almeno non compatibili coi vincoli.

Sotto questo punto di vista le distorsioni, quali si son qui definite, rientrano in quella più generale categoria di deformazioni, la cui esistenza noi abbiamo ammessa come possibile nello stato naturale [pag. 29].

Intanto l'equazione generale dell'equilibrio sopra scritta diviene

$$\begin{aligned} & \int_V (F_x u' + F_y v' + F_z w') dV + \int_S (P_x u' + P_y v' + P_z w') dS = \\ & - \int_\Sigma [X_n (l' + q'z - r'y) + Y_n (m' + r'x - p'z) + Z_n (n' + p'y - q'x)] d\Sigma = \\ & = \int_V \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} (\varepsilon_x)_1' + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y} (\varepsilon_y)_1' + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_z} (\varepsilon_z)_1' + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} (\gamma_{yz})_1' + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}} (\gamma_{zx})_1' + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} (\gamma_{xy})_1' \right] dV \end{aligned}$$

Ora è facile dimostrare che il secondo membro di questa equazione è identicamente nullo.

Invero consideriamo per un momento la distorsione come se fosse stata effettuata sul solido preso allo stato naturale.

Per l'equilibrio del sistema in queste condizioni deve evidentemente riuscire soddisfatta una equazione affatto analoga a quella scritta a pag. 302, ma in cui son da ritenersi nulle tutte le forze esterne così in V come in S .

Nulla ci vieta di applicare quella equazione assumendo per

$$\delta u, \delta v, \delta w$$

precisamente le componenti u, v, w degli spostamenti che nel sistema elastico dato abbiamo supposto prodotti dal dato sistema di forze esterne.

Allora, siccome questi spostamenti sono continui su Σ , in quella equazione si annullano non soltanto il primo ed il secondo, ma anche il terzo integrale.

Si ottiene così la condizione

$$\int_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} \right)' (\varepsilon_x)_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y} \right)' (\varepsilon_y)_1 + \dots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \right)' (\gamma_{xy})_1 \right] dV = 0$$

la quale, con un ragionamento affatto simile a quello che, in condizioni analoghe, abbiamo fatto per dimostrare il teorema di Betti [pag. 260], si riconosce equivalente alla relazione

$$\int_V \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} (\varepsilon_x)_1' + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y} (\varepsilon_y)_1' + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} (\gamma_{xy})_1' \right] dV = 0$$

che noi volevamo dimostrare.

Mettendo in evidenza le sei caratteristiche della distorsione, si ha dunque

$$\begin{aligned} & \int_V (F_x u' + F_y v' + F_z w') dV + \int_S (P_x u' + P_y v' + P_z w') dS = \\ & = \nu \int_\Sigma X_n d\Sigma + m' \int_\Sigma Y_n d\Sigma + n' \int_\Sigma Z_n d\Sigma + \\ & + p' \int_\Sigma (Z_n y - Y_n z) d\Sigma + q' \int_\Sigma (X_n z - Z_n x) d\Sigma + r' \int_\Sigma (Y_n x - X_n y) d\Sigma \end{aligned} \quad (118)$$

Tenuto conto che i sei integrali relativi a Σ non sono altro che le sei caratteristiche del sistema di tensioni che ivi si svi-

luppano nel solido dato sotto l'azione del dato sistema di forze esterne, si conclude che:

La somma dei prodotti delle sei caratteristiche del sistema di tensioni interne che in un corpo elastico in equilibrio si sviluppano in corrispondenza di una data sezione, per le corrispondenti caratteristiche di una distorsione, è eguale al lavoro che le forze esterne, applicate al corpo stesso, eseguirebbero nel cambiamento di configurazione a cui quella distorsione darebbe origine (1).

Sono particolarmente interessanti, dal punto di vista delle applicazioni, i casi particolari che si ottengono quando il moto relativo delle due faccie del taglio si riduce ad una semplice traslazione ovvero ad una semplice rotazione.

Supponiamo ad esempio che si tratti di una traslazione nella direzione dell'asse x , traslazione la cui grandezza si può per semplicità ritenere eguale all'unità: supponiamo cioè

$$l' = 1 \quad m' = n' = p' = q' = r' = 0$$

La (118) diviene immediatamente

$$\int_V (F_x u' + F_y v' + F_z w') dV + \int_S (P_x u' + P_y v' + P_z w') dS = \left. \begin{aligned} &= \int_\Sigma X_n d\Sigma \\ & \end{aligned} \right\} (119)$$

(1) Questo teorema venne da me enunciato per la prima volta nel 1912: la dimostrazione datane qui è posteriore di un paio d'anni (cfr. le mie note citate nella prefazione).

La reciprocità che esso stabilisce fra tensioni interne e deformazioni non congruenti era stata però, in qualche caso particolare, già intravista molti anni or sono dal LAND (cfr. W. LITKEK, *Anwendungen der graphischen Statik — Konstruktive Balken*, n. 28; ovvero anche: *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, IV, 2) il quale, pur senza riuscire a fondare il suo metodo su di una dimostrazione accettabile, ne aveva additate varie applicazioni, veramente molto interessanti, nei riguardi specialmente della teoria delle travi inflesse.

In ordine a queste applicazioni, e ad altre analoghe, immaginate in appresso da vari autori, è degna di menzione una nota dell'ALBENGA (*Sul teorema di reciprocità di Land*, « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. L, 1914-15) in cui il metodo di Land vien direttamente dedotto dal teorema di Betti.

Tenuto conto che la direzione dell'asse x è poi una direzione affatto arbitraria, si può concludere che:

La componente, secondo una qualunque direzione, del sistema di tensioni interne che in un corpo elastico in equilibrio si sviluppano in corrispondenza di una data sezione, è misurata dallo stesso numero che misura il lavoro che le forze esterne applicate al corpo stesso eseguirebbero qualora, tagliato il corpo in corrispondenza della data sezione, si imprimesse alle due faccie del taglio una traslazione relativa di grandezza unitaria nella direzione prescelta.

Supponendo invece

$$p' = 1 \quad v' = m' = n' = q' = r' = 0$$

si trova

$$\int_V (F_x u' + F_y v' + F_z w') dV + \int_S (P_x u' + P_y v' + P_z w') dS = \left. \begin{aligned} &= \int_{\Sigma} (Z_n y - Y_n z) d\Sigma \end{aligned} \right\} (120)$$

dunque:

Il momento, preso rispetto ad un qualsiasi asse, del sistema di tensioni interne che in un corpo elastico in equilibrio si sviluppano in corrispondenza di una data sezione, è misurato dallo stesso numero che misura il lavoro che le forze esterne applicate al corpo stesso eseguirebbero qualora, tagliato il corpo in corrispondenza della data sezione, si imprimesse alle due faccie del taglio una rotazione relativa di grandezza unitaria attorno all'asse prescelto.

Per verità, tanto le traslazioni che le rotazioni di grandezza unitaria sarebbero incompatibili colle ipotesi fondamentali relative alla piccolezza delle deformazioni. Questi teoremi vanno pertanto intesi nel senso che, ove la grandezza della traslazione o, rispettivamente, della rotazione sia eguale ad $\frac{1}{n}$ dell'unità, il lavoro eseguito dalle forze esterne dovrà moltiplicarsi per n .

L'analisi dei cambiamenti di configurazione determinati da un dato spostamento relativo delle due faccie di un taglio praticato attraverso ad un corpo elastico, riesce molto facile e spedita se nei riguardi delle dette due faccie sono verificate delle ipotesi analoghe a quelle che a suo tempo si sono introdotte per definire l'elemento terminale, e se inoltre il problema è riducibile in due dimensioni.

In tal caso, invero, tutte le considerazioni svolte a proposito dei sistemi piani si possono ripetere qui quasi immutate: si giunge così a dimostrare:

1° che se si applicano alle due faccie del taglio due sistemi di forze, tra loro eguali e contrarie, e del resto affatto arbitrarie, nella conseguente deformazione del sistema, le faccie stesse subiscono una rotazione *relativa* attorno ad un punto che è l'antipolo della linea d'azione della risultante delle forze applicate a ciascuna faccia rispetto ad una certa ellisse, la quale perciò verrà qui designata col nome di *ellisse degli spostamenti elastici relativi*;

2° che l'ampiezza di tale rotazione relativa è sempre proporzionale al momento della detta risultante preso rispetto al centro dell'ellisse, il coefficiente di proporzionalità essendo una costante del sistema che noi continueremo a chiamare *peso elastico*;

3° che se si immagina il peso elastico distribuito sul piano dato per modo che la sua ellisse centrale d'inerzia coincida coll'ellisse degli spostamenti elastici relativi, lo spostamento relativo di due punti qualunque, già coincidenti, delle due faccie del taglio, misurato secondo una direzione arbitraria, riesce eguale al prodotto della grandezza della anzidetta risultante per il momento di second'ordine del peso elastico stesso, preso rispetto alla linea d'azione di essa risultante ed a quella secondo cui si misura lo spostamento.

Tutto ciò che si è detto relativamente al procedimento generale che permette, coll'analisi di tre sole variazioni di configurazione convenientemente scelte, di determinare l'ellisse degli spostamenti elastici terminali, continua inoltre a sussistere nei riguardi dell'ellisse degli spostamenti elastici relativi.

Non è poi neppur detto che la costruzione dell'ellisse debba ripetersi in pratica tante volte quante sono le sezioni che si vogliono prendere in esame.

Chè anzi, nei casi più comuni, una medesima ellisse vale per tutto un sistema di sezioni, come risulta chiaramente dal seguente teorema:

Se due sezioni di un sistema piano staccano una porzione di solido non connessa col resto e non soggetta a vincoli esterni, ad esse corrisponde un medesimo peso elastico ed una medesima ellisse degli spostamenti elastici relativi.

Si immagini infatti praticato nel solido un taglio in corrispondenza della prima sezione, e sulle due faccie di esso applicate due distribuzioni di forze equipollenti alle tensioni interne che, attraverso alla sezione, si trasmettevano eventualmente prima del taglio; sulle stesse due faccie si aggiungano poi due nuove forze eguali e contrarie: e si suppongano noti così il centro della conseguente rotazione relativa dell'una faccia rispetto all'altra come l'ampiezza di tale rotazione.

È ben evidente che questo stato di cose non viene momentaneamente turbato se si suppone praticato un secondo taglio in corrispondenza della seconda sezione, purchè alle due faccie di esso si intendano applicate due distribuzioni di forze equipollenti alle tensioni interne che si trasmettono attraverso alla sezione stessa.

Ma, nelle ipotesi fatte, queste due distribuzioni di forze debbono necessariamente ottenersi sovrapponendo al sistema delle tensioni eventualmente preesistenti nella seconda sezione quelle stesse due forze eguali e contrarie che si sono immaginate agenti sulle due faccie del primo taglio.

Ciò premesso, si pensi di imprimere al tronco di solido staccato dalle due sezioni un moto rigido capace di riportare a contatto l'una dell'altra le due faccie del primo taglio.

Questo moto, mentre (per la caratteristica sua piccolezza) non altera le primitive condizioni di equilibrio elastico dei singoli elementi deformati che compongono il tronco in questione, fa subire ad una delle faccie del secondo taglio una rotazione avente la medesima ampiezza ed il medesimo centro della rotazione relativa inizialmente effettuata in corrispondenza della prima sezione.

Per altra parte non v'è dubbio che la configurazione a cui si perviene è quella stessa che il sistema avrebbe assunto spontaneamente qualora, restando intatta la prima sezione, si fosse praticato soltanto il taglio in corrispondenza della seconda, e sulle due faccie di esso si fossero, alle solite tensioni preesistenti, sovrapposte le due forze prescelte.

La corrispondenza tra la linea d'azione di queste forze ed il punto che funziona da centro delle rotazioni relative non dipende adunque, nelle ipotesi fatte, dalla posizione della sezione: lo stesso può dirsi della costante (peso elastico) che definisce l'ampiezza di quelle rotazioni.

Nel caso, particolarmente interessante nelle costruzioni, dell'arco elastico incastrato ad entrambi gli estremi esiste un'unica ellisse degli spostamenti elastici relativi (con un unico peso elastico) valevole per tutte le sezioni.

E se si tien conto che tra queste infinite sezioni si possono anche annoverare le due estreme, adiacenti agli incastri, per le quali gli spostamenti relativi delle due faccie del taglio si riducono ovviamente agli spostamenti assoluti della faccia estrema dell'arco, si può aggiungere che quell'ellisse non differisce dall'ellisse di elasticità quale si otterrebbe supponendo mantenuto l'incastrato ad uno solo degli estremi dell'arco, l'altro estremo fungendo da elemento terminale.

* * *

Per comprendere tutta l'importanza delle considerazioni che siamo venuti a poco a poco sviluppando conviene riferirsi al solito caso particolare: il solido cilindrico della teoria di Saint-Venant.

Già abbiamo visto come, coll'aiuto del teorema di Betti, si potesse iniziare con successo lo studio dell'equilibrio di un tal solido anche quando le forze, invece di essere limitate alle due basi, si trovano comunque distribuite su tutta la sua lunghezza.

Faremo ora un secondo passo innanzi generalizzando anche le condizioni di vincolo ed affrontando il problema dell'equilibrio elastico in quei casi in cui esso si presenta staticamente indeterminato.

E dimostreremo come, col sussidio del secondo principio di reciprocità, anche questo problema possa ridursi allo studio di certe deformazioni le quali rientrano completamente nell'ambito di quelle che noi abbiamo discusse ed analizzate nella Parte Seconda di questo volume.

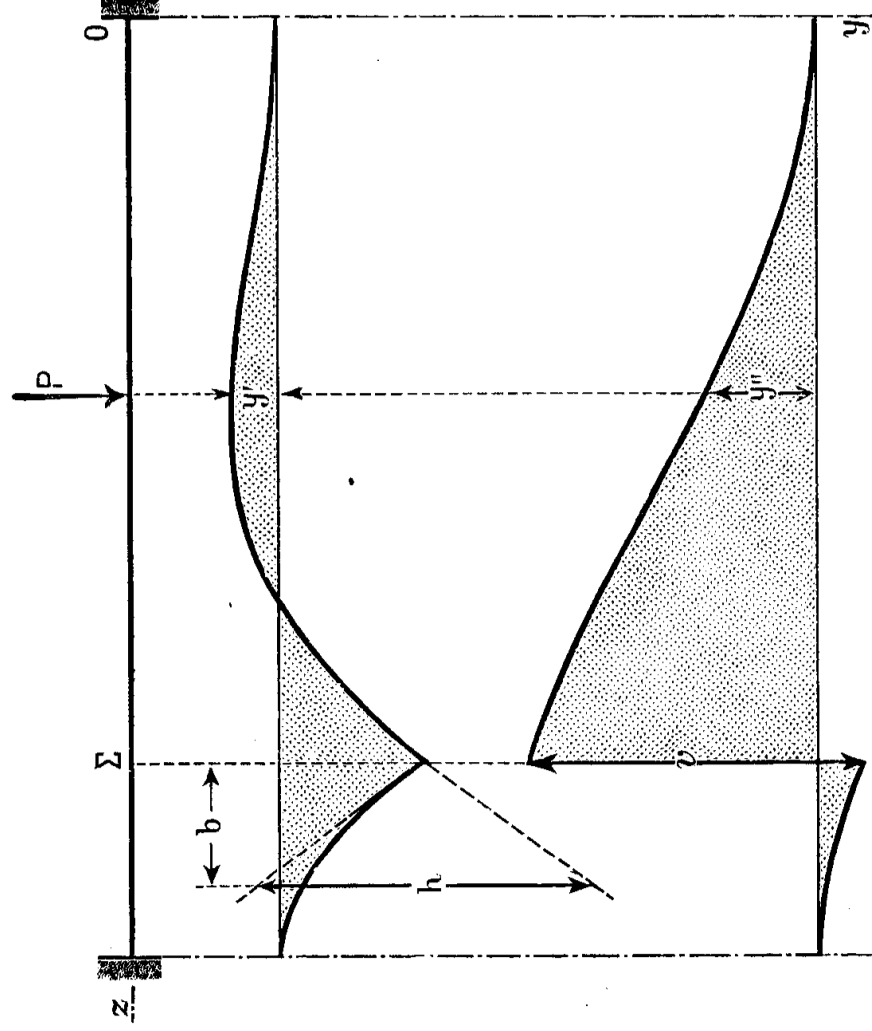


Fig. 56.

Riferiamoci, tanto per fissar le idee, al caso in cui il cilindro sia incastrato in corrispondenza di entrambe le basi, e venga sollecitato da una forza P , normale al suo asse, per es. parallelamente all'asse y (fig. 56).

Noi sappiamo che il problema dell'equilibrio è da considerarsi come praticamente risolto se si riesce ad identificare le caratteristiche dello stato di tensione relative ad una sezione retta qualunque Σ .

Ivi la forza P produrrà in generale un momento flettente \mathcal{M} ed uno sforzo tagliante \mathcal{T} , la grandezza dei quali si potrà determinare immaginando praticato il solito taglio in corrispon-

denza di Σ e costringendo le due faccie di esso ad una rotazione relativa attorno all'asse principale centrale d'inerzia parallelo ad x , e ad una traslazione relativa nella direzione di y .

Si ottengono così due deformate del tipo di quelle disegnate in figura (le scale delle ordinate sono naturalmente ben distinte dalla scala delle ascisse).

Ora se la rotazione relativa delle due faccie del taglio fosse nella prima deformata eguale all'unità, il prodotto della grandezza P della forza applicata per l'ordinata y' della deformata, misurata sulla sua linea d'azione, dovrebbe, secondo la (120), misurare il momento flettente \mathcal{M} .

Nella figura, la rotazione in questione è da considerarsi eguale ad $\frac{h}{b}$; il momento \mathcal{M} sarà dunque misurato da

$$P \frac{y'b}{h}$$

In modo analogo se la traslazione relativa presentata dalle due faccie del taglio nella seconda deformata fosse eguale all'unità, si dovrebbe, secondo la (119), ottenere lo sforzo tagliante \mathcal{T} moltiplicando la grandezza P della forza data per l'ordinata y'' ad essa sottostante.

Nella figura quella traslazione è stata indicata con v ; lo sforzo \mathcal{T} dovrà dunque intendersi misurato da

$$P \frac{y''}{v}$$

Con ciò il problema proposto è dunque risolto qualunque sia la grandezza della forza P , anzi più generalmente qualunque sia il sistema di forze come P che agiscono sul solido.

Se P è costante in grandezza, e si muove lungo la trave spostandosi parallelamente a se stessa, le due deformate da noi tracciate forniscono colle loro ordinate, lette in scale opportune, i valori del momento flettente e dello sforzo tagliante nella sezione Σ : esse prendono perciò il nome di *linee di influenza delle caratteristiche delle tensioni interne* relative a quella sezione.

Queste linee, insieme colle linee d'influenza delle deformazioni, di cui abbiamo presentato un esempio tra le applicazioni

del teorema di Betti, costituiscono la più interessante e completa documentazione che del comportamento statico di un sistema elastico si possa dare.

Ritorniamo ora col pensiero al caso, assai più generale, dell'arco elastico incastrato ad entrambi gli estremi, di cui stavamo poc'anzi discorrendo.

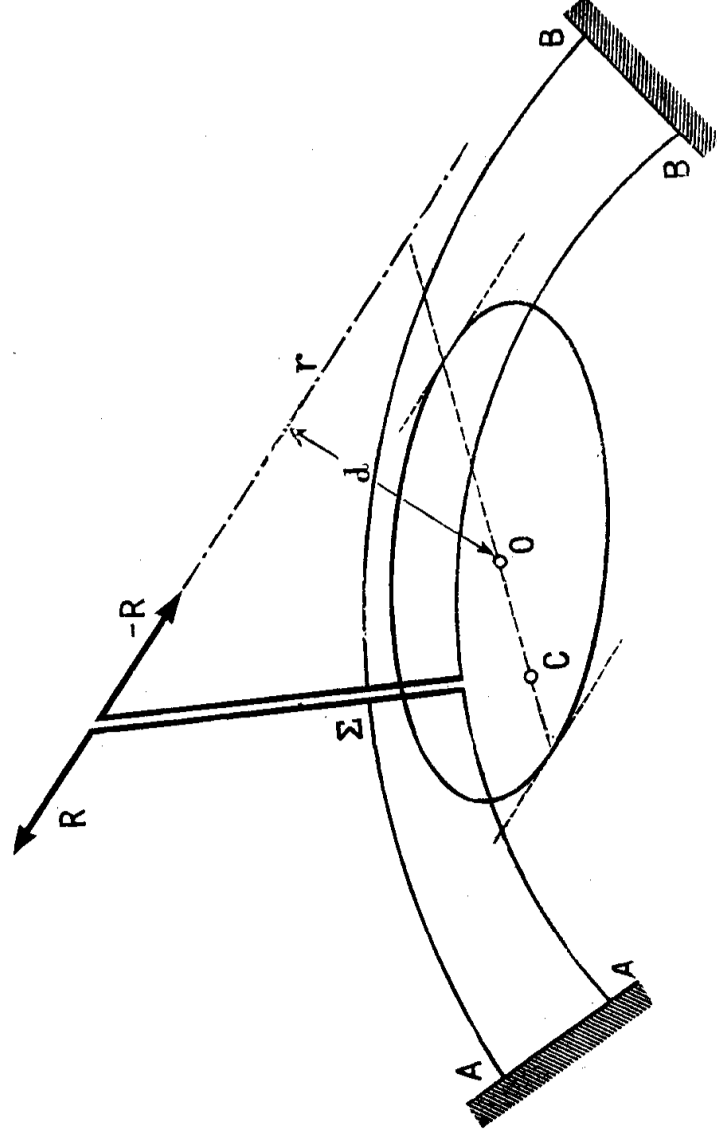


Fig. 57.

Ed immaginiamo praticato in corrispondenza di una sua sezione generica Σ (fig. 57) il solito taglio, e costrette poi le due faccie di esso ad uno spostamento relativo, per esempio ad una rotazione relativa (di grandezza unitaria) attorno ad un determinato punto C .

Noi sappiamo bene, ormai, come un tal risultato si ottenga: basta applicare alle due faccie del taglio due sistemi di forze, tra loro eguali e contrarie, tali che la linea d'azione r della risultante delle forze agenti su ciascuna faccia sia l'antipolare del punto C rispetto all'ellisse degli spostamenti elastici relativi.

E poichè in tesi generale l'ampiezza della rotazione è misurata dal prodotto del peso elastico W per il momento $R \cdot d$ della suddetta risultante preso rispetto al centro O dell'ellisse, si otterrà la voluta rotazione unitaria imponendo la condizione

$$W \cdot R \cdot d = 1$$

vale a dire assumendo

$$R = \frac{1}{Wd}$$

La costruzione della deformata dell'asse geometrico dell'arco, così diviso in due tronchi indipendenti e sollecitati da forze note in corrispondenza delle loro sezioni terminali, non presenta più alcuna difficoltà.

D'altra parte la deformata stessa è immediatamente interpretabile come linea d'influenza del momento del sistema di tensioni interne che si trasmettono attraverso alla sezione considerata Σ per rapporto al centro arbitrario C .

Attraverso differenti scelte opportune del punto C il procedimento si presta, in pratica, alle più interessanti applicazioni. Ci limitiamo qui a segnalarne una sola — la più ovvia di tutte — quella cioè a cui si perviene facendo coincidere C col baricentro della sezione considerata.

* * *

APPLICAZIONE — TAVOLA XIX.

Tracciamento della linea d'influenza del momento flettente in una sezione generica di un arco elastico incastrato ad entrambi gli estremi.

L'arco è stato disegnato in figura nella scala 1:270; nella stessa figura si sono tracciati gli assi delle ellissi di elasticità di ciascuno dei diciotto tronchi in cui lo si è supposto suddiviso, nonchè quelli della ellisse degli spostamenti elastici relativi che, come abbiamo a suo tempo dimostrato, non è altro che l'ellisse centrale d'inerzia della distribuzione di pesi elastici definita dalle diciotto ellissi parziali.

Non ci soffermeremo dunque su questa parte preliminare della ricerca, e verremo subito alla parte di essa che qui direttamente ci interessa, vale a dire alla costruzione della linea d'influenza del momento flettente per una sezione determinata.

Le operazioni da compiersi si riducono sostanzialmente a tre.

In un primo tempo si cercherà l'antipolare del baricentro della sezione rispetto all'ellisse degli spostamenti elastici relativi.

In secondo luogo si disporranno tutti i pesi elastici parziali parallelamente a tale antipolare e si collegheranno con un primo poligono funicolare di distanza polare λ , e si prolungheranno i lati di esso fino ad intercettare su quella retta i soliti segmenti proporzionali ai momenti statici di quei pesi elastici rispetto ad essa.

Finalmente si considereranno detti momenti statici come nuove forze applicate per es.: verticalmente, negli antipoli della solita retta per rapporto alle singole ellissi parziali di elasticità e si collegheranno con due poligoni funicolari di egual distanza polare e relativi alle due porzioni in cui l'arco è rimasto diviso dalla sezione considerata, disponendo della libertà di scelta dei due poli in modo che ciascuna delle due deformate che si ottengono soddisfi alle condizioni di vincolo imposte a ciascuna porzione di arco dall'incastrò a cui, dopo il taglio, essa è rimasta connessa.

Siccome le due faccie del taglio devono per ipotesi subire soltanto una rotazione relativa, le ordinate dei due poligoni, sulla verticale del baricentro della sezione considerata, dovranno risultare identicamente eguali.

L'angolo sotto cui essi si incontrano dovrebbe essere eguale all'unità. Ciò si può sempre ottenere con una opportuna scelta della distanza polare μ con cui i poligoni stessi sono stati costruiti.

Se invece μ è stata scelta ad arbitrio, e quindi la rotazione dell'una faccia del taglio rispetto all'altra ha assunto un valore differente dall'unità, si potrà sempre valutare questo valore a cose fatte facendo, per esempio, il rapporto della distanza $P'P''$ alla distanza polare μ .

Si assumerà allora come valore del momento flettente \mathcal{M} dovuto ad un carico verticale agente sull'arco il prodotto della

intensità del carico per l'ordinata della deformata *letta nella scala del disegno* (1:270) e ridotta nel rapporto

$$\frac{P' P''}{\mu}$$

Nella nostra Tavola questo rapporto è eguale a 2,7; si otterrà dunque il momento \mathcal{M} moltiplicando il carico per l'ordinata *letta nella scala*:

$$\frac{2,7}{270} = \frac{1}{100}$$

TAVOLA XIX

(pag. 316).

Tracciamento della linea d'influenza del momento flettente in una sezione generica di un arco elastico incastrato ad entrambi gli estremi.

