V.

Estensione e flessione.

Abbiamo visto che tanto nell'estensione semplice come nella semplice flessione, su ciascuna sezione retta si sviluppano soltanto tensioni normali.

Ora è assai facile dimostrare che tutte le deformazioni che soddisfano a tale condizione si possono ridurre all'uno o all'altro di quei due tipi o ad una loro combinazione.

Supponiamo infatti che in una data deformazione del cilindro, soddisfacente, s'intende, alle condizioni generali che noi abbiamo stabilite una volta per tutte, si abbia in ogni punto

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

La stessa condizione dovrà in particolare verificarsi sulla base libera $z = l$ sulla quale pertanto, per le (52) si avrà

$$P_x = P_y = 0$$

Le azioni esterne ad essa base applicate dovranno dunque esser tutte normali, cioè dirette parallelamente all'asse delle z parallela a questo medesimo asse riescirà in conseguenza anche la loro risultante, la quale potrà quindi in ogni caso individuarsi mediante una forza

$$\mathcal{N} = \int P_z \, dA$$

avente per linea d'azione l'asse delle z, e due coppie di momenti

$$\mathcal{M} = \int P_z y \, dA$$

$$\mathcal{M}' = \int P_z x \, dA$$

giacenti nei due piani coordinati yz ed xz. La forza $\mathcal{N}$ produrrebbe, se agisse da sola, una semplice estensione e, secondo la (58), darebbe origine alle tensioni

$$\sigma_z = \frac{\mathcal{N}}{A}$$

La coppia di momento $\mathcal{M}$, agendo da sola, provocherebbe invece una flessione semplice nella quale le tensioni sarebbero definite dalla (62)

$$\sigma_z = \frac{\mathcal{M} y}{J}$$

La coppia di momento $\mathcal{M}'$ provocherebbe infine un'altra flessione semplice, affatto analoga alla precedente, nella quale però i due assi coordinati y ed x si scambierebbero le loro funzioni rispettive di asse di sollecitazione e di asse neutro. Le tensioni interne prodotte dalla sola coppia di momento $\mathcal{M}'$ si otterrebbero dunque dalla stessa (62) scambiandovi y con x, e sarebbero perciò del tipo

$$\sigma_z = \frac{\mathcal{M}' x}{J'} \tag{63}$$

J' essendo il momento d'inerzia della sezione rispetto al suo asse principale centrale parallelo ad y.

Ciò posto osserviamo che in virtù del principio di sovrapposizione degli stati di equilibrio [pag. 52] non soltanto le componenti di spostamento per la sollecitazione composta possono ottenersi sommando algebricamente le analoghe componenti relative alle singole sollecitazioni semplici che in essa coesistono, ma lo stesso può farsi per le loro derivate prime e quindi anche per le componenti della deformazione nonchè per tutte le loro funzioni *lineari* come sarebbero le componenti speciali di tensione.

Si avrà dunque nel caso che ora ci occupa

$$\sigma_z = \frac{\mathcal{N}}{A} + \frac{\mathcal{M} y}{J} + \frac{\mathcal{M}' x}{J'} \tag{64}$$

*
* *

Questa espressione non dipende da z, dunque la legge di distribuzione delle tensioni interne è identica per tutte le sezioni rette del cilindro.

Prendiamo in considerazione una qualunque di queste sezioni: indichiamo con

$$\varrho = \sqrt{\frac{J}{A}} \qquad \varrho' = \sqrt{\frac{J'}{A}}$$

i suoi raggi principali d'inerzia, e con

$$x_1 = \frac{\mathcal{M}'}{\mathcal{N}} \qquad y_1 = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{N}}$$

le coordinate del punto P_1 in cui essa è incontrata dalla linea d'azione della risultante delle forze esterne elementari applicate ai singoli elementi superficiali della base libera.

Scritta la (64) sotto la forma

$$\sigma_z = \frac{\mathcal{N}}{A}\left(1 + \frac{y_1}{\varrho^2}\, y + \frac{x_1}{\varrho'^2}\, x\right) \tag{65}$$

risulta chiaro che la tensione normale si annulla in tutti i punti di una retta n che ha per equazione

$$\frac{x_1}{\varrho'^2}\, x + \frac{y_1}{\varrho^2}\, y = -1$$

e che perciò è completamente definita quando è nota la sezione e, su di essa, la posizione del punto P_1.

Questa equazione stabilisce anzi tra il punto P_1, che noi denoteremo d'or innanzi col nome di *centro di sollecitazione*, e la retta n, a cui, per analogia a quanto si è fatto nel caso della flessione semplice, noi continueremo a dare il nome di *asse neutro*, una corrispondenza biunivoca che vien chiamata *antipolarità rispetto all'ellisse centrale della sezione* perchè è il prodotto di una simmetria rispetto al baricentro 0, per la polarità che ha quell'ellisse per conica fondamentale.

Ed invero se nell'equazione che definisce l'asse neutro si fanno comparire le coordinate

$$x_2 = -x_1 \quad . \quad y_2 = -y_1$$

del punto P_2 simmetrico del centro di sollecitazione P_1 rispetto ad 0 (fig. 13), si ha

$$\frac{x_2}{\varrho'^2} x + \frac{y_2}{\varrho^2} y = 1$$

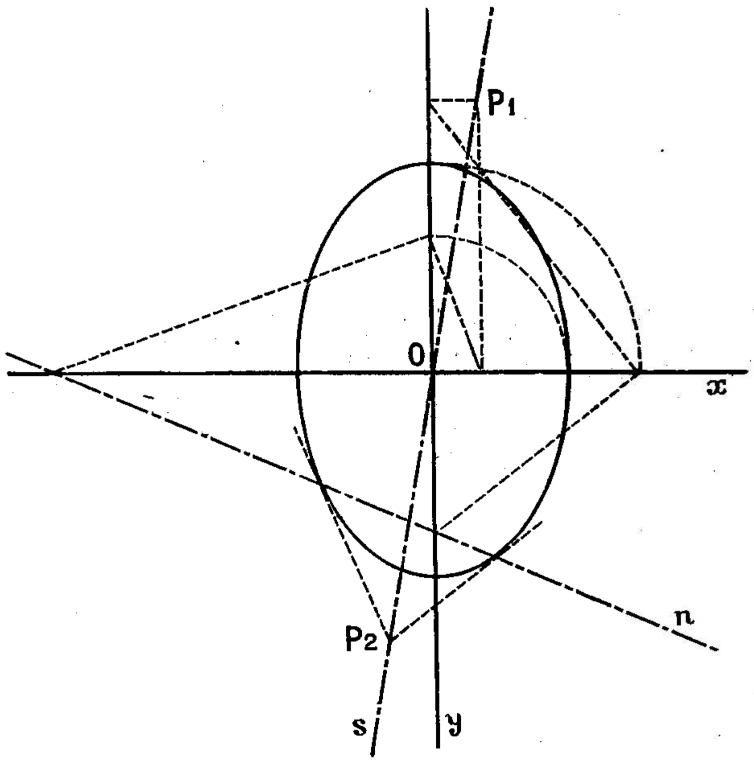


Fig. 13.

e la corrispondenza così definita tra le rette n ed i punti P_2 è la polarità che ha per luogo degli elementi uniti la conica

$$\frac{x^2}{\varrho'^2} + \frac{y^2}{\varrho^2} = 1$$

cioè l'ellisse centrale della sezione.

In questa corrispondenza la direzione dell'asse neutro n è la coniugata della direzione della congiungente P_1O la quale prende il nome di *asse di sollecitazione.*

Ne segue che se il punto P_1 si sposta sulla retta che lo congiunge ad O, la direzione dell'asse n non muta: esso si sposta nel piano mantenendosi parallelo a se stesso.

Più precisamente se il centro di sollecitazione si allontana dal baricentro, l'asse neutro si avvicina ad esso; se il centro di sollecitazione si avvicina, l'asse neutro si allontana: in ogni caso essi si mantengono da parti opposte rispetto ad O. Per convincersene basta osservare che la retta n incontra gli assi coordinati x ed y nei punti che hanno rispettivamente per ascissa e per ordinata

$$-\frac{\varrho'^2}{x_1} \quad \text{e} \quad -\frac{\varrho^2}{y_1}$$

Di qui segue anche una semplicissima costruzione grafica la quale permette di determinare la posizione dell'asse neutro ogniqualvolta sia noto il centro di sollecitazione.

Si proietti infatti questo centro di sollecitazione su uno degli assi, per es. sull'asse x: poi si porti sull'altro asse a partire da O un segmento eguale a ϱ', e dall'estremo di questo segmento si conducano la retta che va all'anzidetta proiezione e la sua perpendicolare. Si vede subito che quest'ultima dovrà incontrare l'asse x precisamente nel punto suo di intersezione coll'asse neutro.

La stessa costruzione, eseguita a ritroso, permette di determinare la posizione del centro di sollecitazione quando è noto l'asse neutro.

* * *

Riprendiamo l'equazione dell'asse neutro

$$\frac{x_1}{\varrho'^2} x + \frac{y_1}{\varrho^2} y + 1 = 0$$

La distanza di un punto generico del piano, di coordinate x, y, da questa retta è data dalla formola

$$d = \frac{\frac{x_1}{\varrho'^2} x + \frac{y_1}{\varrho^2} y + 1}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{\varrho'^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{\varrho^2}\right)^2}}$$

ove il radicale s'intende sempre positivo: essa risulta perciò positiva per tutti i punti che si trovano da una data parte dell'asse neutro, negativa per quelli che si trovano dall'altra.

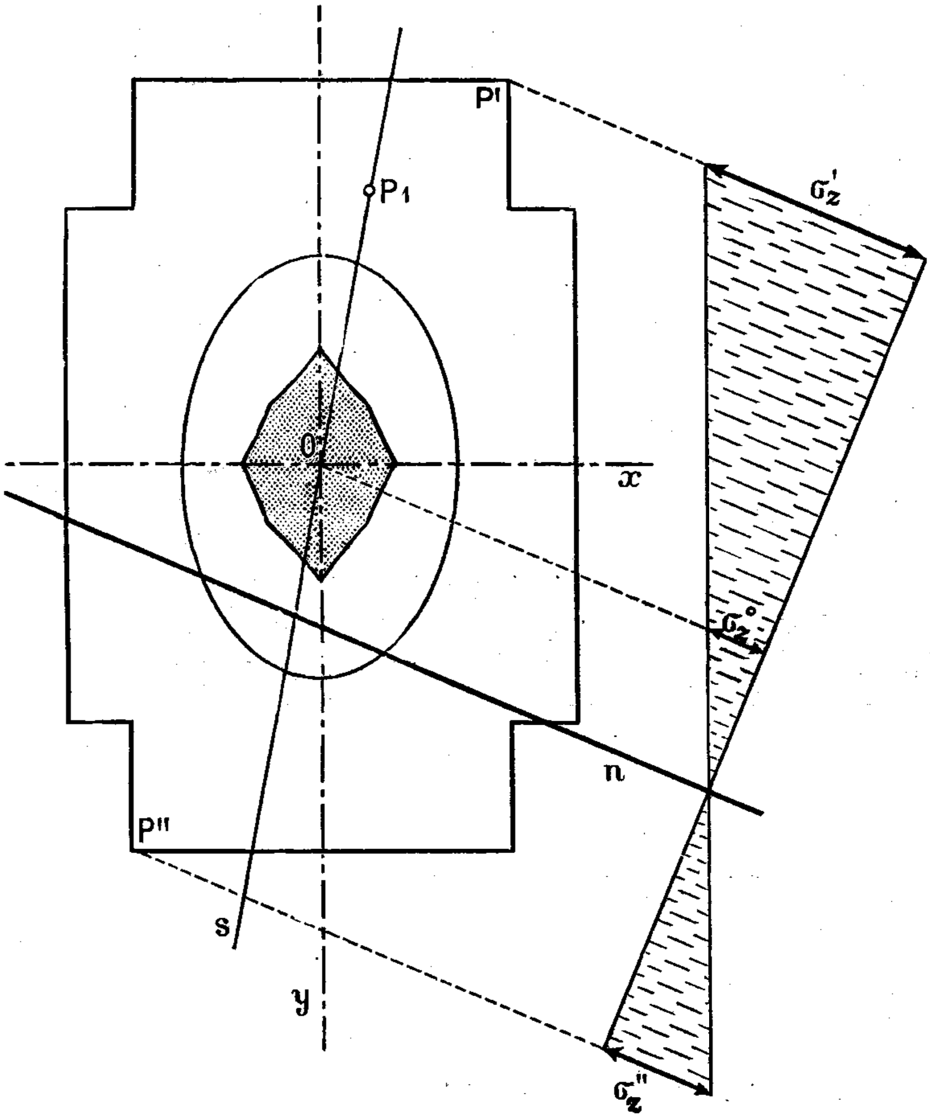


Fig. 14.

Scrivendo pertanto la (65) sotto la forma

$$\sigma_z = \frac{\mathcal{N}}{A} d \sqrt{\left(\frac{x_1}{\varrho'^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{\varrho^2}\right)^2} \tag{66}$$

si può senz'altro affermare che, anche in questo caso, come già nel caso della semplice flessione, l'asse neutro divide la sezione in due regioni l'una delle quali è soggetta a soli sforzi di trazione, l'altra a soli sforzi di compressione.

S'intende che ciò avverrà effettivamente solo se l'asse neutro *taglia* la sezione, poichè nel caso in cui esso riesca ad essa esterno o tangente, purchè in modo da lasciarla tutta da una sola banda, gli elementi materiali che la compongono risulteranno o tutti tesi o tutti compressi.

Di qui il grande interesse che ha nelle applicazioni il precisare subito se l'asse neutro taglia o non la sezione.

Si usa prendere a questo scopo in considerazione la regione del piano luogo dei punti le cui antipolari rispetto all'ellisse centrale d'inerzia non tagliano la sezione: questa regione (punteggiata nella fig. 14) prende il nome di *nocciolo centrale* della sezione.

Essa contiene sempre il baricentro (antipolo della retta all'infinito del piano) ed è limitata da una linea chiusa luogo dei punti le cui antipolari toccano la sezione *senza tagliarla.*

La condizione necessaria e sufficiente perchè la sezione retta di un cilindro sollecitato a sforzo normale eccentrico sia soggetta a tensioni tutte del medesimo segno si esprime adunque imponendo che la linea d'azione della risultante delle forze esterne incontri il piano della sezione nell'interno o tutt'al più sul contorno del nocciolo centrale.

***

L'ultima espressione scritta (66) della tensione σ_z fa vedere chiaramente come questa, per una data sezione e per una data sollecitazione, varii proporzionalmente alla distanza dall'asse neutro.

Essa raggiungerà dunque i massimi valori in corrispondenza dei punti della sezione che sono più lontani da quell'asse.

In generale saranno da prendersi in considerazione due massimi, uno positivo e l'altro negativo, corrispondenti agli elementi materiali che sono maggiormente tesi ovvero maggiormente compressi.

La determinazione di questi massimi, la quale è del più alto interesse per l'ingegnere in quanto si ricollega direttamente allo studio delle condizioni di resistenza del materiale elastico di cui il corpo è formato, si può fare vantaggiosamente per via grafica.

Da quanto si è detto risulta infatti chiaramente che, su ogni parallela all'asse neutro, la tensione σ_z deve mantenersi costante.

In particolare sulla parallela all'asse neutro condotta pel baricentro, la σ_z deve aver quel valore che si ottiene dalla (64) facendovi $x = y = 0$, cioè

$$\sigma_z = \frac{\mathcal{N}}{A}$$

Se pertanto su questa parallela si segna un segmento $\sigma_z{}^0$ (fig. 14) il quale rappresenti in una data scala il valore del rapporto $\frac{\mathcal{N}}{A}$, le due rette che da un punto dell'asse neutro ne proiettano gli estremi, intercettano su qualunque altra parallela un segmento il quale misurerà, nella medesima scala, il valore di σ_z relativo ai punti situati lungo di essa.

Sulle tangenti al contorno della sezione, condotte parallelamente all'asse neutro, si otterranno in particolare i massimi $\sigma_z{}'$ e $\sigma_z{}''$ a cui testè si accennava.

***

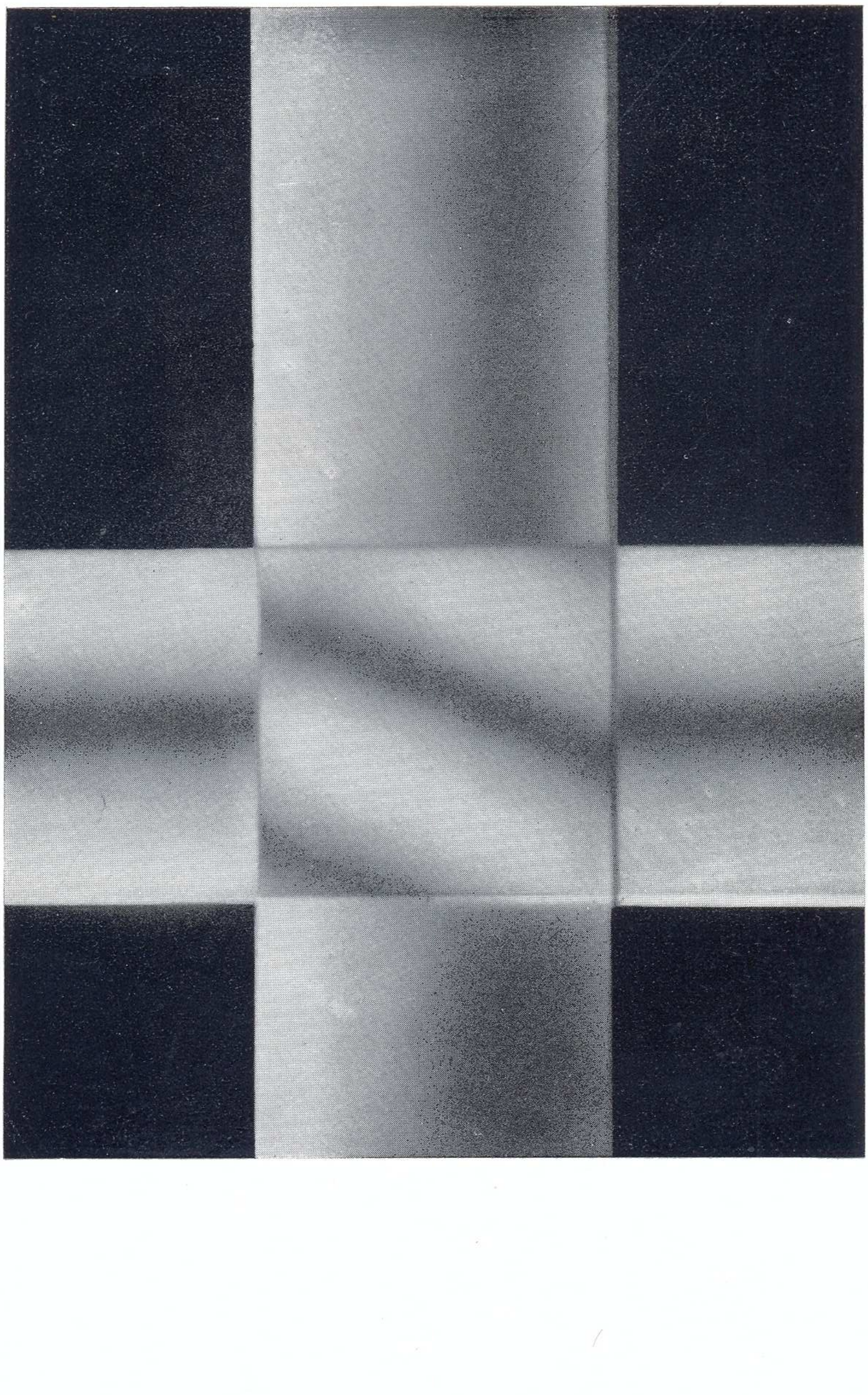
Tutti i risultati che siamo venuti stabilendo possono essere sperimentalmente verificati sul prisma di vetro di cui abbiamo parlato nel capitolo II.

A tal fine si osservi una regione del prisma situata a sufficiente distanza dalle due basi, dopo di aver ruotati i due nicols di 45° per modo che la bissettrice di uno degli angoli formati dai loro due assi sia parallela all'asse geometrico del prisma.

Si riesce così a mettere in evidenza la posizione del piano neutro (luogo degli assi neutri), in corrispondenza del quale la luce resta completamente intercettata.

La legge di variazione delle tensioni da una parte e dall'altra di quel piano si può poi facilmente determinare facendo uso di un *compensatore di Babinet.* Questo apparecchio consta essenzialmente di due lastre di quarzo tagliate in forma di cunei identici ma orientati l'uno nella direzione dell'asse del cristallo, l'altro in direzione perpendicolare, e poi sovrapposti per modo da formare un tutto di spessore costante.

Osservato fra un polarizzatore ed un analizzatore incrociati in posizione tale che l'asse suo non sia parallelo nè all'uno nè



all'altro dei piani di polarizzazione, il compensatore di Babinet presenta una retta oscura (detta retta neutra del compensatore) laddove le due lastre hanno egual spessore: ivi dunque esso si comporta come del semplice vetro non soggetto ad alcuno sforzo.

Da una parte e dall'altra di quella retta il compensatore si comporta invece come vetro soggetto a sforzi rispettivamente dell'uno o dell'altro segno e di intensità proporzionali alla distanza da essa. Se pertanto noi incrociamo il compensatore col nostro prisma soggetto a pressione eccentrica vediamo le regioni oscure del campo spostarsi: esse vengono ad occupare quelle posizioni in corrispondenza delle quali gli effetti del compensatore compensano gli effetti del vetro deformato.

Si ottiene così, come si vede nella tavola VII, un vero e proprio diagramma delle tensioni interne nel prisma, dal quale, note che siano le caratteristiche del compensatore, si possono senz'altro dedurre le grandezze delle singole tensioni.

A noi basta far osservare che la linea oscura, discendente da sinistra verso destra, che attraversa la regione in cui il prisma ed il compensatore stanno sovrapposti, appare rigorosamente rettilinea: il che vuol dire che le tensioni interne variano effettivamente con legge lineare.

Nel caso in cui il centro di sollecitazione cade nell'interno del nocciolo centrale della sezione, questa non è tagliata dall'asse neutro: il prisma osservato senza compensatore non presenterebbe alcuna regione oscura: col compensatore si vedrà comparire un tratto di retta oscura situato tutto da una parte della sua retta neutra che si può sempre osservare tanto a sinistra che a destra del prisma.

Il punto d'incontro di queste due rette servirà allora ad individuare la posizione dell'asse neutro.

* * *

Poco v'è da aggiungere nei riguardi della deformazione le cui caratteristiche (componenti di spostamento) si ottengono combinando le (57) e le (60) in base al principio di sovrapposizione degli stati di equilibrio non diversamente da quanto si è fatto a pag. 136 a proposito delle tensioni interne. Noi ci limiteremo a considerare i baricentri delle singole sezioni ($x = y = 0$) pei quali si ha

$$u = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{M}'}{EJ'}z^2$$

$$v = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{M}}{EJ}z^2$$

$$w = \frac{\mathcal{N}}{EA}z$$

Le variazioni di lunghezza del cilindro, misurate sull'asse geometrico, non differiscono dunque da quelle che si verificherebbero se lo sforzo $\mathcal{N}$ avesse tale asse per linea d'azione.

Siccome poi le sezioni rette, come si constata facilmente, si mantengono piane, le variazioni di lunghezza dell'asse si possono sempre valutare come media aritmetica delle variazioni di lunghezza di due qualisiansi fibre a detto asse parallele e simmetricamente disposte rispetto ad esso. Di qui la possibilità, già accennata a suo tempo, di utilizzare le esperienze a trazione od a compressione per la determinazione del modulo di elasticità normale anche quando la sollecitazione non riesce perfettamente centrata.

Dalle espressioni di u e di v si ricava poi, dividendo membro a membro,

$$u : v = \frac{\mathcal{M}'}{J'} : \frac{\mathcal{M}}{J} = \frac{x_1}{\varrho'^2} : \frac{y_1}{\varrho^2}$$

Lo spostamento del baricentro di una qualunque sezione ha dunque sempre una direzione perpendicolare a quella dell'asse neutro.

Se ne conclude che la linea elastica giace sempre in un piano, a cui gli assi neutri delle singole sezioni rette sono perpendicolari.

Esso prende il nome di *piano di flessione* e in generale non coincide col piano di sollecitazione.

Questa coincidenza si verifica soltanto quando il piano di sollecitazione contiene uno degli assi coordinati x od y, nel qual caso l'asse neutro assume, come ben sappiamo, la direzione dell'altro di quei due assi.