

le dimensioni di un peso elastico e due fattori aventi le dimensioni di una lunghezza.

Dei tre seguenti λ , μ ed y del disegno, uno dunque, p. es. λ , si dovrà leggere nella scala adottata per la rappresentazione grafica dei pesi elastici, mentre gli altri due, μ ed y , si leggeranno nella scala delle lunghezze, vale a dire nella scala adottata per rappresentare in disegno la trave.

Volendo che lo spostamento cercato sia senz'altro misurato dall'ordinata y del secondo poligono funicolare, basta valersi dell'arbitrarietà di scelta delle distanze polari, ed assumere per esempio

$$\mu = \frac{1}{P \cdot \lambda}$$

ciò che non contraddice alle condizioni sopra enunciate perchè, quando a λ si attribuiscono le dimensioni di un peso elastico (cioè dell'inverso del prodotto di una forza per una lunghezza), μ viene ad essere omogeneo con una lunghezza.

Se poi, come accadrà sempre in pratica per le ragioni che in un'analogia occasione abbiamo già avuto campo di esporre a pag. 235, si ha bisogno che l'ordinata y rappresenti lo spostamento ingrandito ξ volte *rispetto alla scala del disegno*, si sceglieranno le distanze polari in modo che risulti

$$\mu = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{P \cdot \lambda}$$

* * *

Abbiamo voluto discutere ed illustrare in tutte le sue particolarità questo importante procedimento grafico per l'analisi delle deformazioni di una trave, soffermandoci di proposito sul caso, evidentemente molto particolare, in cui la trave è sollecitata da un'unica forza, in vista della eccezionale importanza che, proprio a questo caso particolare, vien conferita dal fatto dell'essere il diagramma degli spostamenti dei singoli punti dell'asse geometrico, in virtù del teorema di Betti, interpretabile come linea d'influenza dello spostamento che un punto ben determinato subisce al muoversi del carico.

Poche parole basteranno per far vedere come lo stesso pro-

cedimento grafico possa — sia pure a prezzo di qualche lieve complicazione — adattarsi al caso in cui, invece di un'unica forza P , ve ne sono parecchie:

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$$

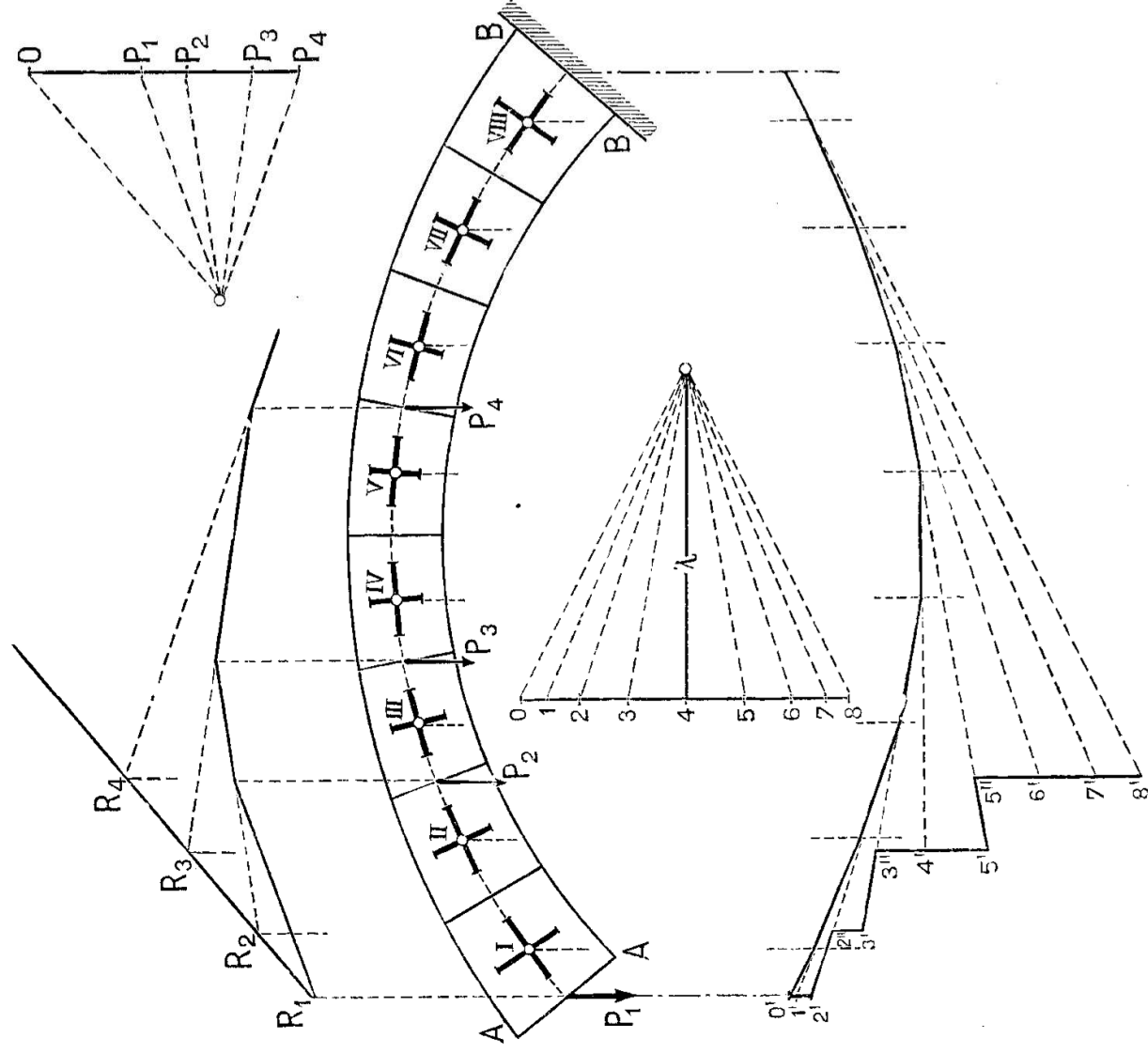


Fig. 53.

applicate in punti diversi dell'asse geometrico della trave, purchè fra loro parallele.

Adottata infatti una suddivisione in tronchi, tale che i vari punti di applicazione delle forze cadano tutti su sezioni divi-

denti, il ragionamento svolto nei precedenti paragrafi si potrà rifare passo passo purchè si tenga il dovuto conto del fatto che

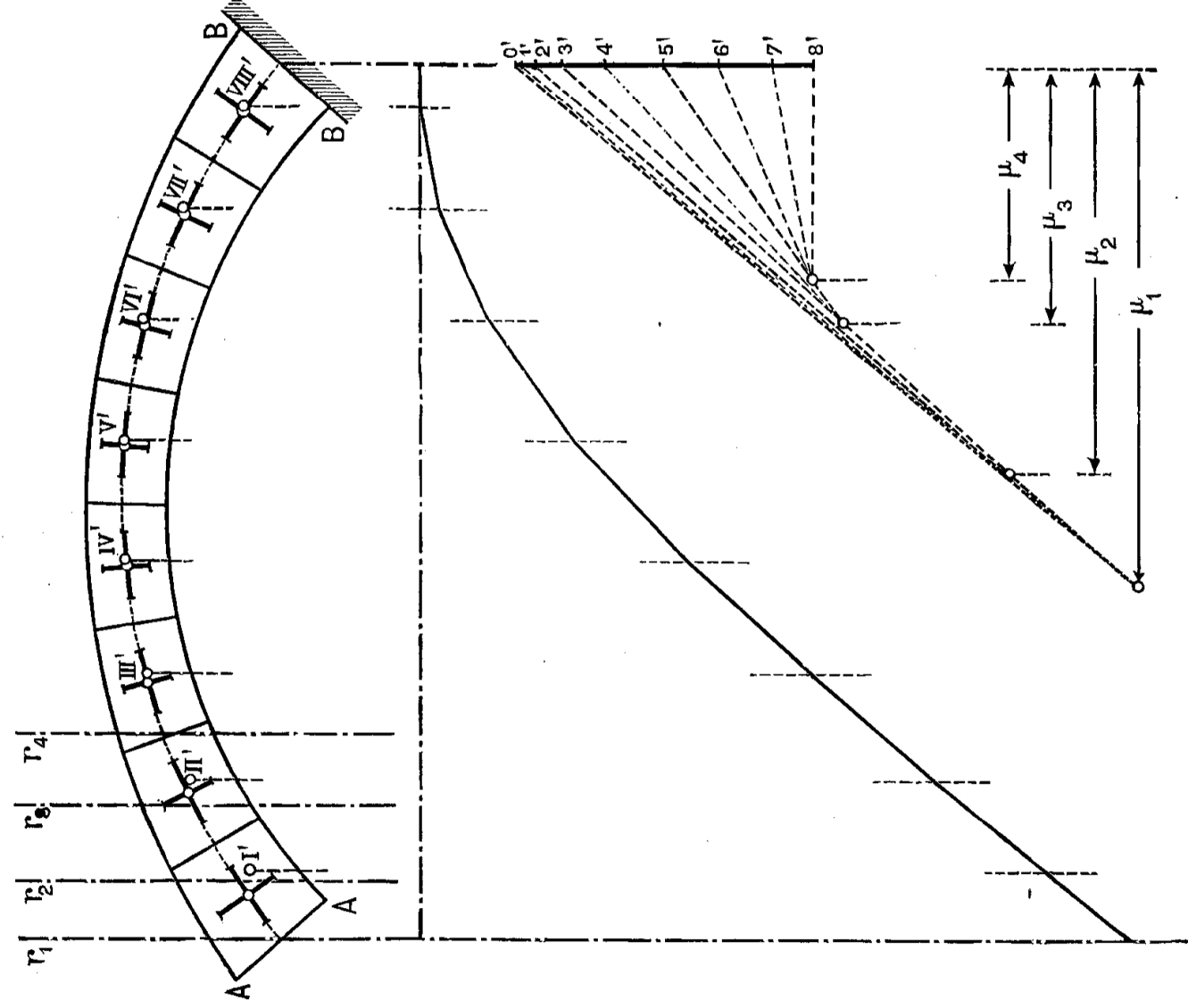


Fig. 54.

la deformazione di ciascun tronco della trave è sempre ed esclusivamente dovuta al complesso delle forze che agiscono sul tratto di trave compreso fra il tronco che si considera e la base libera.

È dunque rispetto alla linea d'azione della risultante di tale complesso di forze che si calcolerà in un primo tempo (fig. 53) il momento statico del peso elastico del tronco generico; ed è nell'antipolo di detta linea d'azione, per rapporto all'ellisse di elasticità del tronco, che questo primo momento statico si dovrà intendere concentrato (fig. 54) per procedere al calcolo dell'ultimo suo momento statico per rapporto alla retta secondo cui si vogliono computare gli spostamenti.

Ed è finalmente introducendo, in luogo di P , la grandezza R della stessa risultante che si determinerà il valore $\frac{1}{R\lambda}$ (ovvero, quando ne sia il caso, quello $\frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{R\lambda}$) della distanza polare μ , necessariamente variabile da un tronco all'altro, ogniqualvolta sulla relativa sezione dividente agisce una forza; distanza polare con cui va costruito quel poligono funicolare che, colla sua ordinata generica, ci deve graficamente fornire la somma algebrica dei momenti di second'ordine dei singoli pesi elastici, presi ciascuno per rapporto alla linea d'azione della rispettiva risultante ed alla retta generica secondo cui vuol essere valutato lo spostamento del punto generico dell'asse geometrico della trave.

Tale poligono sarà il voluto diagramma degli spostamenti per la considerata condizione di carico.

* * *

In un caso solo la costruzione grafica di questo diagramma cade praticamente in difetto; ed è quando per uno o più tronchi la linea d'azione della risultante se ne va all'infinito (sollecitazione a semplice flessione) o anche soltanto si allontana quanto basta per cadere fuori dei limiti del disegno.

Ma anche allora si potrà applicare il procedimento descritto, solo che si abbia l'avvertenza di sostituire a quella risultante lontana due forze ad essa equipollenti, la cui scelta resta d'altronde completamente subordinabile alle esigenze pratiche del disegno.

Per ciascuna di quelle due forze componenti si determinerà il momento statico del peso elastico del tronco (o dei tronchi)

cui esse si riferiscono; e ciascuno dei due momenti statici verrà trattato nel modo solito, previa la necessaria determinazione, per ciascuno, così dell'antipolo cui esso va applicato, come della distanza polare da cui va proiettato.

Basta ricordare il principio della sovrapposizione degli stati di equilibrio per riconoscere la legittimità dello sdoppiamento della sollecitazione, e la indipendenza dei risultati dal modo con cui esso può venire caso per caso attuato.

Applicato al caso della trave ad asse rettilineo, sollecitata esclusivamente da forze normali all'asse, questo procedimento conduce a costruzioni grafiche che sono evidentemente più laboriose e complesse di quelle a cui siamo pervenuti nella nostra trattazione approssimata delle travi inflesse.

È bensì vero che quella trattazione ha il fondamentale difetto di prescindere completamente dalla esistenza dello sforzo tagliante, ed è quindi affetta da una causa d'errore la cui influenza sulla forma e sull'andamento della linea elastica può essere molto diversa da caso a caso, e comunque è difficilmente valutabile *a priori*.

Ma non è men vero che la teoria dell'ellisse di elasticità — indipendentemente dal procedimento generale testè illustrato — permette di riprendere i metodi grafici della teoria approssimata delle travi inflesse, e di apportare ad essi una semplicissima correzione, la quale, senza per nulla complicarne l'uso, elimina l'errore accennato e consente di tenere nel dovuto conto, nel calcolo delle deformazioni, anche l'influenza dello sforzo tagliante.

Consideriamo infatti, in una trave ad asse orizzontale (fig. 55), un tronco di dimensioni finite limitato da due sezioni rette situate a distanza l , nello interno del quale tronco E e J si mantengano costanti, e nessuna forza esterna sia applicata.

Sotto l'azione della sollecitazione esterna, rappresentabile sempre, in queste condizioni, con una forza verticale P agente su una delle sezioni estreme del tronco (sezione terminale), questa sezione subisce, per rapporto all'altra sezione estrema (sezione iniziale) supposta fissa, una rotazione intorno all'anti-

polo C della linea d'azione di P rispetto all'ellisse di elasticità del tronco, la cui ampiezza è misurata dal prodotto del peso elastico

$$W = \frac{l}{EJ}$$

per il momento $P \cdot d$ della forza rispetto al baricentro elastico O .

Ma, date le particolari ipotesi da noi premesse, questo momento $P \cdot d$ è precisamente il momento flettente relativo alla

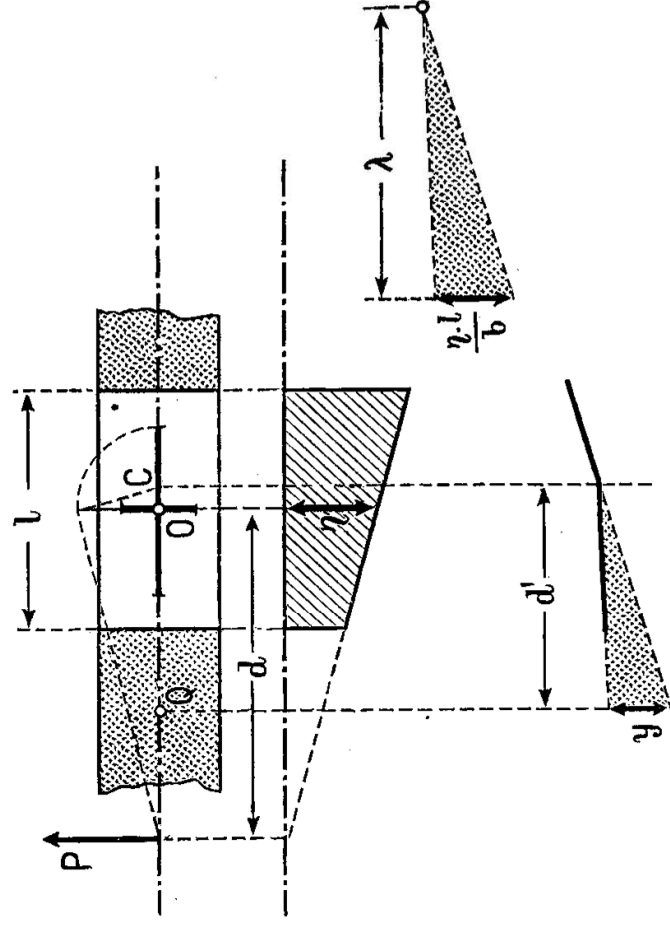


Fig. 55.

sezione retta della trave passante per O ; e si può quindi, al solito, rappresentare col prodotto dell'ordinata η del diagramma dei momenti flettenti (letta sulla verticale per O) per la distanza polare H con cui il diagramma stesso si suppone costruito (pag. 228).

Ciò posto, lo spostamento verticale che un punto qualunque Q dell'asse geometrico, situato fuori del tronco considerato dalla parte della sezione terminale, subisce in dipendenza della deformazione del tronco, sarà della forma

$$y = WP d d' = \frac{l}{EJ} \eta H d' = \frac{\eta \cdot l}{EJ} \frac{d'}{H}$$

dove, conformemente alle solite convenzioni, si è denotata con d' la distanza dell'antipolo C dal punto generico Q e quindi dalla verticale secondo cui si intendono misurati i suoi spostamenti.

E si potrà ottenere graficamente tale spostamento sotto forma di segmento intercetto sulla verticale per Q dai due lati successivi di un poligono funicolare il quale colleghi le forze fittizie

$$\frac{\eta \cdot l}{b}$$

misuranti nella base b le aree $\eta \cdot l$ delle striscie trapezoidali del diagramma dei momenti flettenti corrispondenti ai singoli tronchi di trave, a condizione che queste forze si suppongano applicate agli antipoli C delle linee d'azione delle forze P , presi rispetto alle ellissi di elasticità dei singoli tronchi.

Si ha infatti allora dalla figura la relazione

$$\frac{y}{d'} = \frac{\eta \cdot l}{b \lambda}$$

la quale si riduce alla formola da noi precedentemente trovata, quando si assuma la distanza polare

$$\lambda = \frac{EJ}{Hb}$$

Orbene questa costruzione coincide esattamente con quella indicata nella nostra trattazione approssimata delle travi inflesse se la verticale per C coincide colla verticale baricentrica dell'area $\eta \cdot l$, ciò che accade precisamente — è facile dimostrarlo con semplici considerazioni di geometria elementare — se per semiasse longitudinale dell'ellisse di elasticità si assume

$$e_1 = \frac{l}{\sqrt{12}}$$

trascurando il termine che nella (117) sta a rappresentare l'influenza dello sforzo tagliante.

Ma basta assumere per ϱ_1 il suo valore esatto

$$\varrho_1 = \sqrt{\frac{l^2}{12} + 2 \frac{m+1}{m} t \varrho^2}$$

perchè l'influenza delle deformazioni dovute al taglio venga rimessa in conto ed i risultati diventino corretti (1).

* * *

APPLICAZIONE — TAVOLE XVII e XVIII.

Costruzione grafica della linea elastica di una trave ad asse orizzontale, semplicemente appoggiata agli estremi e soggetta ad un certo numero di carichi verticali concentrati.

I dati del problema siano quelli stessi che ci siamo proposti per l'applicazione della teoria approssimata a pag. 236.

Si è pertanto adottata la stessa suddivisione ideale della trave in undici tronchi, due dei quali (il quarto ed il quinto, a partir da sinistra) hanno la lunghezza di un solo metro, mentre tutti gli altri hanno la lunghezza di metri due.

Per ciascun tronco si sono poi calcolati i valori del peso elastico w e del semiasse ϱ_1 dell'ellisse di elasticità diretto secondo l'asse geometrico della trave. Il calcolo è chiaramente riassunto nella tabella numerica annessa alla Tavola XVII, nella redazione della quale si è supposto, al solito,

$$E = 2000 \frac{t}{\text{cm}^2} \quad \text{ed} \quad m = 4$$

Per la rappresentazione in disegno dei pesi elastici w si è assunto

$$1 \text{ cm} = \frac{1}{5,000.000} t \cdot \text{cm} = 0,000.000.2 t^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$$

(1) Il lettore prenderà nota che in questa costruzione non sono più a temersi casi singolari del genere di quelli contemplati nel precedente paragrafo, bastando ad evitarli una oculata scelta delle sezioni dividenti, e in ogni caso la suddivisione ulteriore in due parti di quel particolare tronco pel quale la risultante delle forze passasse pel baricentro elastico, mandando all'infinito il relativo antipolo.

In questa medesima scala va naturalmente letta la distanza polare

$$\lambda = \frac{1}{2.000.000 \text{ t. cm}} = 0,000.000.5 \text{ t}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$$

Considerati i pesi elastici w come forze verticali concentrate nei baricentri rispettivi, e costruito colla distanza polare λ il poligono funicolare che li collega, si è, a mezzo di questo, determinato il momento statico di ciascun peso elastico per rapporto alla linea d'azione della risultante di tutte le forze che agiscono alla sinistra del tronco cui esso si riferisce.

Questa risultante è evidentemente la reazione 5 (misurata sulla retta delle forze dal segmento $\overline{4.0}$) fin che si guarda ai primi quattro tronchi.

Per il quinto ed il sesto tronco essa si ottiene componendo insieme la reazione 5 col carico 1, ed è definita in disegno dal segmento $\overline{4.1}$; essa deve intendersi applicata secondo la verticale passante pel punto d'incontro del secondo lato del poligono funicolare collegante i carichi, colla sua retta di chiusa.

Pel settimo tronco si dovrà comporre colla reazione 5 e col carico 1, anche il carico 2: si otterrà una risultante equipollente a $\overline{4.2}$ applicata secondo la verticale condotta pel punto in cui la stessa retta di chiusa è incontrata dal terzo lato della funicolare dei carichi.

Finalmente per l'ottavo tronco e pei successivi si dovrebbero comporre insieme la reazione 5 e tutti e tre i carichi: è ovvio che si otterrà così una risultante equipollente a $\overline{4.3}$, cioè eguale e contraria alla reazione 4, ed avente la sua medesima linea d'azione.

Bisogna ora costruire gli antipoli delle linee d'azione di queste successive risultanti per rapporto alle ellissi di elasticità dei tronchi cui esse si riferiscono. A tal fine basterà tracciare verticalmente, a partire da ciascun baricentro, il semiasse ρ_1 , congiungerne l'estremo col punto in cui la risultante relativa incontra l'asse geometrico della trave, e dall'estremo stesso condurre la perpendicolare a tale congiungente fino ad incontrare il medesimo asse.

Supposte concentrate in questi antipoli le forze momenti statici, si costruirà la linea elastica (nella scala stessa già adot-

tata l'altra volta) adottando le distanze polari:

$$\mu_1 = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{4.0.\lambda} = \frac{1}{800} \cdot \frac{2.000.000}{-7,75} = -323^{\text{cm}}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{4.1.\lambda} = \frac{1}{800} \cdot \frac{2.000.000}{-4,75} = -526^{\text{cm}}$$

$$\mu_3 = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{4.2.\lambda} = \frac{1}{800} \cdot \frac{2.000.000}{+5,25} = +476^{\text{cm}}$$

$$\mu_4 = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{4.3.\lambda} = \frac{1}{800} \cdot \frac{2.000.000}{+7,25} = +345^{\text{cm}}$$

La freccia in mezzeria risulta questa volta eguale a cm. 1,16 con una differenza in più, rispetto al risultato ottenuto operando colla teoria approssimata delle travi inflesse, di cm. 0,07, che sono quindi da attribuirsi all'influenza, allora trascurata, dello sforzo tagliante.

Una completa conferma si ottiene del resto assai più speditevolmente se — servendosi della teoria dell'ellisse di elasticità per correggere la trattazione approssimata — si opera nel modo indicato nella Tavola XVIII.

In essa le forze fittizie da collegarsi per ottenere (sotto forma di poligono funicolare) la linea elastica sono ancora quelle medesime aree parziali del diagramma dei momenti flettenti che avevamo considerate nella trattazione approssimata. E sono anche le stesse le distanze polari di cui ci si vale. Soltanto le linee d'azione di esse forze son mutate: invece di essere le verticali baricentriche delle singole striscie son le verticali condotte per gli antipoli poc'anzi costruiti.

E lo spostamento dei vertici del poligono funicolare — pur senza che mutino le direzioni dei singoli suoi lati — dà ragione dell'influenza, dianzi rilevata, dello sforzo tagliante.

TAVOLA XVII

(pag. 300).

Costruzione grafica della linea elastica di una trave orizzontale, semplicemente appoggiata agli estremi, e soggetta ad un certo numero di carichi verticali concentrati (*Metodo dell'ellisse di elasticità*).

| | l cm. | A cm ² . | J cm ⁴ . | t | $W = \frac{l}{EJ}$ t ⁻¹ , cm ⁻¹ | $\rho^2 = \frac{J}{A}$ cm ² | $\rho_1 = \sqrt{\frac{l^2}{12} + 2 \frac{m+1}{m} t \rho^2}$ cm. |
|------|------------|--------------------------|--------------------------|------|--|---|--|
| I | 200 | 220 | 531.500 | 1,82 | 0,000.000.188 | 2413 | 120 |
| II | 200 | 269 | 741.700 | 2,06 | 0,000.000.135 | 2755 | 126 |
| III | 200 | 318 | 958.400 | 2,38 | 0,000.000.104 | 3012 | 130 |
| IV | 100 | 367 | 1.181.700 | 2,67 | 0,000.000.042 | 3218 | 128 |
| V | 100 | 367 | 1.181.700 | 2,67 | 0,000.000.042 | 3218 | 128 |
| VI | 200 | 367 | 1.181.700 | 2,67 | 0,000.000.085 | 3218 | 134 |
| VII | 200 | 367 | 1.181.700 | 2,67 | 0,000.000.085 | 3218 | 134 |
| VIII | 200 | 367 | 1.181.700 | 2,67 | 0,000.000.085 | 3218 | 134 |
| IX | 200 | 318 | 958.400 | 2,38 | 0,000.000.104 | 3012 | 130 |
| X | 200 | 269 | 741.700 | 2,06 | 0,000.000.135 | 2755 | 126 |
| XI | 200 | 220 | 531.500 | 1,82 | 0,000.000.188 | 2413 | 120 |

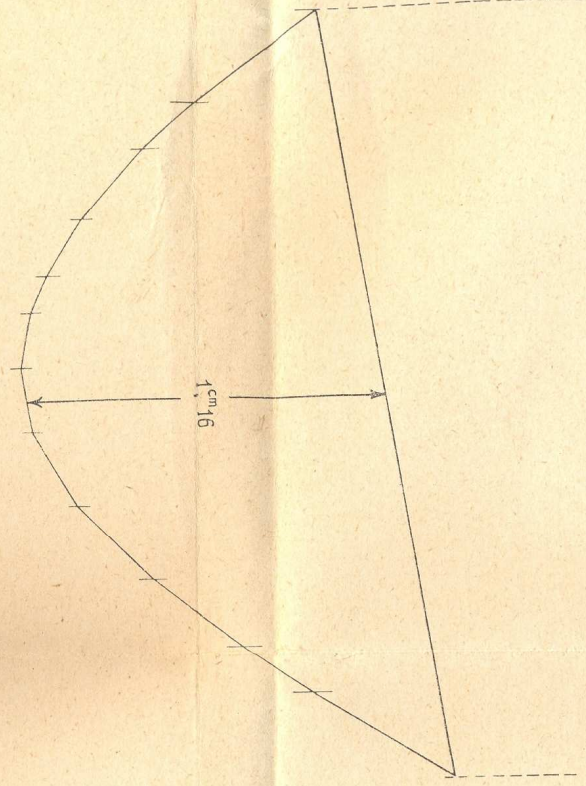
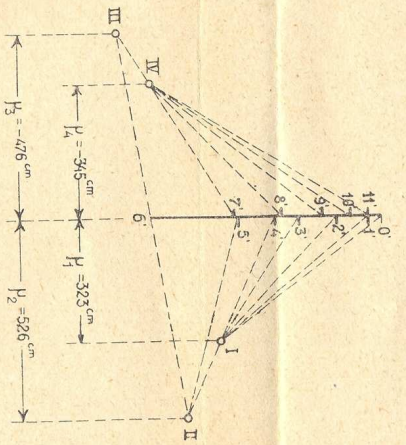
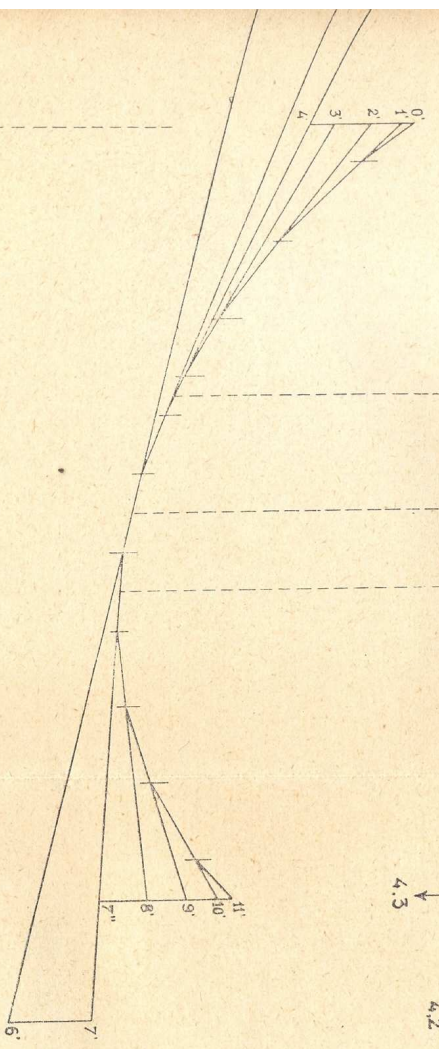
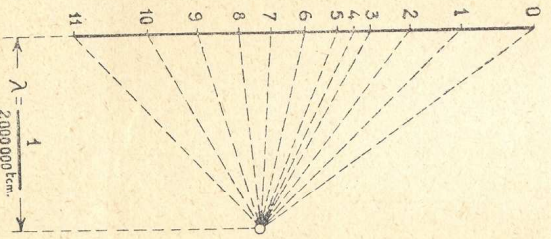
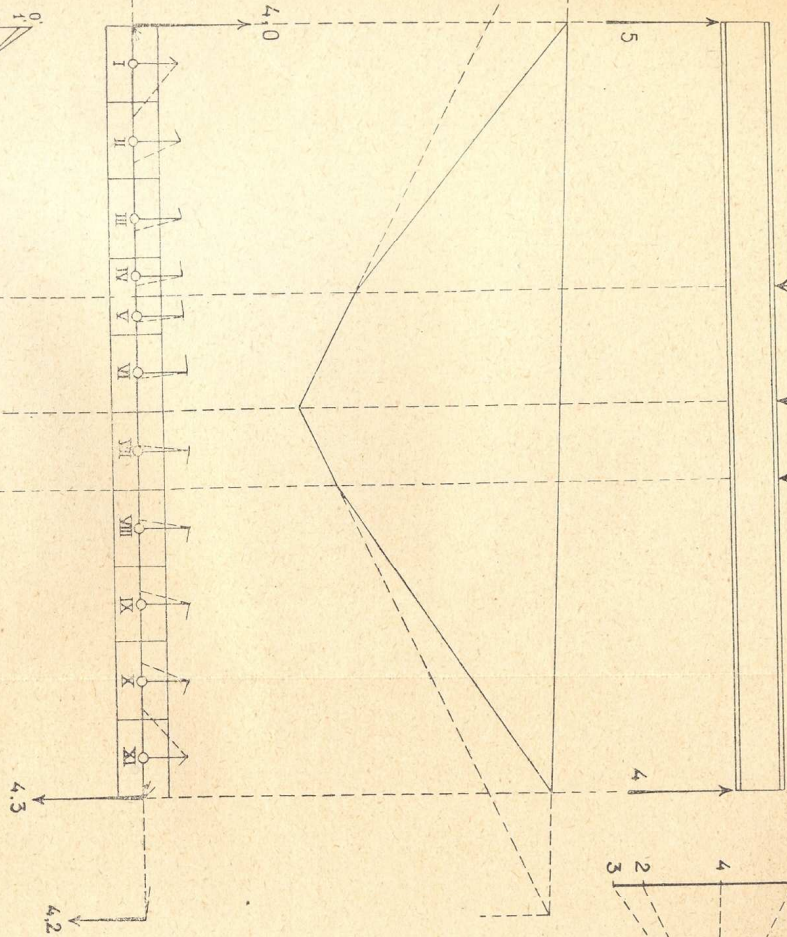
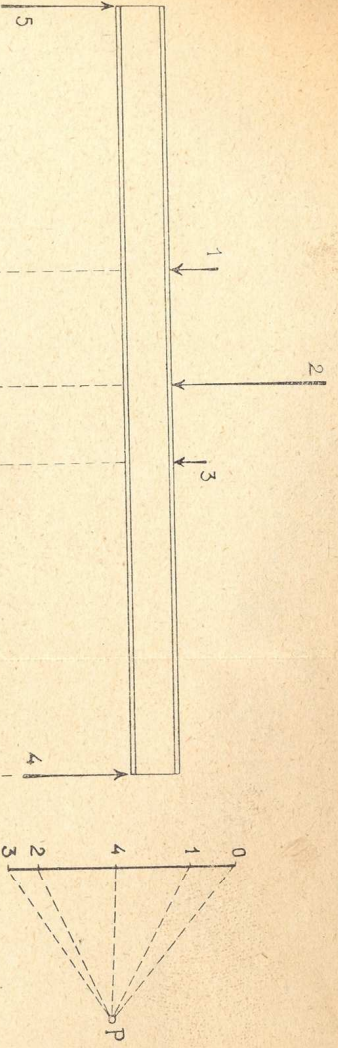


TAVOLA XVIII

(pag. 300).

Costruzione grafica della linea elastica di una trave orizzontale, semplicemente appoggiata agli estremi, e soggetta ad un certo numero di carichi verticali concentrati (*Variante della trattazione approssimata con cui si viene a tenere nel dovuto conto l'influenza dello sforzo tagliante*).

