IV.

Sistemi piani.

Ritorniamo col pensiero al problema di Saint-Venant, e riprendiamo per un momento in esame il solito solido cilindrico, incastrato in corrispondenza di una delle basi, e sollecitato sull'altra base da forze date in modo affatto arbitrario.

Noi abbiamo detto, nell'iniziare la trattazione di quel problema, che, se le dimensioni trasversali del solido sono abbastanza piccole a fronte della lunghezza, la deformazione si può ritenere completamente definita quando son date le sei caratteristiche del sistema di forze esterne.

Possiamo anzi aggiungere, riandando i risultati ottenuti, che gli spostamenti dei varii punti del solido si possono sempre esprimere sotto forma di funzioni lineari di quelle sei caratteristiche.

Ciò vale naturalmente in particolare pei punti della base libera.

Questa subisce, nel mutamento di configurazione del sistema, due specie di mutamenti che noi abbiamo ben distinti nei singoli casi studiati: un mutamento di forma ed un mutamento di posizione.

Sempre in vista della piccolezza delle dimensioni trasversali per rapporto alla lunghezza del cilindro, si può, con grandissima approssimazione, riguardare il mutamento di forma della base libera come un fenomeno praticamente trascurabile a fronte dello spostamento che essa base subisce nello spazio.

Ciò equivale a considerare la base stessa come rigida ed indeformabile: allora gli spostamenti dei singoli suoi punti si possono tutti definire mediante sei soli parametri, che posson essere, per esempio, tre traslazioni secondo gli assi coordinati di riferimento, e tre rotazioni attorno agli stessi.

Questi sei parametri saranno alla lor volta naturalmente delle funzioni lineari delle sei caratteristiche della sollecitazione.

E per conseguenza anche queste sei caratteristiche si potranno, inversamente, considerare come funzioni lineari di quei sei parametri.

Se allora si passa al calcolo del lavoro di deformazione del solido cilindrico, si può pensare di scriverlo non soltanto come forma quadratica delle sei caratteristiche della sollecitazione, ma anche come forma, pure quadratica, dei sei parametri dello spostamento della base libera.

Tale forma dovrà essere al solito essenzialmente positiva, nè potrà annullarsi ove non sia nullo lo spostamento stesso.

Ciò premesso, non è difficile immaginare quanti si vogliano altri esempi, nei quali, solidi elastici delle forme più diverse e vincolati nei modi più arbitrarii, godano di proprietà analoghe a quelle riscontrate in questo caso tipico.

Volendo considerare le cose da un punto di vista generale noi prenderemo in esame dei solidi elastici, ai quali attribuiremo senz'altro e in modo assoluto queste proprietà.

Supporremo cioè:

1° che esista un elemento superficiale che noi chiameremo *elemento terminale* del solido, le cui deformazioni siano trascurabili a fronte delle traslazioni e delle rotazioni che esso subisce quando il solido si deforma;

2° che se si suppone che le azioni esterne deformatrici siano esclusivamente applicate in corrispondenza del suddetto elemento terminale, le componenti di traslazione e di rotazione di questo possano esprimersi linearmente in funzione delle componenti della forza e della coppia risultante di quelle azioni esterne;

3° che il corrispondente lavoro di deformazione si annulli sempre e soltanto quando son tutte nulle le componenti di traslazione e di rotazione dell'elemento terminale.

***

La corrispondenza che si viene così a definire fra le azioni esterne applicate all'elemento terminale e gli spostamenti che esso subisce, si presenta particolarmente semplice nel caso in cui tanto quelle azioni che questi spostamenti sono, o si possono ritenere, contenuti in un medesimo piano.

In questo caso il sistema delle azioni deformatrici si può definire dando la grandezza e la linea d'azione della loro risultante: lo spostamento dell'elemento terminale si può considerare come una rotazione attorno ad un punto del piano, e verrà quindi completamente determinato se se ne conosce la grandezza nonchè la posizione del centro.

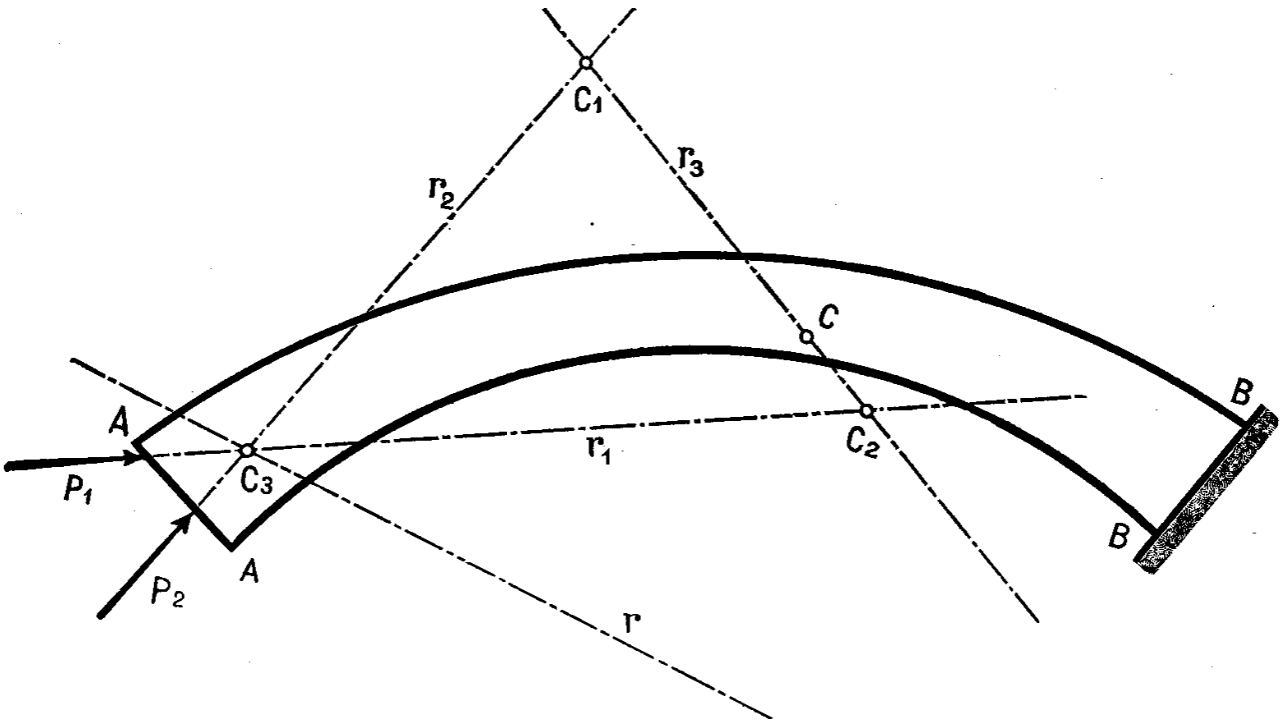

Fig. 44.

Pel principio della sovrapposizione degli stati di equilibrio, la grandezza della risultante delle azioni deformatrici entra linearmente nell'espressione della grandezza della rotazione dell'elemento terminale; essa però non può influire sulla posizione del centro di rotazione, posizione la quale deve quindi risultare completamente determinata quando è data la linea d'azione di quella risultante.

Siamo così condotti a considerare una semplice corrispondenza geometrica tra le rette del piano, considerate come linee d'azione delle risultanti delle forze deformatrici, ed i punti dello stesso piano, considerati come centri attorno a cui ruota l'elemento terminale per effetto della deformazione da esse prodotta.

Siano r_1 e C_1 due elementi così corrispondentisi (fig. 44).

È facile dimostrare che essi non possono in nessun caso appartenersi.

Se infatti il centro di rotazione C_1 cadesse sulla linea di azione r_1 della risultante P_1 delle forze deformatrici, il lavoro eseguito da queste sarebbe identicamente nullo qualunque fosse l'ampiezza, piccolissima, della rotazione prodotta: dovrebbe allora per il teoıema di Clapeyron riuscir nullo anche il lavoro di deformazione del solido, il quale invece, per ipotesi, non può annullarsi se quell'ampiezza non è nulla.

Scegliamo ora nel dato piano una seconda retta r_2 che supporremo passante per C_1, ed assumiamola come linea d'azione della risultante P_2 di un secondo sistema di forze deformatrici. E dimostriamo che il centro C_2 attorno a cui, sotto l'azione di queste forze, ruota l'elemento terminale, deve necessariamente appartenere alla retta r_1.

Consideriamo infatti il lavoro che il secondo sistema di forze eseguirebbe se all'elemento terminale si imprimesse la rotazione che caratterizza la prima deformazione.

Siccome, per ipotesi, la linea d'azione r_2 della risultante P_2 di quel secondo sistema passa pel centro C_1 della prima rotazione, quel lavoro deve necessariamente risultar nullo.

Pel teorema di Betti deve allora esser nullo anche il lavoro che il primo sistema di forze eseguirebbe se all'elemento terminale si imprimesse la rotazione che caratterizza la seconda deformazione.

E perchè ciò avvenga occorre e basta che il centro C_2 di questa seconda rotazione cada sulla linea d'azione r_1 della risultante P_1 di quel primo sistema di forze, precisamente come noi avevamo annunciato.

Da quanto si è detto segue immediatamente che alla retta r_3 congiungente dei due punti C_1 e C_2, considerata come linea di azione della risultante P_3 di un nuovo sistema di forze, deve corrispondere come centro della rotazione da essa prodotta un punto C_3 che, dovendo appartenere ad un tempo ad r_1 e ad r_2, non può essere che il punto di incontro di queste due rette.

Si può aggiungere che allo stesso punto C_3, considerato come centro di un fascio di rette r, corrisponde ancora la stessa retta r_3 intesa come luogo dei corrispondenti centri C.

Una qualunque forza P passante per C_3 può infatti sempre immaginarsi decomposta secondo le due direzioni r_1 e r_2 in due componenti P_1 e P_2; ma noi sappiamo che queste, agendo da sole, produrrebbero rispettivamente due rotazioni ben determinate attorno ai due centri C_1 e C_2.

Pel principio di sovrapposizione degli stati di equilibrio la rotazione prodotta da P deve essere la risultante delle due accennate rotazioni attorno a C_1 ed a C_2: e per un noto teorema di cinematica il suo centro C deve giacere sulla retta $C_1 C_2$: il che è precisamente quanto intendevamo dimostrare.

Possiamo dunque finalmente concludere che la corrispondenza fra le rette r ed i punti C gode delle seguenti proprietà:

1° è biunivoca,

2° una retta ed un punto che si corrispondono non possono mai appartenersi,

3° data una retta e su di essa un punto, il punto che corrisponde a quella retta deve giacere sulla retta corrispondente a quel punto.

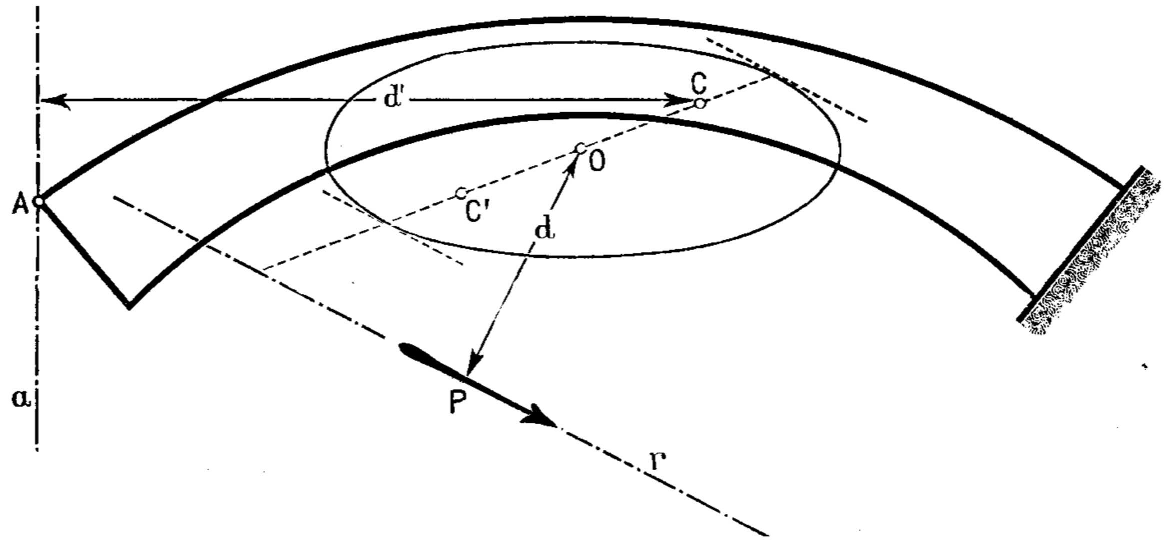

Fig. 45.

Ciò è quanto dire che quella corrispondenza è una polarità priva di elementi uniti.

Questa polarità possiede un centro O, punto certamente proprio corrispondente alla retta all'infinito del piano.

Combiniamola con una simmetria rispetto a questo centro: facciamo cioè corrispondere ad ogni retta r il punto C' simmetrico di C rispetto ad O (fig. 45).

La nuova corrispondenza sarà ancora una polarità, ma possiederà certamente degli elementi uniti, epperò avrà una conica fondamentale reale col centro in O.

Tali elementi uniti non potranno essere improprii perchè i punti all'infinito vengono nella simmetria trasformati in sè stessi, epperò non potrebbero appartenere alla retta loro corrispondente nella nuova polarità senza che ciò si verificasse anche nella polarità primitiva.

La conica fondamentale in questione sarà dunque un'ellisse.

Rispetto ad essa le rette r ed i punti C si comportano come *antipolari*.

Dato dunque un complesso di forze esterne applicate all'elemento terminale, nella deformazione che si produce nel solido elastico, quell'elemento ruota attorno ad un punto che è l'antipolo della linea d'azione della risultante di quelle forze rispetto ad una certa ellisse, la quale perciò prende il nome di *ellisse degli spostamenti elastici terminali*, o *ellisse di elasticità*.

***

Se la linea d'azione r della risultante passa pel centro O dell'ellisse, l'antipolo giace all'infinito nella direzione ad essa coniugata: l'elemento terminale subisce una semplice traslazione normalmente alla detta direzione.

Lo spostamento dell'elemento terminale si ridurrà invece ad una semplice rotazione attorno al centro O allorquando la linea d'azione della forza coinciderà colla retta all'infinito del piano: cioè allorquando il sistema delle forze applicate all'elemento terminale equivarrà ad una coppia.

L'ampiezza di questa rotazione sarà naturalmente proporzionale al momento M della coppia, cioè potrà scriversi sotto la forma

$$WM$$

W essendo una costante che deve intendersi determinata quando è dato il solido elastico, beninteso coi suoi vincoli e col relativo elemento terminale.

In ogni altro caso, quando cioè la linea d'azione r della risultante P sia una retta generica del piano, si potrà sempre immaginare trasportata la P parallelamente a sè stessa fino a passare pel centro O, purchè si abbia l'avvertenza di aggiungere la coppia di momento

$$M = P d$$

che si genera nel trasporto.

Ciò conduce a sostituire alla rotazione attorno all'antipolo C una rotazione attorno ad O ed una traslazione normale alla direzione OC coniugata della r rispetto all'ellisse.

L'ampiezza della rotazione sarà

$$W M = W P d$$

Per effetto della traslazione che l'accompagna questa rotazione muta bensì di centro ma non di ampiezza.

Possiamo quindi completare le conclusioni a cui eravamo giunti nel precedente paragrafo aggiungendo che l'ampiezza della rotazione dell'elemento terminale attorno al noto antipolo è proporzionale al momento del dato sistema di forze esterne rispetto al centro dell'ellisse, il coefficiente di proporzionalità essendo una costante del sistema elastico dato.

***

A questo punto noi possiamo senz'altro proporci di determinare lo spostamento, misurato in una direzione arbitraria, che un punto qualunque A dell'elemento terminale subisce sotto l'azione della data sollecitazione.

Basterà per ottenerlo moltiplicare l'ampiezza della rotazione testè calcolata per la distanza dell'antipolo C, attorno a cui essa avviene, dalla retta a condotta per A nella voluta direzione.

Si giunge così ad una espressione della forma

$$W P d d'$$

la quale è suscettibile di una interpretazione molto caratteristica.

Basta immaginare sul piano dato distribuita una massa ideale la cui grandezza complessiva sia misurata dalla costante W e la cui ellisse centrale di inerzia coincida coll'ellisse degli spostamenti elastici terminali.

Allora il prodotto Wd, che compare nella misura della rotazione, può interpretarsi come il momento statico di quella massa rispetto alla linea d'azione della forza a cui la rotazione stessa è dovuta; ed il prodotto Wdd', che entra nell'espressione dello spostamento di un punto, assume il significato di momento del secondo ordine della stessa massa rispetto alla linea d'azione della forza ed alla retta condotta pel punto dato nella direzione secondo la quale si intende misurato lo spostamento.

La massa W, così distribuita sul piano, prende il nome di *peso elastico*: ed il punto O si chiama *baricentro elastico* del sistema.

Con queste convenzioni le cose dette si possono compendiare nel seguente teorema:

Dato un sistema elastico *piano* e sceltone l'elemento terminale in modo che siano soddisfatte le condizioni imposte da principio, si può considerare una certa distribuzione di pesi elastici nel piano, tale che *lo spostamento di un punto qualunque di quell'elemento terminale secondo una qualunque direzione, dovuto ad una forza arbitrariamente applicata all'elemento stesso, riesce eguale al prodotto della grandezza di questa forza per il momento di secondo ordine del sistema dei pesi elastici preso rispetto alla linea d'azione della forza ed a quella secondo cui si misura lo spostamento.*

Se il punto di cui si vuol determinare lo spostamento giace sulla linea d'azione della forza, e se la misura vuol eseguirsi nella direzione stessa di questa, le due rette rispetto a cui deve valutarsi il momento del secondo ordine del sistema dei pesi elastici vengono a coincidere, e si può dire che *lo spostamento del punto di applicazione della forza nella direzione della forza stessa è eguale al prodotto della grandezza di questa per il momento d'inerzia del sistema dei pesi elastici rispetto alla sua linea d'azione.*

***

Questi teoremi sono dovuti a K. Culmann, e per la varietà e per l'eleganza delle loro applicazioni hanno acquistato nella scienza delle costruzioni un'importanza di primissimo ordine.

Di tali applicazioni noi non possiamo naturalmente occuparci qui in modo dettagliato. È facile tuttavia farsene un'idea se si pensa che il conoscere il peso elastico e l'ellisse di elasticità relativa ad un dato elemento terminale di un sistema elastico equivale all'aver risolti tutti i problemi relativi agli spostamenti che quell'elemento può subire sotto l'azione di forze esterne affatto arbitrarie.

E ciò non solo nel senso che, data una forza qualunque applicata all'elemento terminale, noi sappiamo immediatamente calcolare lo spostamento da essa prodotto in un punto qualunque dell'elemento stesso secondo una qualunque direzione, ma anche nel senso che, definito un qualsiasi spostamento dell'elemento in questione, noi sappiamo immediatamente risalire alla determinazione della forza che, ivi applicata, è capace di produrlo.

Si viene così a risolvere il problema dell'equilibrio elastico, sia pure in condizioni che non sono le più generali, non soltanto nel caso in cui son date le forze deformatrici, ma anche in quello in cui son dati gli spostamenti in superficie; problema quest'ultimo di cui non avevamo ancora avuto occasione di occuparci, ma di cui non mancano in pratica alcune applicazioni interessanti.

In conclusione si presenta come essenziale per tutta la teoria il seguente problema:

Dato un solido elastico soggetto a dati vincoli, e scelto su di esso un elemento terminale, calcolarne il peso elastico e determinarne l'ellisse di elasticità.

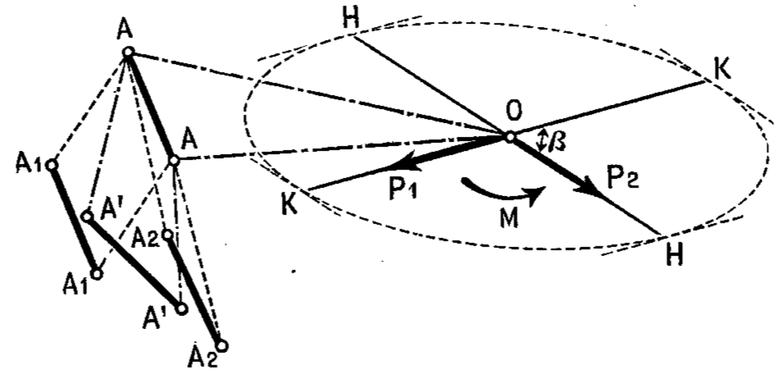

Fig. 46.

Incominceremo col dimostrare che la risoluzione di questo fondamentale problema si può sempre ricondurre alla determinazione di tre sole deformazioni, convenientemente scelte, del solido.

Immaginiamo a tal fine applicato all'elemento terminale AA (fig. 46) un sistema di forze equipollente ad una coppia di momento M e supponiamo di saper determinare gli spostamenti AA' che i singoli punti dell'elemento stesso vengono a subire durante la deformazione.

Perchè tali spostamenti debbono, nelle ipotesi da noi fatte, caratterizzare un moto rigido piccolissimo di rotazione attorno al baricentro elastico O, questo punto potrà immediatamente identificarsi nel punto di concorso delle normali condotte pei singoli punti A alle singole direzioni AA'.

Nel tempo stesso il valore, costante, del rapporto

$$\frac{AA'}{AO}$$

ci darà l'ampiezza della rotazione, che, divisa per M, misura il peso elastico W.

Ciò fatto, immaginiamo applicato all'elemento terminale un secondo sistema di forze la cui risultante P_1 passi per O, pur avendo del resto direzione arbitraria.

Noi sappiamo che, nei riguardi dell'elemento terminale AA, la deformazione così prodotta nel solido deve risolversi in una semplice traslazione AA_1: basterà quindi trovarne la direzione e la grandezza.

La normale a tale direzione condotta per O individuerà immediatamente la direzione coniugata a quella di P_1; la lunghezza del diametro HH dell'ellisse di elasticità che ha la detta direzione coniugata si dedurrà poi dalla relazione

$$\overline{AA_1} \operatorname{sen}\beta = P_1 W (\overline{OH} \operatorname{sen}\beta)^2$$

la quale esprime lo spostamento di un punto qualunque della linea d'azione della forza P_1 (supposto rigidamente connesso all'elemento AA), misurato nella direzione stessa di questa forza, come prodotto della grandezza di essa per il momento d'inerzia del sistema dei pesi elastici preso rispetto alla sua linea d'azione.

Immaginiamo infine che l'elemento terminale venga sollecitato da un terzo sistema di forze la cui risultante P_2 abbia per linea d'azione precisamente il diametro HH testè determinato dell'ellisse di elasticità.

Lo spostamento da esso prodotto nell'elemento terminale dovrà ridursi ad una semplice traslazione AA_2 in direzione perpendicolare a quella di P_1.

Basterà dunque che ne sia nota la grandezza, per poterne dedurre, con un calcolo affatto analogo a quello poc'anzi accennato, la lunghezza del diametro KK che ha la direzione di P_1.

Con ciò dell'ellisse di elasticità vengono ad esser noti quattro punti e le relative tangenti: più di quanto occorre per determinarla completamente.

* * *

Applichiamo questo procedimento al caso fondamentale del solido cilindrico soddisfacente alle condizioni volute dalla teoria di Saint-Venant, supponendo che il piano di simmetria nel quale si opera coincida col piano coordinato yz.

È allora ben noto che l'applicazione di un momento $\mathcal{M}$ costringe l'asse geometrico del solido ad incurvarsi secondo un arco di cerchio di raggio

$$\frac{EJ}{\mathcal{M}}$$

Siccome la base libera, che funziona qui da elemento terminale, si mantiene, nella deformazione, normale a questo asse incurvato, si può senz'altro concludere che il baricentro elastico O deve coincidere col punto di mezzo dell'asse geometrico del solido dato, e che l'ampiezza della rotazione che attorno ad esso si verifica è

$$\alpha = \frac{l}{\frac{EJ}{\mathcal{M}}} = \frac{\mathcal{M} l}{EJ}$$

Si ha quindi

$$W = \frac{l}{EJ} \tag{115}$$

Assumiamo ora come seconda sollecitazione una forza $\mathcal{N}$ avente per linea d'azione l'asse geometrico del solido.

Ci è in tal caso ben noto che la traslazione della base libera avviene nella stessa direzione della forza ed ha la grandezza

$$\delta l = \frac{\mathcal{N} l}{EA}$$

L'asse geometrico del solido è dunque un asse dell'ellisse di elasticità; detto

$$W\varrho^2$$

il momento d'inerzia del sistema dei pesi elastici rispetto a tale asse, dall'eguaglianza

$$\mathcal{N}\, W\varrho^2 = \frac{\mathcal{N}\, l}{E A}$$

si ricava immediatamente

$$\varrho^2 = \frac{J}{A} \tag{116}$$

Il semiasse dell'ellisse di elasticità normale all'asse geometrico, cioè parallelo all'asse y, ha dunque la stessa lunghezza dell'analogo semiasse dell'ellisse centrale d'inerzia della sezione retta del cilindro.

Lungo di esso si supponga infine di far agire la risultante del terzo sistema di forze, il quale, ricorrendo alle solite notazioni, potrà quindi ridursi ad una forza $\mathcal{T}$ giacente nel piano della base libera e ad una coppia di momento $\mathcal{M} = \frac{\mathcal{T}\, l}{2}$.

Questa coppia produce una freccia il cui valore si ricava facilmente facendo $x = y = 0$ e $z = l$ nella seconda delle (60):

$$-\frac{\mathcal{M}\, l^2}{2 E J} = -\frac{\mathcal{T}\, l^3}{4 E J}$$

mentre la forza dà luogo ad una freccia che, secondo quanto si è detto a pag. 202, vale

$$\frac{\mathcal{T}\, l^3}{3 E J}\left[1 + 6\,\frac{m+1}{m}\, t \left(\frac{\varrho}{l}\right)^2\right]$$

Dall'equazione

$$\mathcal{T}\, W\varrho_1^{\,2} = -\frac{\mathcal{T}\, l^3}{4 E J} + \frac{\mathcal{T}\, l^3}{3 E J}\left[1 + 6\,\frac{m+1}{m}\, t \left(\frac{\varrho}{l}\right)^2\right]$$

si ricava subito il valore del quadrato del semiasse dell'ellisse di elasticità diretto secondo l'asse geometrico del cilindro

$$\varrho_1^{\,2} = \frac{l^2}{12} + 2\,\frac{m+1}{m}\, t\varrho^2 \tag{117}$$

* * *

Consideriamo ora un solido di una forma un po' più generale, del tipo di quelli di cui si è parlato, a proposito della teoria delle travi inflesse, nel Capitolo X della Parte Seconda.

E immaginiamo di poter limitare il nostro studio alle sole deformazioni di un piccolo tronco di esso, compreso fra due sezioni rette arbitrariamente scelte, la cui distanza, misurata lungo l'asse geometrico, indicheremo con Δs.

Più precisamente immaginiamo di poter prescindere dall'elasticità di tutta la rimanente parte del solido, come se questa si fosse improvvisamente irrigidita, e vediamo di farci un'idea degli spostamenti che in queste condizioni potrebbe subire il solito punto A nella solita direzione generica a.

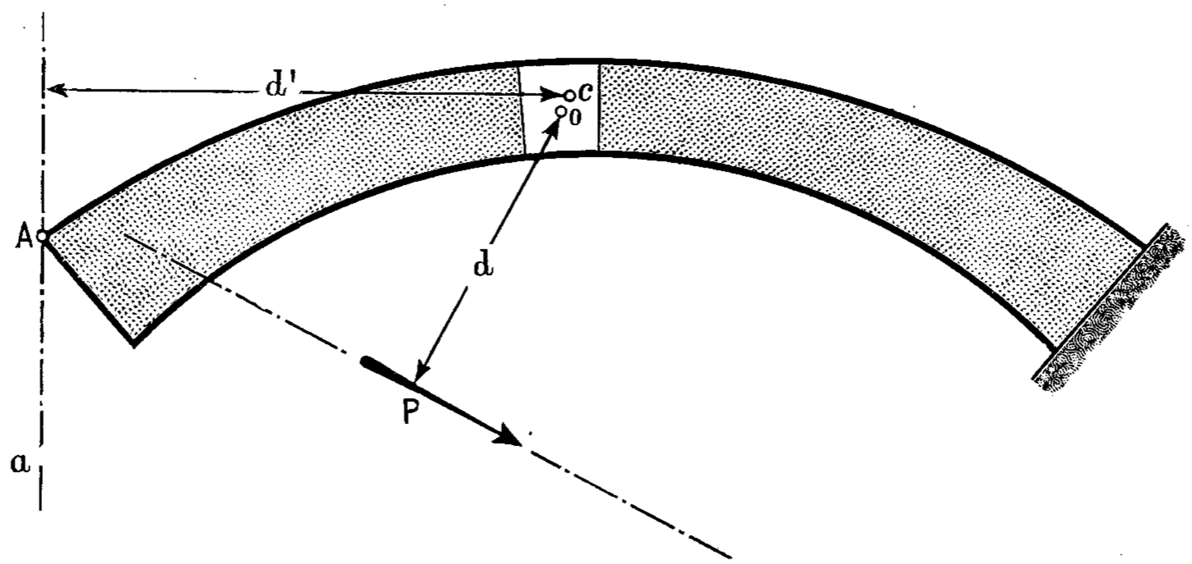

Fig. 47.

A tal fine incominciamo coll'osservare che delle due sezioni rette che limitano il tronco di solido considerato come elastico, una deve necessariamente restar fissa perchè rigidamente connessa colla base incastrata: l'altra invece, insieme con tutta la porzione di solido che sta tra essa e la base libera, funziona da elemento terminale.

Ne segue che gli spostamenti cercati di A si potranno immediatamente calcolare se son note le caratteristiche elastiche del tronco in discorso; in altre parole, se son noti il suo peso elastico w e la sua ellisse di elasticità.

Data infatti nel piano una forza qualunque P (agente sull'elemento terminale cui appartiene il punto A) lo spostamento che per effetto di essa, nelle ipotesi testè fatte, subirà il punto A nella direzione a si potrà colle notazioni della fig. 47 scrivere sotto la forma

$$w \cdot P d\, d'$$

Ciò posto, immaginiamo che non uno solo, ma tutti i tronchi elementari di cui il solido dato può ritenersi composto, siano stati preventivamente oggetto di un simile studio, per modo che di ciascuno di essi si conoscano le suaccennate caratteristiche elastiche.

Pel noto principio cinematico della sovrapposizione dei piccoli movimenti, si può allora pensare di dedurre dalla conoscenza degli spostamenti che A viene a subire per effetto delle singole deformazioni dei varii tronchi elementari, lo spostamento che lo stesso punto subisce effettivamente nel solido dato.

Tale spostamento, misurato, ben s'intende, nella solita direzione fissa a, si presenta allora sotto la forma

$$P \cdot \Sigma w\, d\, d'$$

prodotto della data forza per la somma dei momenti di secondo ordine dei pesi elastici dei singoli tronchi presi tutti rispetto alla linea d'azione della forza ed a quella secondo cui si intendono misurati gli spostamenti.

Confrontando questo risultato col teorema generale che noi abbiamo enunciato a pag. 277 si è senz'altro condotti a concludere che il complesso dei pesi elastici w dei singoli tronchi, in cui il solido si è supposto suddiviso, si presenta come affatto equivalente, almeno dal punto di vista dei momenti del secondo ordine, al peso elastico W del solido considerato nel suo complesso.

Più precisamente possiamo affermare:

1° che *il peso elastico del solido dato è eguale alla somma dei pesi elastici dei singoli tronchi in cui esso solido può immaginarsi diviso da un conveniente numero di sezioni rette, del resto arbitrarie ;*

2° che *la sua ellisse di elasticità non è altro che l'ellisse centrale d'inerzia di quei varii pesi elastici parziali supposti distribuiti sui singoli tronchi a cui corrispondono in quel modo che è definito (almeno agli effetti del nostro studio) dalle ellissi di elasticità rispettive.*

Se la suddivisione in tronchi del solido dato si fa in modo che ciascuno di essi possa, con sufficiente approssimazione, riguardarsi come cilindrico (o prismatico), il che è sempre possibile purchè si assumano le sezioni divisorie abbastanza vicine fra loro, e se si ammette che, malgrado questa relativa piccolezza della dimensione Δs, siano a ciascuno di essi applicabili i risultati assodati nel precedente paragrafo pei solidi cilindrici soddisfacenti alle condizioni di Saint-Venant, il problema enunciato a pag. 278, pei sistemi che si incontrano più frequentemente nelle costruzioni, resta ridotto ad una semplicissima questione di calcolo grafico.

***

Del resto la costruzione effettiva dell'ellisse di elasticità non è neppure, nella maggior parte dei casi, indispensabile.

Vi sono molti problemi, tra i più interessanti per la pratica tecnica, a risolvere i quali giova maggiormente la conoscenza delle ellissi di elasticità parziali relative ai singoli tronchi in cui la trave si può considerar suddivisa.

Immaginiamo, per esempio, di voler calcolare gli spostamenti che i varii punti dell'asse geometrico di una trave subiranno, in una determinata direzione, per effetto di una forza P agente come al solito sulla base libera AA.

Tanto per fissar le idee su di un caso concreto, noi supporremo che la forza P sia verticale e che il suo punto di applicazione sia il baricentro stesso G_A della base libera, vale a dire il punto terminale dell'asse geometrico della trave. Ci preme tuttavia avvertire che questa particolare scelta non ha nulla di essenziale, e che tutto quel che verremo dicendo si può ripetere tal quale qualunque sia il punto d'applicazione e qualunque sia la direzione della forza.

Ciò premesso, lo spostamento che, per effetto della forza P, subisce, in una determinata direzione, un altro punto qualunque dell'asse geometrico della trave, per esempio il baricentro G_S, della sezione generica SS (fig. 48), è evidentemente dovuto alla deformazione che la forza stessa determina nella porzione di trave compresa fra la sezione SS e la base incastrata BB.

Poco importa infatti, fin che si tratta di calcolare lo spostamento di G_S, il modo con cui si deforma la porzione di trave $AA\,SS$: essa non ha, agli effetti di quel che stiamo studiando, altra funzione che quella di trasmettere alla porzione $SS\,BB$ la sollecitazione, ed a questa funzione assolverebbe egualmente anche se fosse, per esempio, perfettamente indeformabile.

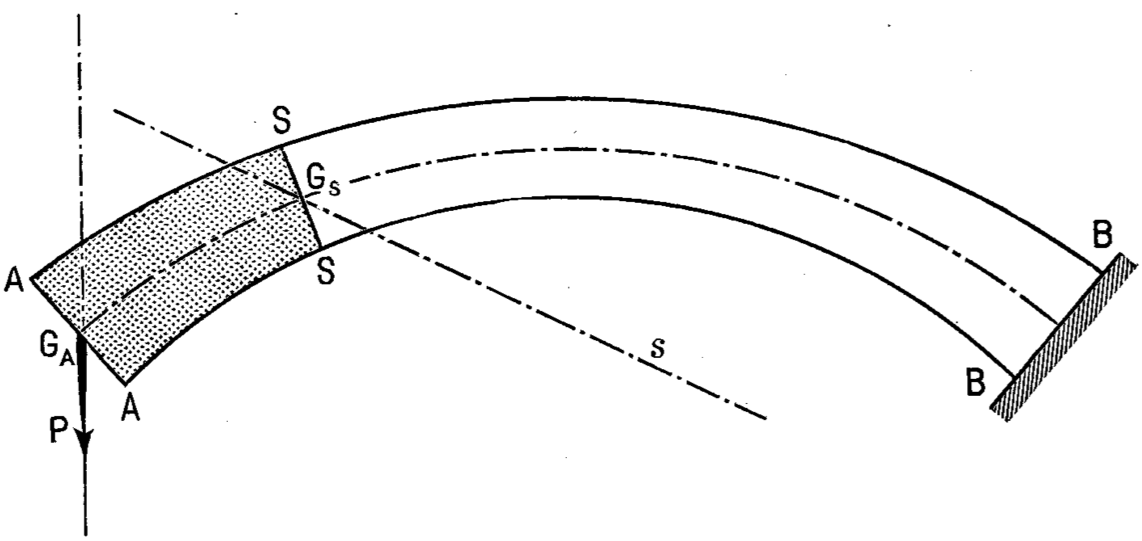

Fig. 48.

Lo spostamento che ci interessa si potrà dunque esprimere sotto forma di prodotto della grandezza della forza per la somma dei momenti di second'ordine dei pesi elastici dei singoli tronchi che costituiscono la porzione $SS\,BB$ di trave, presi, al solito, rispetto alla linea d'azione della forza ed a quella secondo cui si intendono misurati gli spostamenti.

* * *

Si tratta ora di calcolare questa somma di momenti di second'ordine. non per un solo punto G_S, ma per tutti i punti dell'asse geometrico della trave, o almeno — ciò che in pratica è lo stesso — per un certo numero discreto di essi.

A tal fine si procederà graficamente così.

Immaginiamo per un istante i pesi elastici dei singoli tronchi della trave applicati ai rispettivi baricentri elastici, quasi fossero delle forze concentrate, agenti in quella medesima direzione (verticale) secondo cui si è supposta agire la forza effettiva P.

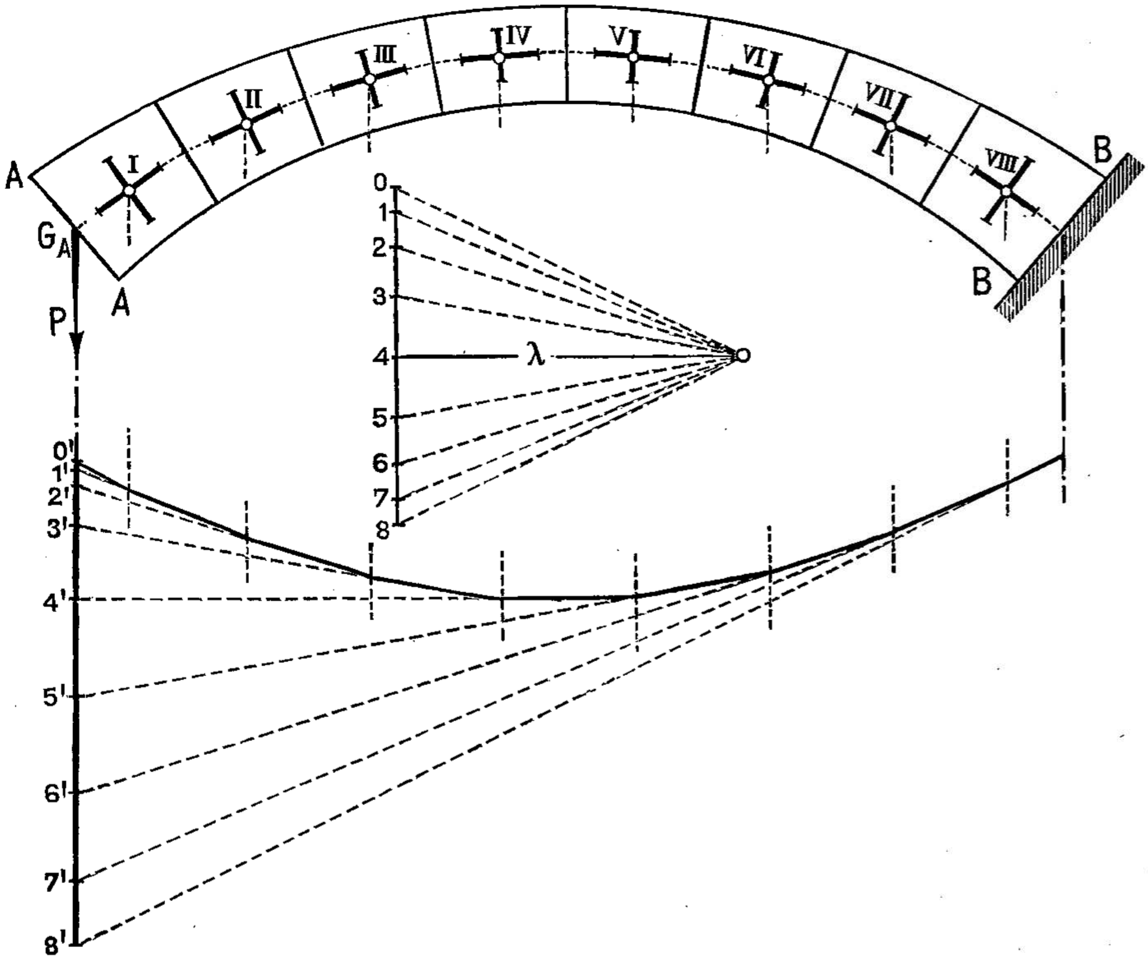

Fig. 49.

Colleghiamo tutti questi pesi elastici con un poligono funicolare, di distanza polare arbitraria λ, e prolunghiamo i successivi lati di questo fino ad incontrare la linea d'azione di P (fig. 49).

È noto che ciascuno dei segmenti su di essa linea d'azione intercetti da due lati successivi del poligono funicolare (moltiplicato per la distanza polare λ) ci dà la misura del momento statico di uno dei pesi elastici considerati preso rispetto alla linea d'azione stessa.

Immaginiamo ora tutti questi momenti statici applicati ai rispettivi centri, vale a dire agli antipoli della linea d'azione di P rispetto alle varie ellissi di elasticità dei singoli tronchi (*), e trattiamoli come se ancor essi fossero delle forze, parallele alla direzione (che supporremo pure verticale) secondo cui si vuole misurare lo spostamento di G_S.

Colleghiamoli quindi con un nuovo poligono funicolare, la la cui distanza polare indicheremo con μ; esso ci fornirà evidentemente i momenti statici dei momenti statici precedentemente calcolati, vale a dire i momenti di second'ordine dei primitivi pesi elastici.

Più precisamente, la sua ordinata y (fig. 51) contata sulla verticale per G_S, a partire dall'ultimo suo lato — da quel lato cioè che corrisponde alla base incastrata BB della trave — ci darà la misura del momento di second'ordine del gruppo dei pesi elastici compresi fra la sezione generica SS e la base

(1) Ricordiamo qui, per chi non l'avesse presente alla memoria, la notissima costruzione grafica che permette di passare dalla conoscenza di una retta qualunque a quella del suo antipolo (o dalla conoscenza di un punto a quella della sua antipolare) quando dell'ellisse fondamentale dell'antipolarità son noti i due assi.

Si prolunghi uno degli assi HH fino ad incontrare in M la retta data r (fig. 50); si ribalti il semiasse OH in posizione normale OH'; e si conduca da H' la perpendicolare alla congiungente MH'. La parallela m all'altro asse KK, condotta pel punto in cui detta perpendicolare interseca il primo asse HH, è l'antipolare di M.

Costruita poi in modo analogo l'antipolare n del punto N, in cui la retta r è incontrata dall'altro asse KK, si otterrà, nel punto d'incontro delle due antipolari, l'antipolo C della retta r.

Viceversa, dato C e tracciate per esso le due parallele m ed n agli assi, si costruiranno i rispettivi antipoli M ed N e, nella loro congiungente, si troverà l'antipolare r di C.

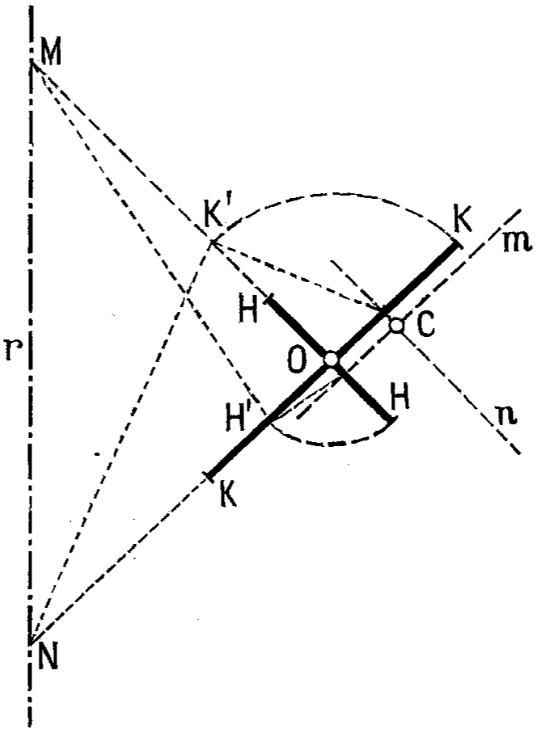

Fig. 50.

Per maggiori chiarimenti il lettore potrà riferirsi a quanto abbiamo avuto occasione di dire sull'argomento (a proposito di tutt'altro problema) nel Cap. V della Parte Seconda (pagg. 138 e 139).

incastrata BB, preso per rapporto alla linea d'azione (fissa) di P ed alla verticale (generica) per G_S, e ridotto alla base $\lambda . \mu$.

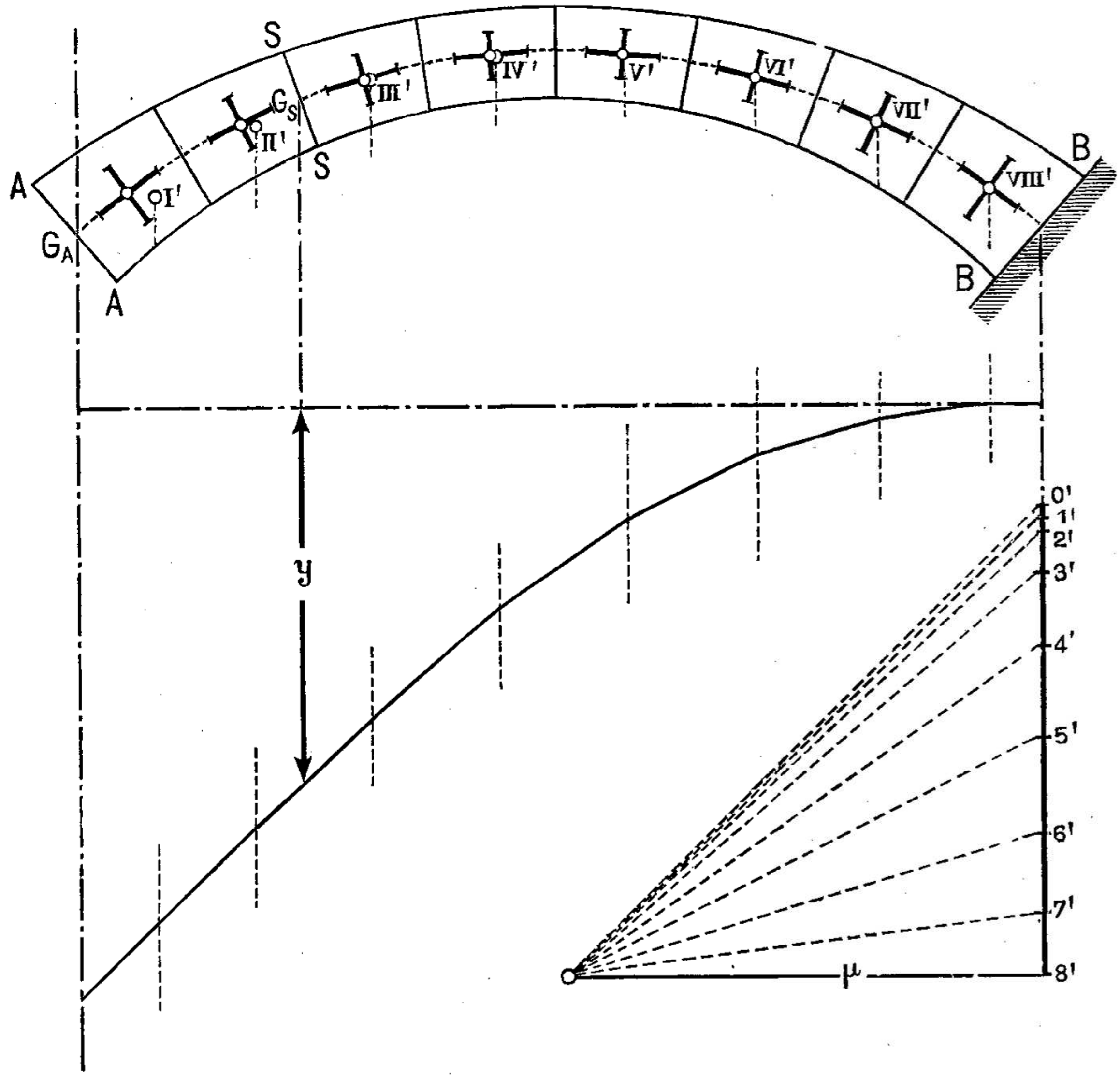

Fig. 51.

Tale ordinata rappresenterà dunque, a meno del fattore $P . \lambda . \mu$, lo spostamento verticale di G_S dovuto alla forza data (1).

(1) La regola cade praticamente in difetto se accade, come può accidentalmente accadere, che la linea d'azione della forza P passi per il baricentro elastico di un determinato tronco (sicchè il relativo antipolo se ne vada all'infinito) o anche soltanto si avvicini di molto ad esso (sicchè il relativo antipolo cada fuori del disegno).

In tal caso si ricorrerà con vantaggio ad un noto teorema di geometria delle masse, secondo il quale, al peso elastico *distribuito* relativo a quel tronco, si può

* * *

E poichè quel che si è detto relativamente alla verticale per G_S vale naturalmente anche se la verticale vien condotta per un altro qualunque dei baricentri delle sezioni dividenti dei tronchi di cui si è immaginata costituita la trave, si può

— agli effetti del calcolo che stiamo facendo — sostituire un sistema di due pesi elastici *concentrati* in corrispondenza dei due estremi del diametro dell'ellisse di elasticità avente la direzione coniugata a quella della forza P.

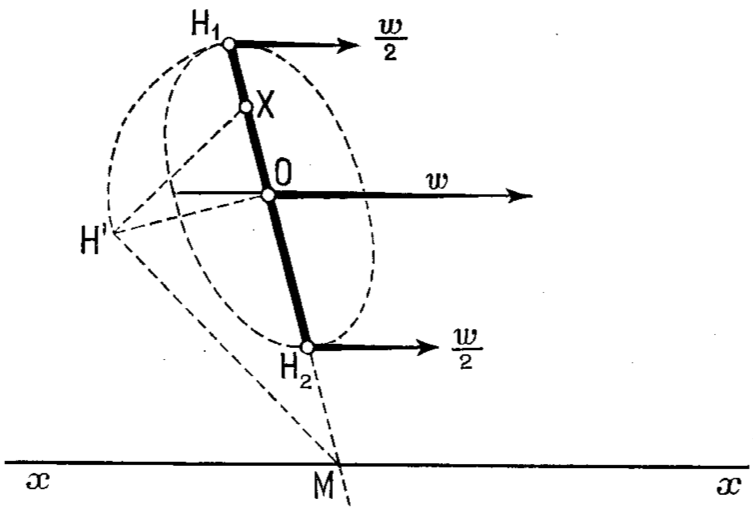

Fig. 52.

Immaginiamo infatti per un momento che il peso elastico w (fig. 52) venga sostituito da due pesi elastici applicati ai due estremi $H_1 H_2$ del diametro dell'ellisse di elasticità coniugato alla direzione dell'asse x rispetto a cui si vogliono calcolare i momenti statici.

Perchè questi momenti statici non mutino, basta evidentemente che i due pesi elastici parziali siano assunti entrambi eguali a $\frac{w}{2}$.

Quanto ai momenti di second'ordine si osservi che, detto ϱ il semidiametro $OH_1 = OH_2 = OH'$ coniugato ad x, e d la distanza OM del baricentro dall'asse stesso, valutata nella direzione coniugata, i momenti statici dei due pesi elastici parziali risultano proporzionali a

$$\frac{w}{2}(d+\varrho) \qquad \text{ed a} \qquad \frac{w}{2}(d-\varrho)$$

rispettivamente.

Ora questi momenti statici, considerati come nuove forze applicate nei medesimi punti H_1, H_2, hanno per centro, vale a dire per punto di applicazione della concludere che il secondo poligono funicolare costruito rappresenta, colle sue ordinate, lette sulle singole verticali dividenti a partire dal suo lato estremo relativo alla base incastrata, gli spostamenti verticali che i corrispondenti punti dell'asse geometrico subiscono per effetto della forza P applicata verticalmente in G_A.

Basta poi ricordare il teorema di Betti, e l'applicazione che ne abbiamo già fatta a pag. 268, per essere autorizzati a passare da questa ad un'altra non meno interessante interpretazione dello stesso poligono, riconoscendo in esso la *linea d'influenza degli spostaenmti verticali di* G_A dovuti ad una forza P la quale si sposti dall'uno all'altro punto considerato dell'asse geometrico della trave, mantenendosi sempre verticale.

* * *

Un'ultima parola resta a dirsi per ciò che riguarda la scelta delle distanze polari e la scala in cui gli spostamenti vanno letti.

Abbiamo infatti dimostrato che lo spostamento verticale di G_S dovuto alla forza P applicata verticalmente in G_A — o, ciò che fa esattamente lo stesso, lo spostamento verticale di G_A dovuto alla forza P applicata verticalmente in G_S — è misurato dal prodotto

$$P.\lambda.\mu.y$$

Ora questo prodotto, dovendo per definizione essere il prodotto di una forza per un momento di second'ordine di pesi elastici, dovrà, oltre al fattore forza, contenere un fattore avente

---

loro risultante, proprio il punto X, antipolo di x rispetto all'ellisse di elasticità, in cui è da intendersi applicato il momento statico di w.

Ed invero, tenuto conto che

$$OX = \frac{\varrho^2}{d}$$

si ha che

$$\frac{H_1X}{H_2X} = \frac{\varrho - \frac{\varrho^2}{d}}{\varrho + \frac{\varrho^2}{d}} = \frac{d-\varrho}{d+\varrho} = \frac{\frac{w}{2}(d-\varrho)}{\frac{w}{2}(d+\varrho)}$$