

IV.

La trave continua.

Il problema dell'equilibrio elastico della trave continua — di cui noi abbiamo già indicata la soluzione in due casi particolari (pagg. 401 e 411) — occupa nella scienza delle costruzioni un posto di grande importanza; esso si presta d'altronde molto bene per una discussione generale in termini indipendenti dal numero delle incognite iperstatiche.

Per l'una ragione e per l'altra, mi accingo a trattarlo qui con particolare ampiezza, riproducendo quasi integralmente alcune ricerche originali che sull'argomento io pubblicai nel 1910 e nel 1911 sotto gli auspici della R. Accademia delle Scienze di Torino ⁽¹⁾.

* * *

Supponiamo, in primo luogo, di aver da fare con una trave orizzontale vincolata comunque (purchè in modo rigido) agli estremi A e B , ed appoggiata semplicemente su n appoggi intermedi che indicheremo rispettivamente con

$$C_1, C_2, \dots, C_n$$

⁽¹⁾ COLONNETTI G., *I sistemi elastici continui trattati col metodo delle linee d'influenza*, "Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino", serie II, tomo I, XI (15 maggio 1910).

Le linee d'influenza della trave continua solidale coi suoi piedritti, "Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino", vol. XLVI (22 gennaio 1911).

Sul calcolo dei sistemi continui su piedritti elastici, "Giornale del Genio Civile", 1911.

Denoteremo con

$$\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_n$$

le rispettive reazioni verticali, incognite, da considerarsi come positive se dirette verso l'alto.

Liberato idealmente il sistema da tali appoggi intermedi lo si assoggetta all'azione di un carico concentrato ed unitario agente successivamente e separatamente secondo le varie reazioni degli appoggi soppressi e secondo la verticale della sezione generica S . Si traccino poi, coi noti metodi grafici, le varie linee elastiche

$$A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots, A_nB_n, A_sB_s$$

relative a quelle varie condizioni di carico. Si supponga anzi più precisamente che dette linee elastiche siano state rappresentate in disegno, in un certo rapporto di affinità costante che indicheremo al solito colla lettera ξ , mediante poligoni funcolari di distanza polare pure costante ed eguale a λ , colleganti certi convenienti sistemi di pesi elastici, le cui espressioni generiche indicheremo rispettivamente con

$$w_1, w_2, w_3, \dots, w_n, w_s$$

Se ora, mentre il carico sta sulla sezione S , si vogliono ristabilire gli appoggi intermedi $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$, la trave viene a trovarsi cimentata, oltrechè dal carico 1 applicato in S , anche dalle reazioni $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \dots, \mathfrak{C}_n$, applicate rispettivamente nei punti $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$.

Ne segue che una sezione qualunque della trave, la quale, per effetto del solo carico unitario in S , si era spostata verticalmente di una quantità misurata dalla corrispondente ordinata η della linea elastica A_sB_s , all'atto della applicazione delle reazioni $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \dots, \mathfrak{C}_n$, viene a subire un nuovo spostamento verticale misurato, nella stessa scala, da

$$-\mathfrak{C}_1\eta_1 - \mathfrak{C}_2\eta_2 - \mathfrak{C}_3\eta_3 - \dots - \mathfrak{C}_n\eta_n$$

quando con $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$ si indichino le ordinate delle linee elastiche

$$A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots, A_nB_n$$

contate tutte sulla verticale della sezione generica considerata.

L'abbassamento definitivo η della sezione stessa può adunque ottenersi sommando algebricamente quei due abbassamenti parziali

$$\eta = \eta_s - \mathfrak{E}_1 \eta_1 - \mathfrak{E}_2 \eta_2 - \dots - \mathfrak{E}_n \eta_n$$

Questa somma algebrica può facilmente eseguirsi per via grafica sovrapponendo al poligono $A_s B_s$ di ordinata η_s un nuovo poligono, la cui ordinata generica misuri la somma

$$\mathfrak{E}_1 \eta_1 + \mathfrak{E}_2 \eta_2 + \mathfrak{E}_3 \eta_3 + \dots + \mathfrak{E}_n \eta_n$$

poligono che può evidentemente ottenersi collegando (con distanza polare ancora eguale a λ) i pesi elastici

$$W = \mathfrak{E}_1 w_1 + \mathfrak{E}_2 w_2 + \mathfrak{E}_3 w_3 + \dots + \mathfrak{E}_n w_n$$

i quali possono riguardarsi come noti ogni qualvolta si siano determinati i valori delle costanti $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3, \dots, \mathfrak{E}_n$ (¹).

Ora è a tutti noto come queste costanti possano essere determinate imponendo che gli abbassamenti definitivi delle sezioni $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ della trave siano eguali a quelli che i corrispondenti piedritti, supposti elasticamente cedevoli, possono effettivamente consentire.

Detti perciò $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$ i cedimenti elastici dei singoli appoggi $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$, dovuti a carichi unitari su di essi applicati, si hanno le seguenti n equazioni di condizione

$$\mathfrak{E}_1 (\eta_{11} + \varepsilon_1) + \mathfrak{E}_2 \eta_{21} + \mathfrak{E}_3 \eta_{31} + \dots + \mathfrak{E}_n \eta_{n1} = \eta_{s1}$$

$$\mathfrak{E}_1 \eta_{12} + \mathfrak{E}_2 (\eta_{22} + \varepsilon_2) + \mathfrak{E}_3 \eta_{32} + \dots + \mathfrak{E}_n \eta_{n2} = \eta_{s2}$$

$$\mathfrak{E}_1 \eta_{13} + \mathfrak{E}_2 \eta_{23} + \mathfrak{E}_3 (\eta_{33} + \varepsilon_3) + \dots + \mathfrak{E}_n \eta_{n3} = \eta_{s3}$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\mathfrak{E}_1 \eta_{1n} + \mathfrak{E}_2 \eta_{2n} + \mathfrak{E}_3 \eta_{3n} + \dots + \mathfrak{E}_n (\eta_{nn} + \varepsilon_n) = \eta_{sn}$$

(¹) Nel caso più frequente in cui i varii sistemi di pesi elastici $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ hanno le medesime linee d'azione, la proprietà qui enunciata è suscettibile di pronta e semplicissima dimostrazione geometrica; essa può però essere dimostrata in modo quasi più intuitivo e certamente più generale quando si considerino le η come misure (nella base λ) dei momenti flettenti di una trave appoggiata in A ed in B e caricata dai corrispondenti pesi w ; la proprietà enunciata si

nelle quali con $\eta_{pq} = \eta_{qp}$ si è indicato l'abbassamento della sezione p^{ma} della trave svincolata dagli appoggi intermedi, dovuto ad un carico unitario applicato verticalmente in corrispondenza della sezione q^{ma} , o, ciò che fa lo stesso, l'abbassamento della q^{ma} sezione della trave, dovuto allo stesso carico applicato in corrispondenza della sezione p^{ma} .

* * *

Il diagramma degli abbassamenti η può però anche costruirsi in modo diretto mediante un unico poligono funicolare di distanza polare eguale ancora a λ ; basta che i pesi elastici da collegarsi abbiano un'espressione della forma

$$\begin{aligned} W' &= w_s - W \\ &= w_s - \mathcal{C}_1 w_1 - \mathcal{C}_2 w_2 - \mathcal{C}_3 w_3 - \dots - \mathcal{C}_n w_n \end{aligned}$$

Il poligono che così si ottiene rappresenta, nel solito rapporto di affinità ξ , la solita deformata dell'asse geometrico della trave supposta vincolata, oltre che in A ed in B , anche in $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ e caricata in S dal solito carico concentrato ed unitario.

Che, se si vuole eseguire la rappresentazione in un nuovo rapporto di affinità ξ' , basta evidentemente adottare, in luogo della distanza polare λ , una nuova distanza polare eguale a

$$\lambda' = \lambda \frac{\xi}{\xi'}$$

* * *

In virtù del teorema di Betti, la deformata così ottenuta coincide colla *linea d'influenza degli abbassamenti del punto S dovuti ad un carico concentrato ed unitario viaggiante sulla trave*.

deduce allora, indipendentemente dalle posizioni relative delle linee d'azione dei vari pesi w , mediante la semplice applicazione del principio della sovrapposizione degli effetti.

S'intende che quando i vari sistemi di pesi elastici $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ non hanno le medesime linee d'azione, i pesi elastici W si calcoleranno mettendo in conto, per ciascuna linea d'azione, quello o quelli soli dei pesi elastici w che lungo di essa agiscono.

Il procedimento esposto può adunque venire utilmente applicato allo studio delle deformazioni elastiche, e ciò senza che occorra procedere al tracciamento preliminare delle linee d'influenza delle reazioni iperstatiche degli appoggi intermedi.

Qualora però queste linee siano già state tracciate in precedenza esse possono con vantaggio venire utilizzate per la determinazione delle costanti \mathfrak{C} ; si viene allora a risparmiare ogni ulteriore risoluzione delle equazioni di condizione. Non è poi mai necessario tracciare la linea elastica $A_s B_s$ della trave svincolata da tutti gli appoggi intermedi e caricata in S , perchè i pesi elastici W' sono funzioni note dei pesi $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n, w_s$

* * *

È piuttosto il caso di dimostrare come la deformata stessa possa essere interpretata come *linea d'influenza della reazione di un ulteriore appoggio C_s destinato a vincolare la trave in corrispondenza della sezione considerata S* .

Ed è interessante rilevare che vi si può facilmente arrivare per via diretta ed in modo affatto indipendente dalle considerazioni che un tal risultato ci permetterebbero di stabilire come una conseguenza immediata del secondo principio di reciprocità.

Per far ciò indichiamo con ε_s il cedimento elastico di un tale appoggio dovuto ad un carico unitario su di esso direttamente applicato, con \mathfrak{C}_s il valore della reazione incognita che esso appoggio oppone alla trave quando il carico unitario occupa, su di essa, una data arbitraria posizione generica; con

$$\eta = \eta_s - \mathfrak{C}_1 \eta_1 - \mathfrak{C}_2 \eta_2 - \mathfrak{C}_3 \eta_3 - \dots - \mathfrak{C}_n \eta_n$$

la solita ordinata generica della deformata in questione, connotata sulla verticale di quel carico; ed infine con

$$u = \eta_{ss} - \mathfrak{C}_1 \eta_{s1} - \mathfrak{C}_2 \eta_{s2} - \mathfrak{C}_3 \eta_{s3} - \dots - \mathfrak{C}_n \eta_{sn}$$

l'ordinata della stessa deformata intercetta sulla verticale per S .

L'imporre l'eguaglianza fra l'abbassamento effettivo della sezione S della trave ed il cedimento elastico del sottostante appoggio C_s conduce evidentemente alla equazione di condizione

$$\eta - \mathfrak{C}_s u = \mathfrak{C}_s \varepsilon_s$$

dalla quale si ricava

$$\mathcal{C}_s = \frac{\eta}{u + \varepsilon_s}$$

L'ordinata generica η della deformata costruita può adunque assumersi come misura della reazione \mathcal{C}_s , purchè si adotti come unità di misura delle forze il segmento costante $u + \varepsilon_s$.

Che se, per maggior comodità di lettura, si vuol disegnare il diagramma in modo che l'unità delle forze risulti in esso rappresentata da un dato segmento di lunghezza u' , basterà assumere come distanza polare, in luogo di λ , la distanza

$$\lambda' = \lambda \frac{u + \varepsilon_s}{u'}$$

* * *

Di una terza interpretazione è poi ancora suscettibile la linea elastica costruita, non meno utile delle precedenti nello studio delle deformazioni elastiche delle costruzioni a travate continue. Essa può infatti anche assumersi come *linea d'influenza degli abbassamenti o cedimenti elastici dell'appoggio C_s* , che in corrispondenza della sezione S abbiamo ora supposto che vincoli la trave.

Tali abbassamenti sono infatti misurati evidentemente da

$$\mathcal{C}_s \varepsilon_s = \eta \frac{\varepsilon_s}{u + \varepsilon_s}$$

e sono perciò rappresentati dalle corrispondenti ordinate della linea elastica che andiamo studiando, nel rapporto di affinità

$$\zeta = \frac{u + \varepsilon_s}{\varepsilon_s}$$

Non è neppur necessario aggiungere che un conveniente cambio di distanza polare potrebbe far assumere a ζ quel valore che più si credesse conveniente.

* * *

Concluderemo piuttosto, quanto fin qui siamo venuti esponendo, col dire che il problema del tracciamento delle linee d'influenza delle reazioni iperstatiche di un sistema elastico con-

tinuo, così come quello della ricerca degli abbassamenti di un qualunque suo punto, può sempre ridursi alla costruzione della linea elastica o poligono di deformazione del sistema supposto vincolato rigidamente nei soli suoi estremi e caricato in dati suoi punti da forze date

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$$

L'ordinata generica di una tal linea elastica è della forma

$$P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 \eta_3 + \dots + P_n \eta_n$$

$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$ essendo le ordinate generiche delle varie linee elastiche dello stesso sistema caricato successivamente e separatamente in quegli stessi suoi punti da un carico unitario.

I pesi elastici, i quali permettono di costruire quella linea come poligono funicolare, hanno per espressione generale

$$P_1 w_1 + P_2 w_2 + P_3 w_3 + \dots + P_n w_n$$

essendo $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ le espressioni dei vari pesi elastici relativi a quelle linee elastiche parziali.

È bene poi tener presente che nel caso, frequentissimo in pratica, di sistemi simmetrici rispetto al loro punto di mezzo, i procedimenti di calcolo esposti, così come quelli che nel seguito verremo deducendo da essi, si semplificano notevolmente, potendosi in ogni caso limitare sia i calcoli numerici che le costruzioni grafiche ad una metà soltanto di quelle occorrenti nel caso generale.

* * *

Nelle Tavole XXIV e XXV vennero applicate le considerazioni esposte alla ricerca delle linee d'influenza delle reazioni staticamente indeterminate di una trave continua a 5 appoggi semplici, trave che, per maggior generalità, si è supposta dis-simmetrica.

I poligoni disegnati nelle figg. *b), c), d)* della Tavola XXIV, con tratto continuo, rappresentano le varie linee elastiche relative alla trave liberata dai tre appoggi intermedi, e sollecitata in corrispondenza di ciascuno di essi da carichi unitari.

Supposti poi rigidi tutti gli appoggi ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$) e determinate, per mezzo delle solite equazioni di condizione, le costanti $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ relative al caso del carico unitario applicato in luogo dell'appoggio C_1 , si sono calcolati i pesi elastici W_1 determinanti il poligono funicolare punteggiato (Tav. XXIV, fig. *b*) che, colla prima delle linee elastiche sopra ricordate, racchiude la superficie d'influenza della reazione incognita \mathfrak{C}_1 .

La stessa superficie d'influenza venne poi nuovamente designata nella fig. *b* della Tavola XXV, in una diversa scala, prefissata ad arbitrio, coll'aiuto dei pesi elastici $W'_1 = w_1 - W_1$.

Analogo procedimento si è seguito per ciò che concerne l'appoggio C_2 (figg. *c* della Tav. XXIV e *c* della Tav. XXV).

La linea d'influenza della reazione \mathfrak{C}_3 (fig. *d* della Tav. XXV) venne invece calcolata nell'ipotesi che i cedimenti elastici degli appoggi intermedi fossero diversi da zero, e precisamente uguali (nel rapporto stesso di affinità che spetta alle varie linee elastiche della Tav. XXIV) ai segmenti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ della fig. *e* della Tavola XXIV.

* * *

Una importante semplificazione si può introdurre nel calcolo dei pesi elastici w , e quindi anche dei W , tutte le volte che — come nell'esempio testè illustrato — gli estremi della trave sono semplicemente appoggiati.

Liberata dagli appoggi intermedi, la trave risulta infatti staticamente determinata, e, quando venga cimentata da un carico unitario concentrato sulla sezione S a distanza l dall'estremo sinistro A ed l' dall'estremo destro B , si deforma disponendosi, col suo asse geometrico, secondo una certa linea elastica $A'''B'''$ (Tavola XXVI), la quale può considerarsi come composta di due tronchi ben distinti $S'''A'''$ ed $S'''B'''$ relativi, ciascuno, ai due corrispondenti tronchi SA ed SB di trave, obliquamente incastrati in corrispondenza della verticale per S e del resto liberi, sollecitati agli estremi da forze verticali, dirette verso l'alto, eguali rispettivamente ad $1 \frac{l'}{L}$ e ad $1 \frac{l}{L}$, essendo L la distanza fra gli appoggi estremi A, B .

Ora, si supponga di incastrare rigidamente la trave in corrispondenza di uno dei suoi estremi, per es. in B , e di applicare

all'altro estremo A una forza unitaria diretta verticalmente dal basso all'alto; la linea elastica della trave così cimentata può, in ogni caso, venire rappresentata, in un certo rapporto ξ di affinità ⁽¹⁾, da un poligono funicolare $A'B'$ di distanza polare λ collegante certi ben determinati pesi elastici che converremo d'indicare colla lettera w_A .

Similmente si può sempre costruire un altro poligono funicolare $A''B''$, di distanza polare eguale ancora a λ , collegante certi pesi elastici w_B , il quale rappresenta nel medesimo rapporto di affinità ξ , la linea elastica della stessa trave, supposta però incastrata in A e sollecitata da un'analogha forza unitaria in B .

Risulta ora evidente la similitudine esistente fra i tronchi sopra considerati $S'''A'''$ ed $S''B''$ della linea elastica $A''''B''''$ ed i rami loro corrispondenti $S'A'$ ed $S''B''$ delle due linee elastiche ausiliarie $A'B'$ ed $A''B''$; è perciò lecito concludere che la linea elastica cercata può essere rappresentata in disegno, nel solito rapporto di affinità, da un poligono funicolare di distanza polare λ , collegante, nei due tratti AS ed SB , rispettivamente dei pesi elastici della forma

$$w_A \frac{l}{L} \quad \text{e} \quad w_B \frac{l}{L}$$

o, ciò che fa lo stesso, collegante addirittura gli stessi pesi elastici w_A e w_B , purchè si proiettino da distanze polari rispettivamente eguali a

$$\lambda \frac{L}{l} \quad \text{ed a} \quad \lambda \frac{L}{l}$$

Occorre appena avvertire che le linee elastiche ausiliarie $A'B'$ ed $A''B''$ della Tav. XXVI vennero tracciate a solo scopo dimostrativo; in pratica esse non occorrono mai.

La sola conoscenza dei pesi elastici w_A e w_B , anzi, in generale, di una sola parte di essi, permette di tracciare, l'una dopo l'altra, quante si vogliono linee elastiche, come la $A''''B''''$, relative a posizioni comunque varie del carico unitario concentrato.

⁽¹⁾ La trave trattata nella Tavola XXVI è quella stessa che già si era presa in esame nelle tavole precedenti. Per ragione di spazio si è però ridotto il rapporto di affinità ad $1/10$ di quello adottato nella Tavola XXIV.

Si voglia ora costruire una di quelle linee elastiche che nei precedenti paragrafi abbiamo dimostrate utilizzabili come linee d'influenza delle reazioni iperstatiche ovvero delle deformazioni elastiche della trave; si voglia cioè tracciare un poligono funicolare avente l'ordinata generica della forma

$$P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + P_3\eta_3 + \dots + P_n\eta_n$$

$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ essendo grandezze date, ed $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$ essendo gli abbassamenti del punto generico della trave dovuti ad un carico unitario situato rispettivamente a distanze $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ dall'appoggio estremo sinistro A , ed $l'_1, l'_2, l'_3, \dots, l'_n$ dall'appoggio estremo destro B .

È evidente che se nell'espressione generale

$$P_1w_1 + P_2w_2 + P_3w_3 + \dots + P_nw_n$$

di un qualunque peso elastico agente secondo una verticale situata ad una distanza da A maggiore di l_r e minore di l_{r+1} (cioè compresa fra la linea d'azione di P_r e quella di P_{r+1}), si sostituiscono ai pesi parziali, $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ le loro espressioni in funzione dei pesi w_A e w_B

$$w_1 = w_B \frac{l_1}{L}, \quad w_2 = w_B \frac{l_2}{L}, \quad \dots \quad w_r = w_B \frac{l_r}{L},$$

$$w_{r+1} = w_A \frac{l'_{r+1}}{L}, \quad \dots \quad w_n = w_A \frac{l'_n}{L}$$

si trova un'espressione della forma

$$w_B \frac{\sum_1^r Pl}{L} + w_A \frac{\sum_{r+1}^n Pl}{L}$$

la quale si presta, in ogni caso, assai bene al calcolo dei pesi elastici desiderati, quando siano noti i pesi fondamentali w_A e w_B .

**
**

La stessa espressione mostra poi anche come la superficie d'influenza da costruirsi possa sempre ottenersi sotto forma di area racchiusa fra due poligoni funicolari convenientemente sovrapposti colleganti (colla solita distanza polare λ) rispettivamente i pesi

$$w_B \frac{\sum_1^r Pl}{L} \quad \text{e} \quad -w_A \frac{\sum_{r+1}^n Pl'}{L}$$

Ora gli stessi due poligoni possono evidentemente venire tracciati utilizzando direttamente gli stessi pesi elastici fondamentali w_B e w_A , purchè si adottino delle distanze polari rispettivamente eguali a

$$\lambda \frac{L}{\sum_1^r Pl} \quad \text{ed a} \quad -\lambda \frac{L}{\sum_{r+1}^n Pl'}$$

La Tavola XXVII presenta un'applicazione di questo procedimento: in essa si trova disegnata la superficie d'influenza già ottenuta nella fig. *b* della Tavola XXIV, dedotta in scala 5 volte maggiore, utilizzando come rette delle forze le stesse rette dei w_A e dei w_B già rappresentate nella Tavola XXVI.

Il metodo ci è sembrato non indegno di essere segnalato (malgrado che in pratica sia quasi sempre più consigliabile calcolare, nel modo detto nel paragrafo precedente, i pesi elastici W' e dedurne direttamente le linee della Tavola XXV), perchè esso prova come i pesi w_A e w_B , che abbiamo soventi volte indicati col nome di pesi elastici fondamentali, possano a buon diritto considerarsi come quantità caratteristiche del sistema elastico, e, calcolati una volta per tutte, si prestino ad una elegante e completa analisi del comportamento elastico della trave.

**
**

Facciamo ora un passo innanzi, e dimostriamo come il procedimento qui illustrato continui ad essere utilmente applicabile anche quando i sostegni intermedi che vincolano la trave contrastano elasticamente non soltanto i cedimenti verticali, ma

anche le rotazioni delle sezioni situate in corrispondenza dei medesimi.

Problema questo che ha assunto una particolare importanza dacchè a questo tipo ideale di trave vennero dai tecnici ridotti, in via di approssimazione, i vari tipi di travate a più luci, solidali coi loro piedritti, che non di rado si incontrano in pratica, specialmente nelle moderne costruzioni in cemento armato.

Del nuovo tipo di trave continua così definito noi incominceremo al solito coll'analizzare il comportamento elastico determinandone nel modo più generale le deformazioni; ne dedurremo poi come si debba procedere quando il problema consiste nella semplice ricerca delle reazioni iperstatiche.

Siano A e B gli estremi, per il momento comunque vincolati (purchè sempre in modo rigido) della trave elastica da studiarci, e si supponga che in corrispondenza di date sezioni intermedie $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ essa trave sia soggetta a certi vincoli le cui reazioni siano, o possano ritenersi, in ogni caso costituite ciascuna da una forza verticale passante pel baricentro della corrispondente sezione e da una coppia agente nel piano verticale che contiene l'asse geometrico della trave; si indichino con $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_n$ quelle reazioni verticali, da considerarsi come positive se dirette verso l'alto, e con $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3, \dots, \mathcal{M}_n$ i momenti di quelle coppie, da ritenersi positivi se agenti nel senso delle rotazioni positive.

Liberato il sistema elastico da tali vincoli intermedi, lo si assoggetti dapprima all'azione di un carico concentrato ed unitario agente successivamente e separatamente secondo le varie verticali dei vincoli soppressi e secondo la verticale della sezione S della quale si vogliono studiare gli spostamenti effettivi; siano

$$A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots, A_nB_n, A_sB_s$$

le varie linee elastiche della trave, relative a quelle varie condizioni di carico.

Si applichi poi, successivamente e separatamente, negli stessi punti del sistema, un momento unitario negativo e si disegnino in corrispondenza le nuove linee elastiche, che indicheremo brevemente con

$$A'_1B'_1, A'_2B'_2, A'_3B'_3, \dots, A'_nB'_n, A'_sB'_s$$

Allo scopo di non introdurre alcuna ipotesi particolare sulla natura dei vincoli d'estremità, non ci occuperemo per ora del procedimento da seguirsi pel tracciamento di tali linee elastiche: supporremo soltanto, ciò che non pregiudica per nulla la generalità della trattazione, che dette linee siano state rappresentate in disegno in un certo rapporto di affinità costante, che indicheremo colla lettera ξ , mediante poligoni funicolari di distanza polare pure costante ed eguale a λ , colleganti certi convenienti sistemi di pesi elastici, le cui espressioni generiche indicheremo rispettivamente con

$$w_1, w_2, w_3, \dots w_n, w_s,$$

$$w'_1, w'_2, w'_3, \dots w'_n, w'_s.$$

* * *

Se ora, mentre sulla sezione S agisce il carico unitario concentrato, si vogliono ristabilire i vincoli intermedi $C_1, C_2, C_3, \dots C_n$, la trave viene a trovarsi cimentata, oltrechè dal carico applicato in S , anche dalle reazioni verticali $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \dots \mathfrak{G}_n$, e dai momenti $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots \mathfrak{M}_n$, agenti rispettivamente nei punti $C_1, C_2, C_3, \dots C_n$. Ne segue che una sezione generica qualunque della trave la quale per effetto del solo carico unitario in S si era spostata verticalmente di una quantità misurata dalla corrispondente ordinata η_s della linea elastica $A_s B_s$, all'atto della applicazione delle reazioni dei vincoli intermedi viene a subire un nuovo spostamento verticale, misurato, nella stessa scala, da

$$\begin{aligned} & -\mathfrak{G}_1 \eta_1 - \mathfrak{M}_1 \eta'_1 - \mathfrak{G}_2 \eta_2 - \mathfrak{M}_2 \eta'_2 - \mathfrak{G}_3 \eta_3 - \mathfrak{M}_3 \eta'_3 - \dots \\ & \dots - \mathfrak{G}_n \eta_n - \mathfrak{M}_n \eta'_n \end{aligned}$$

dove con $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots \eta_n$, si indicano le ordinate delle linee elastiche

$$A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, \dots A_n B_n$$

e con $\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3, \dots \eta'_n$, si indicano in modo analogo le ordinate delle linee elastiche

$$A'_1 B'_1, A'_2 B'_2, A'_3 B'_3, \dots A'_n B'_n$$

contate tutte sulla verticale della sezione generica considerata.

L'abbassamento definitivo η della sezione stessa può adunque ottenersi sommando algebricamente quei due abbassamenti parziali

$$\eta = \eta_s - \mathfrak{C}_1 \eta_1 - \mathfrak{M}_1 \eta_1' - \mathfrak{C}_2 \eta_2 - \mathfrak{M}_2 \eta_2' - \mathfrak{C}_3 \eta_3 - \mathfrak{M}_3 \eta_3' - \dots \\ \dots - \mathfrak{C}_n \eta_n - \mathfrak{M}_n \eta_n'$$

Ma la η così ottenuta altro non è che l'ordinata generica del poligono funicolare che, con distanza polare eguale a λ , collega i pesi elastici

$$W = w_s - \mathfrak{C}_1 w_1 - \mathfrak{M}_1 w_1' - \mathfrak{C}_2 w_2 - \mathfrak{M}_2 w_2' - \mathfrak{C}_3 w_3 - \mathfrak{M}_3 w_3' - \dots \\ \dots - \mathfrak{C}_n w_n - \mathfrak{M}_n w_n'$$

Un tale poligono rappresenterà adunque nel solito rapporto di affinità ξ la linea elastica della trave supposta vincolata, oltrechè in A ed in B , anche in $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ e caricata in S dal supposto carico unitario concentrato.

È appena necessario aggiungere che, in virtù del teorema di Betti, lo stesso poligono rappresenta anche la *linea di influenza degli abbassamenti del punto S dovuti ad un carico concentrato ed unitario viaggiante sulla trave*.

Il procedimento esposto può adunque venire utilmente applicato allo studio delle deformazioni elastiche; esso richiede però una preliminare determinazione delle $2n$ costanti

$$\mathfrak{C}_1, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{C}_3, \mathfrak{M}_3, \dots, \mathfrak{C}_n, \mathfrak{M}_n$$

Tali costanti, quando non siano già note le linee d'influenza delle reazioni iperstatiche dei vincoli intermedi, possono essere determinate imponendo che gli abbassamenti e le rotazioni definitive delle sezioni $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ della trave siano eguali a quelli che i corrispondenti piedritti elastici possono effettivamente consentire. Detti infatti

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$$

i cedimenti elastici verticali degli estremi dei singoli piedritti, dovuti a carichi unitari su di essi direttamente applicati, e dette

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \dots, \vartheta_n$$

le rotazioni elastiche degli estremi stessi prodotte da momenti unitari su di essi agenti, si hanno le seguenti $2n$ equazioni di condizione

$$\begin{aligned} \eta_{1s} - \zeta_1 \eta_{11} - \mathfrak{M}_1 \eta_{11}' - \dots - \zeta_n \eta_{1n} - \mathfrak{M}_n \eta_{1n}' &= \zeta_1 \varepsilon_1 \\ \varphi_{1s} - \zeta_1 \varphi_{11} - \mathfrak{M}_1 \varphi_{11}' - \dots - \zeta_n \varphi_{1n} - \mathfrak{M}_n \varphi_{1n}' &= \mathfrak{M}_1 \vartheta_1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\ \eta_{ns} - \zeta_1 \eta_{n1} - \mathfrak{M}_1 \eta_{n1}' - \dots - \zeta_n \eta_{nn} - \mathfrak{M}_n \eta_{na}' &= \zeta_n \varepsilon_n \\ \varphi_{ns} - \zeta_1 \varphi_{n1} - \mathfrak{M}_1 \varphi_{n1}' - \dots - \zeta_n \varphi_{nn} - \mathfrak{M}_n \varphi_{na}' &= \mathfrak{M}_n \vartheta_n \end{aligned}$$

nella quale si è indicato:

- con η_{pq} l'abbassamento della sezione p^{ma} della trave svincolata dai piedritti intermedi dovuto ad un carico unitario applicato verticalmente in corrispondenza della sezione q^{ma} ;
- con η_{pq}' l'abbassamento della stessa sezione p^{ma} per un momento unitario negativo agente sulla sezione q^{ma} ;
- con φ_{pq} la rotazione subita dalla solita p^{ma} sezione per l'azione di un carico unitario agente sulla sezione q^{ma} ; ed infine
- con φ_{pq}' la rotazione subita dalla stessa sezione p^{ma} per effetto di un momento unitario negativo applicato in corrispondenza della q^{ma} sezione ⁽¹⁾.

In virtù del teorema di reciprocità

$$\begin{aligned} \eta_{pq} &= \eta_{qp} \\ \eta_{pq}' &= \varphi_{qp} \\ \varphi_{pq}' &= \varphi_{qp}' \end{aligned}$$

⁽¹⁾ La misura delle rotazioni φ e φ' non presenta in pratica difficoltà di sorta. L'inclinazione di un lato qualunque di un poligono funicolare sopra la sua retta di chiusura, essendo eguale all'inclinazione del corrispondente raggio proiettante del poligono delle forze sopra la parallela condotta pel polo a quella retta di chiusura, è misurata, nella base λ , dal segmento che quei due raggi intercettano sulla retta delle forze.

perciò lo stesso sistema di equazioni può anche scriversi

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1(\eta_{11} + \varepsilon_1) + \mathfrak{M}_1\varphi_{11} + \dots + \mathfrak{C}_n\eta_{n1} + \mathfrak{M}_n\varphi_{n1} &= \eta_{s1} \\ \mathfrak{C}_1\eta_{11}' + \mathfrak{M}_1(\varphi_{11}' + \theta_1) + \dots + \mathfrak{C}_n\eta_{n1}' + \mathfrak{M}_n\varphi_{n1}' &= \eta_{s1}' \\ \dots & \dots \\ \mathfrak{C}_1\eta_{1n} + \mathfrak{M}_1\varphi_{1n} + \dots + \mathfrak{C}_n(\eta_{nn} + \varepsilon_n) + \mathfrak{M}_n\varphi_{nn} &= \eta_{sn} \\ \mathfrak{C}_1\eta_{1n}' + \mathfrak{M}_1\varphi_{1n}' + \dots + \mathfrak{C}_n\eta_{nn}' + \mathfrak{M}_n(\varphi_{nn}' + \theta_n) &= \eta_{sn}' \end{aligned}$$

* * *

Si supponga ora invece di voler ristabilire i vincoli intermedi $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$, mentre sulla sezione S agisce il momento unitario che ad essa abbiamo a suo tempo supposto di applicare.

Ripetendo il ragionamento già fatto nel paragrafo precedente, si sarà condotti ad affermare che una sezione generica qualunque della trave, la quale per effetto del solo momento unitario applicato in S si sarebbe spostata verticalmente di una quantità misurata dalla corrispondente ordinata η'_s della linea elastica $A'B'_s$, per effetto delle reazioni dei vincoli intermedi ripristinati, deve subire un nuovo spostamento verticale, misurato, nella stessa scala, dalla solita sommatoria

$$\begin{aligned} & - \mathfrak{C}_1'\eta_1 - \mathfrak{M}_1'\eta_1' - \mathfrak{C}_2'\eta_2 - \mathfrak{M}_2'\eta_2' - \mathfrak{C}_3'\eta_3 - \mathfrak{M}_3'\eta_3' - \dots \\ & \dots - \mathfrak{C}_n'\eta_n - \mathfrak{M}_n'\eta_n' \end{aligned}$$

L'abbassamento definitivo

$$\begin{aligned} \eta' &= \eta'_s - \mathfrak{C}_1'\eta_1 - \mathfrak{M}_1'\eta_1' - \mathfrak{C}_2'\eta_2 - \mathfrak{M}_2'\eta_2' - \mathfrak{C}_3'\eta_3 - \mathfrak{M}_3'\eta_3' - \dots \\ & \dots - \mathfrak{C}_n'\eta_n - \mathfrak{M}_n'\eta_n' \end{aligned}$$

può adunque, anche una volta, ottenersi come ordinata generica del poligono funicolare che, con distanza polare eguale (secondo il solito), a λ , collega i pesi elastici

$$\begin{aligned} W' &= w'_s - \mathfrak{C}_1'w_1 - \mathfrak{M}_1'w_1' - \mathfrak{C}_2'w_2 - \mathfrak{M}_2'w_2' - \dots \\ & \dots - \mathfrak{C}_n'w_n - \mathfrak{M}_n'w_n' \end{aligned}$$

Ed ancora una volta si potrà dire che un tale poligono, rappresentante (nel solito rapporto di affinità ξ) la linea elastica della trave supposta vincolata oltrechè in A ed in B , anche in $C_1, C_2, C_3, \dots C_n$, e sollecitata in S dall'ipotetico momento unitario, può assumersi come *linea d'influenza delle rotazioni provocate nella sezione S da un carico unitario e concentrato viaggiante sulla trave.*

Le equazioni di condizione determinanti il nuovo sistema di costanti $\mathfrak{E}'_1, \mathfrak{M}'_1, \mathfrak{E}'_2, \mathfrak{M}'_2, \mathfrak{E}'_3, \mathfrak{M}'_3, \dots \mathfrak{E}'_n, \mathfrak{M}'_n$, sono, come sarebbe facile dimostrare, le seguenti

$$\begin{aligned} \eta_{1s}' &= \mathfrak{E}'_1 \eta_{11} - \mathfrak{M}'_1 \eta_{11}' - \dots - \mathfrak{E}'_n \eta_{1n} - \mathfrak{M}'_n \eta_{1n}' = \mathfrak{E}'_1 \varepsilon_1 \\ \varphi_{1s}' &= \mathfrak{E}'_1 \varphi_{11} - \mathfrak{M}'_1 \varphi_{11}' - \dots - \mathfrak{E}'_n \varphi_{1n} - \mathfrak{M}'_n \varphi_{1n}' = \mathfrak{M}'_1 \theta_1 \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \eta_{ns}' &= \mathfrak{E}'_1 \eta_{n1} - \mathfrak{M}'_1 \eta_{n1}' - \dots - \mathfrak{E}'_n \eta_{nn} - \mathfrak{M}'_n \eta_{nn}' = \mathfrak{E}'_n \varepsilon_n \\ \varphi_{ns}' &= \mathfrak{E}'_1 \varphi_{n1} - \mathfrak{M}'_1 \varphi_{n1}' - \dots - \mathfrak{E}'_n \varphi_{nn} - \mathfrak{M}'_n \varphi_{nn}' = \mathfrak{M}'_n \theta_n \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}'_1 (\eta_{11} + \varepsilon_1) + \mathfrak{M}'_1 \varphi_{11} + \dots + \mathfrak{E}'_n \eta_{n1} + \mathfrak{M}'_n \varphi_{n1} &= \varphi_{s1} \\ \mathfrak{E}'_1 \eta_{11}' + \mathfrak{M}'_1 (\varphi_{11}' + \theta_1) + \dots + \mathfrak{E}'_n \eta_{n1}' + \mathfrak{M}'_n \varphi_{n1}' &= \varphi_{s1}' \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mathfrak{E}'_1 \eta_{1n} + \mathfrak{M}'_1 \varphi_{1n} + \dots + \mathfrak{E}'_n (\eta_{nn} + \varepsilon_n) + \mathfrak{M}'_n \varphi_{nn} &= \varphi_{sn} \\ \mathfrak{E}'_1 \eta_{1n}' + \mathfrak{M}'_1 \varphi_{1n}' + \dots + \mathfrak{E}'_n \eta_{nn}' + \mathfrak{M}'_n (\varphi_{nn}' + \theta_n) &= \varphi_{sn}' \end{aligned}$$

* *
* *

Si supponga finalmente che un ulteriore piedritto C_s venga a vincolare la trave in corrispondenza della sezione considerata S , e si indichi con ε_s il suo cedimento elastico verticale dovuto ad un carico unitario su di esso direttamente applicato, con θ_s la rotazione che un momento unitario positivo può provocare nella sua sezione estrema, con \mathfrak{E}_s il valore della reazione verticale incognita e con \mathfrak{M}_s la grandezza del momento pure incognito con cui esso piedritto si oppone alle deformazioni del sistema.

Ricordando che, quando il carico unitario occupa sulla trave una data posizione generica arbitraria, il cedimento verticale e la rotazione della sezione S , supposta libera, sarebbero misurati rispettivamente da

$$\eta = \eta_s - \mathfrak{C}_1 \eta_1 - \mathfrak{M}_1 \eta_1' - \dots - \mathfrak{C}_n \eta_n - \mathfrak{M}_n \eta_n'$$

e da

$$\eta' = \eta_s' - \mathfrak{C}_1' \eta_1 - \mathfrak{M}_1' \eta_1' - \dots - \mathfrak{C}_n' \eta_n - \mathfrak{M}_n' \eta_n'$$

ordinate generiche delle due deformate costruite, è facile convincersi che l'imporre l'eguaglianza fra l'abbassamento effettivo della sezione S della trave ed il cedimento elastico del sottostante appoggio C_s conduce alla equazione di condizione

$$\eta - \mathfrak{C}_s \eta_0 - \mathfrak{M}_s \eta_0' = \mathfrak{C}_s \varepsilon_s$$

essendo η_0 ed η_0' gli abbassamenti della sezione S , supposta ancor libera dal nuovo vincolo, dovuti rispettivamente ad un carico unitario e ad un momento negativo pure unitario su di essa applicati.

Similmente l'imporre l'eguaglianza fra la rotazione effettivamente subita dalla sezione S e quella subita dalla sezione terminale del sottostante piedritto conduce alla equazione

$$\eta' - \mathfrak{C}_s \varphi_0 - \mathfrak{M}_s \varphi_0' = \mathfrak{M}_s \theta_s$$

essendo qui φ_0 e φ_0' le rotazioni della stessa sezione dovute rispettivamente allo stesso carico ed allo stesso momento.

Ricordando che al solito dev'essere

$$\eta_0' = \varphi_0$$

si ha pertanto il sistema

$$\mathfrak{C}_s(\eta_0 + \varepsilon_s) + \mathfrak{M}_s \varphi_0 = \eta$$

$$\mathfrak{C}_s \eta_0' + \mathfrak{M}_s(\varphi_0' + \theta_s) = \eta'$$

dal quale, posto

$$D = \begin{vmatrix} \eta_0 + \varepsilon_s & \varphi_0 \\ \eta_0' & \varphi_0' + \theta_s \end{vmatrix} = (\eta_0 + \varepsilon_s)(\varphi_0' + \theta_s) - \eta_0' \varphi_0$$

si passa subito all'altro

$$\zeta_s = \frac{\varphi_0' + \theta_s}{D} \eta - \frac{\varphi_0}{D} \eta'$$

$$\mathfrak{M}_s = \frac{\eta_0 + \varepsilon_s}{D} \eta' - \frac{\eta_0'}{D} \eta$$

ovvero

$$\frac{D}{\varphi_0' + \theta_s} \zeta_s = \eta - \frac{\varphi_0}{\varphi_0' + \theta_s} \eta'$$

$$\frac{D}{\eta_0 + \varepsilon_s} \mathfrak{M}_s = \eta' - \frac{\eta_0'}{\eta_0 + \varepsilon_s} \eta$$

Se pertanto al primo poligono di deformazione, disegnato al solito collegando i pesi elastici W con un poligono funicolare di distanza polare λ , si sovrappone il secondo poligono collegante i pesi elastici W' , in base però ad una nuova distanza polare eguale a

$$\lambda \frac{\varphi_0' + \theta_s}{\varphi_0}$$

la superficie che tra i due poligoni viene a trovarsi racchiusa rappresenta la legge di variazione della reazione verticale ζ_s ; e precisamente l'ordinata del primo poligono contata a partire dal secondo poligono, su di una verticale generica, assumendo come unità di misura

$$\frac{D}{\varphi_0' + \theta_s}$$

rappresenta la grandezza di quella reazione incognita per un carico unitario agente secondo quella verticale generica.

Similmente la superficie d'influenza del momento \mathfrak{M}_s si otterrà sovrapponendo al secondo poligono, disegnato con distanza polare λ , il primo, tracciato assumendo la distanza polare eguale a

$$\lambda \frac{\eta_0 + \varepsilon_s}{\eta_0'}$$

La grandezza di quel momento incognito per un carico unitario agente secondo una verticale generica si otterrà ancor qui

leggendo l'ordinata del secondo poligono contata a partire dal primo nella unità di misura

$$\frac{D}{\eta_0 + \varepsilon_s}$$

* * *

Nella Tavola XXVIII il procedimento esposto venne applicato allo studio di una trave della lunghezza di metri 30 semplicemente appoggiata agli estremi A e B e solidale, in due punti intermedi C_1 e C_2 , a due piedritti elastici rigidamente incastrati al piede.

Le figure $a)$, $b)$, $c)$, $d)$ rappresentano le deformate dell'asse geometrico della trave supposta liberata dai piedritti intermedi ed assoggettata rispettivamente alle quattro sollecitazioni unitarie

$$\mathfrak{C}_1 = -1, \quad \mathfrak{M}_1 = -1, \quad \mathfrak{C}_2 = -1, \quad \mathfrak{M}_2 = -1$$

Nelle stesse figure sono state graficamente rappresentate anche le quattro grandezze

$$\varepsilon_1 \quad \theta_1 \quad \varepsilon_2 \quad \theta_2$$

misuranti la deformabilità dei piedritti.

La Tavola dovendo avere carattere *esclusivamente dimostrativo*, tale deformabilità si è assunta assai più rilevante, a fronte della supposta deformabilità della trave, di ciò che nella pratica può avvenire, e ciò allo scopo di metterne in particolare evidenza le conseguenze.

Le quali conseguenze si possono agevolmente rilevare dall'esame delle figg. $e)$ ed $f)$, nelle quali le superficie d'influenza della reazione verticale \mathfrak{C}_1 e del momento \mathfrak{M}_1 , relativi al piedritto sinistro vennero costruite mediante sovrapposizione, in convenienti scale, delle due deformate dell'asse geometrico della trave supposto vincolato, oltrechè in A ed in B , anche in C_2 e cimentato in C_1 dalle due sollecitazioni unitarie

$$\mathfrak{C}_1 = -1 \quad \text{ed} \quad \mathfrak{M}_1 = -1$$

TAVOLA XXIV

(pag. 444).

Trattazione grafica di una trave continua su cinque appoggi
(Costruzione dei diagrammi d'influenza delle reazioni degli appoggi
intermedii).

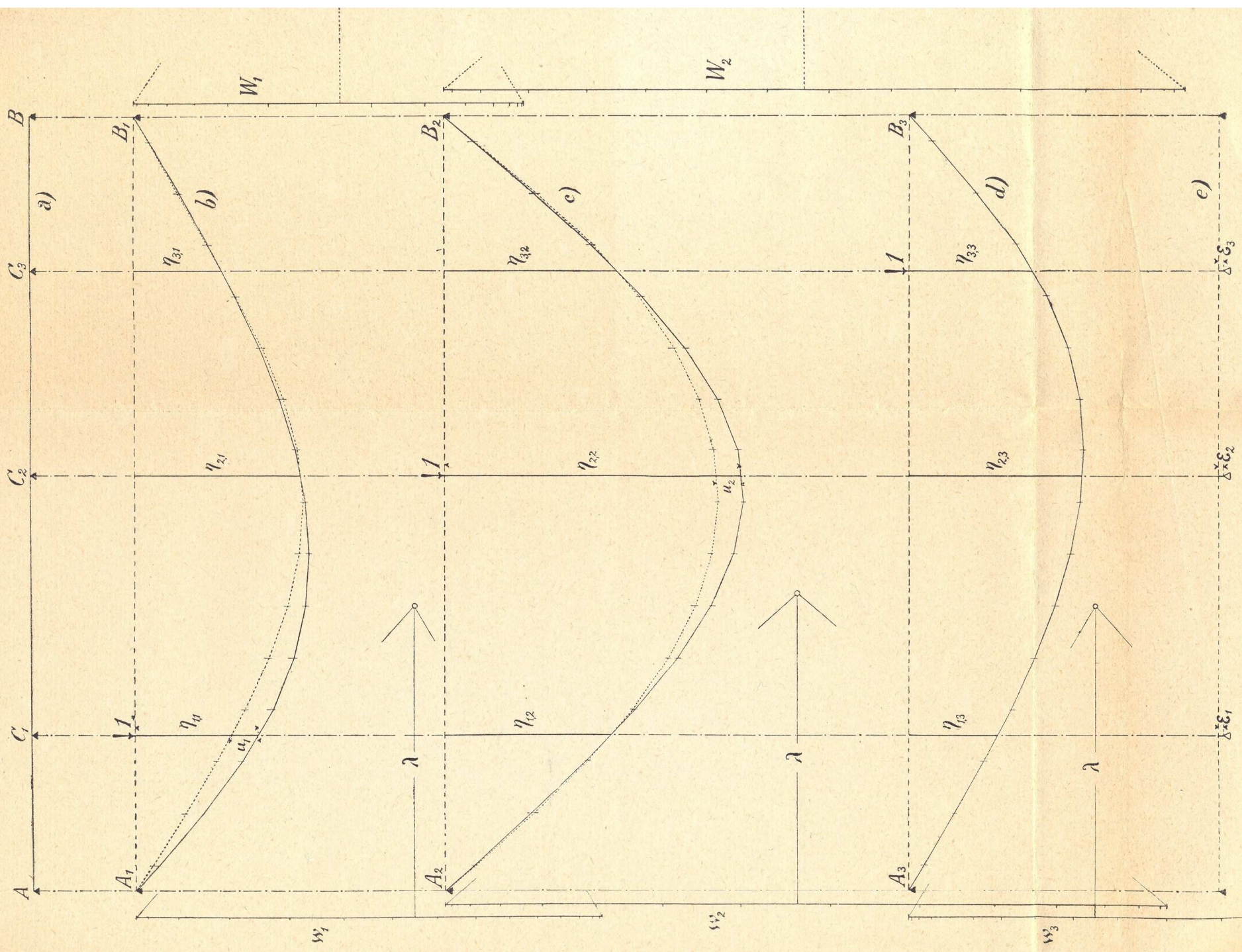


TAVOLA XXV

(pag. 444).

Trattazione grafica di una trave continua su cinque appoggi
(Tracciamento delle linee d'influenza delle reazioni degli appoggi
intermedii).

