IV.

L'energia potenziale elastica.

Diremo che un solido elastico è nel suo *stato naturale* quando i diversi elementi di volume che lo compongono ed i diversi elementi di superficie che lo limitano non sono soggetti all'azione di alcuna forza esterna.

Nell'ordinario modo di presentare la teoria si suppone che, nello stato naturale del corpo, tutti gli elementi che lo compongono si trovino nel loro stato non deformato, di guisa che ogni sua porzione, anche supposta isolata e sottratta all'azione del resto, tenda a conservare invariato il proprio stato.

Ma in generale non è così.

In generale, quando il corpo si trova nel suo stato naturale, pur essendo libero da ogni forza esterna esplicitamente data, è ancora soggetto a certi vincoli: in virtù di questi, ovvero anche soltanto in causa della connessione esistente fra le varie sue parti, queste possono trovarsi in uno stato di mutua costrizione, o *coazione*, che non si elimina fino a che il corpo non viene sciolto da quei vincoli, o modificato nel suo stato di connessione mediante uno o più tagli, o addirittura sconnesso in un numero conveniente di parti indipendenti.

Se pertanto è legittimo assumere lo stato naturale del corpo come stato di riferimento, misurando a partire da esso gli spostamenti dei suoi punti, non si può riferirsi a questo medesimo stato nella misura delle deformazioni dei singoli suoi elementi se non si vuole trascurare la deformazione iniziale degli elementi stessi.

Nello studio delle deformazioni di ciascun elemento si dovrà invece, in generale, riferirsi allo *stato non deformato*, a quello stato cioè di equilibrio, certamente stabile, in cui esso spontaneamente si porta allorquando non soltanto non è soggetto ad alcuna forza esplicitamente data, ma esso viene altresì reso del tutto libero dai vincoli che ne limitano la deformabilità, non esclusi quelli che gli derivano dalla presenza degli altri elementi del corpo dato.

Ciò posto siano

$$(\varepsilon_x)_0\,,\ (\varepsilon_y)_0\,,\ \ldots,\ (\gamma_{xy})_0$$

le sei componenti, nulle o non nulle, a seconda dei casi, della deformazione che l'elemento generico del corpo dato ha già subìta quando questo si trova nello stato naturale.

Quando esse non son tutte nulle, lo stato dell'elemento in una configurazione generica del corpo, definita da un dato sistema di spostamenti u, v, w dei singoli suoi punti, può bensì caratterizzarsi mediante sei funzioni che noi continueremo a indicare colle notazioni $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots, \gamma_{xy}$, ma queste non potranno più farsi derivare da quegli spostamenti conformemente alle (4).

La deformazione in questione risulta infatti dalla sovrapposizione della data deformazione iniziale e della nuova deformazione le cui componenti contrassegneremo coll'indice *uno* ponendo

$$(\varepsilon_x)_1 = \frac{\partial u}{\partial x}\,,\quad (\varepsilon_y)_1 = \frac{\partial v}{\partial y}\,,\ \ldots\ldots,\quad (\gamma_{xy})_1 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Se ci limitiamo, come del resto dobbiamo fare date le ipotesi generali da cui abbiamo prese le mosse, a supporre che queste due successive deformazioni siano entrambe dello stesso ordine di grandezza, le componenti della deformazione effettiva si otterranno sommando le corrispondenti componenti delle due deformazioni supposte coesistenti.

Si hanno così per le componenti di deformazione, nel caso più generale, le espressioni

$$\left.\begin{array}{c}
\varepsilon_x = (\varepsilon_x)_0 + \dfrac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = (\varepsilon_y)_0 + \dfrac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = (\varepsilon_z)_0 + \dfrac{\partial w}{\partial z} \\
\gamma_{yz} = (\gamma_{yz})_0 + \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} \qquad \gamma_{zx} = (\gamma_{zx})_0 + \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\
\gamma_{xy} = (\gamma_{xy})_0 + \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}
\end{array}\right\} \quad (14)$$

le quali comprendono le (4) come caso particolare.

***

Passiamo ora a precisare che cosa dobbiamo intendere quando affermiamo che un solido è elastico: vediamo cioè di concretare quali siano le condizioni che debbono essere verificate perchè la deformazione, che ormai abbiamo dal punto di vista geometrico completamente caratterizzata, sia suscettibile di scomparire spontaneamente al cessare delle cause che l'hanno prodotta.

Osserviamo subito che la tendenza del solido elastico deformato a ritornare nello stato naturale, anzi più generalmente, la tendenza che ogni suo elemento possiede a ritornare nello stato non deformato, si esprime ammettendo l'esistenza di una energia potenziale nella quale si deve intendere trasformato il lavoro meccanico che è stato necessario eseguire per portare il corpo nel suo stato attuale di coazione elastica, e che è suscettibile di trasformarsi di bel nuovo in lavoro se la deformazione viene ad annullarsi.

Sulla natura di questa *energia potenziale elastica* noi faremo le ipotesi seguenti. Ammetteremo in primo luogo che l'energia di un dato solido elastico sia la somma delle energie elementari proprie dei singoli suoi elementi, e che ciascuna di queste risulti completamente definita dalla conoscenza dello stato dell'elemento a cui si riferisce, senza che occorra far intervenire nella sua definizione la sua posizione nello spazio, nè lo stato degli altri elementi che costituiscono il solido, nè la posizione di questi per rapporto al primo.

L'energia potenziale elastica potrà dunque scriversi sotto la forma

$$\Phi = \int \varphi \, d V \tag{15}$$

l'integrale essendo esteso a tutto lo spazio V, connesso, occupato dal corpo, e φ essendo una funzione delle sei componenti di deformazione $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots, \gamma_{xy}$, che supporremo uniforme, finita, continua e sviluppabile nelle potenze ascendenti di queste variabili secondo la nota formola di Mac-Laurin:

$$\varphi = \varphi_{(\varepsilon_x = \ldots = 0)} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right)_{(\varepsilon_x = \ldots = 0)} \varepsilon_x + \ldots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right)_{(\varepsilon_x = \ldots = 0)} \gamma_{xy} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x^2}\right)_{(\varepsilon_x = \ldots = 0)} \varepsilon_x^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y}\right)_{(\varepsilon_x = \ldots = 0)} \varepsilon_x \varepsilon_y + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma_{xy}^2}\right)_{(\varepsilon_x = \ldots = 0)} \gamma_{xy}^2 +$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Occorre appena avvertire che le condizioni $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \ldots = \gamma_{xy} = 0$ esprimono che l'elemento non è deformato. In queste condizioni noi abbiamo detto che esso si trova in equilibrio stabile. In assenza di forze esterne la sua energia potenziale elastica deve essere minima. Riterremo che tale energia sia nulla ed imporremo che in ogni altro caso l'energia potenziale elastica elementare sia positiva.

Ciò richiede intanto che nell'espressione di φ si annullino tanto il termine costante quanto il gruppo dei termini di primo grado, per valori qualsiansi dei parametri variabili; richiede cioè che si abbia

$$\varphi_{(\varepsilon_x = \ldots = 0)} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right)_{(\varepsilon_x = \ldots = 0)} = \ldots = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right)_{(\varepsilon_x = \ldots = 0)} = 0$$

Quanto ai termini del secondo grado noi supporremo che i loro coefficienti non siano tutti identicamente nulli nè trascurabili a fronte di quelli dei termini di grado superiore: si possono allora trascurare questi termini di grado superiore a fronte di quelli del secondo grado e la condizione di minimo sopra enunciata risulta soddisfatta ogniqualvolta la forma

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x^2}\right)_{(\varepsilon_x = \ldots = 0)} \varepsilon_x^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y}\right)_{(\varepsilon_x = \ldots = 0)} \varepsilon_x \varepsilon_y + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma_{xy}^2}\right)_{(\varepsilon_x = \ldots = 0)} \gamma_{xy}^2$$

a cui si riduce lo sviluppo, è essenzialmente positiva.

L'energia potenziale elastica elementare sarà adunque per noi una *forma quadratica essenzialmente positiva delle sei componenti di deformazione.*

* * *

Il suo sviluppo completo che consta di 21 termini, contiene, in generale, 21 coefficienti distinti costanti, cioè indipendenti dalle $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots, \gamma_{xy}$, e che perciò si possono scrivere semplicemente

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma_{xy}^2}$$

I loro valori dipendono dalla natura della materia di cui l'elemento è costituito, e debbono risultare determinati quando sia completamente definito, almeno in ordine alle proprietà elastiche, lo stato non deformato dell'elemento.

Essi sono quindi da considerarsi come variabili da corpo a corpo, anzi, in generale, da punto a punto dello stesso corpo in modo affatto generico, salve soltanto alcune restrizioni che derivano dalla imposta positività della funzione φ.

Perchè infatti tale funzione sia positiva per qualunque sistema di valori delle componenti di deformazione, è noto che occorre e basta che siano positivi il suo discriminante e tutti i minori che da esso si ottengono sopprimendo ad arbitrio un certo numero di linee e le corrispondenti colonne.

Avremo occasione di ritornare più innanzi sopra queste condizioni e di analizzarle dettagliatamente in un caso particolare molto importante; per ora ci limitiamo a rilevare che esse implicano, fra l'altro, che siano positivi i sei coefficienti

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varepsilon_x^2}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\varepsilon_y^2}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\varepsilon_z^2}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\gamma_{yz}^2}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\gamma_{zx}^2}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\gamma_{xy}^2}$$

* * *

Siano F_x, F_y, F_z le componenti, per unità di volume, secondo i tre assi ortogonali, della forza applicata alla particella dV.

In altri termini, siano

$$F_x dV, \quad F_y dV, \quad F_z dV$$

le componenti della forza applicata alla massa contenuta in dV.

Oltre a queste, che diconsi *forze di massa*, si possono avere delle *pressioni* o più generalmente delle *forze superficiali.*

Siano

$$P_x dS, \quad P_y dS, \quad P_z dS$$

le componenti della forza applicata all'elemento dS della superficie S del corpo.

Immaginiamo di imprimere idealmente al sistema, supposto in equilibrio sotto l'azione di queste forze, una deformazione virtuale, vale a dire congruente e compatibile, nonchè piccolissima (cioè dello stesso ordine di grandezza di quella che esso ha già subìta per passare dallo stato naturale allo stato attuale), durante la quale ogni punto già venuto dalla posizione iniziale di coordinate

$$x, \quad y, \quad z$$

alla posizione attuale di coordinate

$$x+u, \quad y+v, \quad z+w$$

passi ad una nuova posizione di coordinate

$$x+u+\delta u, \quad y+v+\delta v, \quad z+w+\delta w$$

le δu, δv, δw soddisfacendo alle stesse equazioni di compatibilità a cui soddisfano per ipotesi le u, v, w.

Ogni forza di componenti

$$X, \quad Y, \quad Z$$

ad esso punto applicata — supposto che non varii nè in grandezza nè in direzione durante gli spostamenti piccolissimi subìti dal punto — compie, durante questa ulteriore deformazione, un lavoro

$$X\delta u + Y\delta v + Z\delta w.$$

Volendo esprimere che la configurazione in cui il sistema è stato preso in considerazione è una configurazione di equilibrio, noi dobbiamo scrivere che la somma di tutti i lavori delle forze esterne è eguale, per qualsiasi deformazione virtuale come quella ora definita, alla variazione prima dell'energia potenziale elastica.

Se pertanto si indicano con

$$\delta\varepsilon_x = \delta\left[(\varepsilon_x)_0 + \frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}(\delta u), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots \quad \delta\gamma_{xy} = \delta\left[(\gamma_{xy})_0 + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial x}(\delta v) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta u)$$

le corrispondenti variazioni delle componenti di deformazione, l'equazione generale dell'equilibrio elastico si può scrivere sotto la forma

$$\left.\begin{aligned}\int_V (F_x\delta u + F_y\delta v + F_z\delta w)\,dV + \int_S (P_x\delta u + P_y\delta v + P_z\delta w)\,dS = \\ = \int_V \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x}\delta\varepsilon_x + \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_y}\delta\varepsilon_y + \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_z}\delta\varepsilon_z + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{yz}}\delta\gamma_{yz} + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{zx}}\delta\gamma_{zx} + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{xy}}\delta\gamma_{xy}\right)dV\end{aligned}\right\}(16)$$

In questa equazione compaiono degli integrali estesi allo spazio occupato dal solido ovvero alla sua superficie.

Ora a rigore tanto quello spazio come la superficie che lo limita dovrebbero esser considerati come variabili al variare dello stato di deformazione. Data però la supposta piccolezza delle deformazioni noi possiamo considerar l'uno e l'altra come costanti riferendoci nelle nostre considerazioni al solido preso nel suo stato naturale.

In tutta la teoria che qui stiamo svolgendo questa norma verrà praticata sistematicamente: alle coordinate dei singoli punti del solido deformato si sostituiranno regolarmente le loro coordinate iniziali; tutte le grandezze relative alla deformazione verranno così riguardate ed introdotte nei calcoli come puri enti analitici sui quali si opererà riferendoli però sempre al sistema preso nel suo stato naturale come se esso non si fosse mai deformato.

* * *

È opportuno che noi ci soffermiamo un istante sul calcolo della variazione dell'energia potenziale elastica, introducendo nelle nostre considerazioni non soltanto i termini del primo ordine, ma anche quelli del secondo, che nel precedente paragrafo abbiamo trascurati.

Si ha precisamente

$$\int_V \varphi(\varepsilon_x+\delta\varepsilon_x,\ \varepsilon_y+\delta\varepsilon_y,\ldots,\ \gamma_{xy}+\delta\gamma_{xy})\,dV=\int_V \varphi(\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ldots,\ \gamma_{xy})\,dV+$$
$$+\int_V\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x}\delta\varepsilon_x+\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_y}\delta\varepsilon_y+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{xy}}\delta\gamma_{xy}\right)dV+$$
$$+\int_V\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varepsilon_x^2}\delta\varepsilon_x^2+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varepsilon_x\partial\varepsilon_y}\delta\varepsilon_x\,\delta\varepsilon_y+\ldots+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\gamma_{xy}^2}\delta\gamma_{xy}^2\right)dV$$

Ma l'espressione entro parentesi nell'ultimo integrale non è altro che la stessa funzione φ calcolata pei valori $\delta\varepsilon_x,\ \delta\varepsilon_y,\ldots\delta\gamma_{xy}$ delle sue sei variabili; si può cioè scrivere più brevemente:

$$\left.\begin{aligned}&\int_V \varphi(\varepsilon_x+\delta\varepsilon_x,\ \varepsilon_y+\delta\varepsilon_y,\ldots\gamma_{xy}+\delta\gamma_{xy})\,dV=\int_V \varphi(\varepsilon_x,\varepsilon_y,\ldots\gamma_{xy})\,dV+\\&+\int_V\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x}\delta\varepsilon_x+\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_y}\delta\varepsilon_y+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{xy}}\delta\gamma_{xy}\right)dV+\int_V\varphi\left(\delta\varepsilon_x,\ \delta\varepsilon_y,\ldots\delta\gamma_{xy}\right)dV\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

Resta così intanto implicitamente dimostrato che la variazione seconda dell'energia elastica è sempre positiva.

Questa constatazione è per noi di importanza fondamentale perchè ci assicura che, se le forze esterne sono indipendenti dagli spostamenti piccolissimi dei loro punti di applicazione, *la configurazione di equilibrio definita dalla* (16) *è sicuramente stabile.*

Ma anche sotto un altro punto di vista la (17) merita di esser tenuta presente.

La configurazione che abbiamo presa in esame nel precedente paragrafo può infatti essere evidentemente una qualunque configurazione di equilibrio: può perciò in particolare essere lo stato naturale del corpo.

Basta supporre che le forze siano tutte nulle e che contemporaneamente siano nulle le componenti u, v, w dello spostamento di un punto qualunque. Allora

$$\varepsilon_x = (\varepsilon_x)_0, \quad \varepsilon_y = (\varepsilon_y)_0, \ldots . \gamma_{xy} = (\gamma_{xy})_0$$

e l'equazione generale dell'equilibrio spontaneo è

$$\int_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right)_0 \delta\varepsilon_x + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y}\right)_0 \delta\varepsilon_y + \ldots . + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right)_0 \delta\gamma_{xy} \right] dV = 0 \qquad (18)$$

Se in queste condizioni si applica la (17) assumendo come deformazione virtuale la deformazione reale che fa effettivamente passare il corpo dallo stato naturale ad un altro stato qualunque di equilibrio, cioè ponendo $(\varepsilon_x)_1$, $(\varepsilon_y)_1, \ldots . (\gamma_{xy})_1$ in luogo rispettivamente di $\delta\varepsilon_x$, $\delta\varepsilon_y, \ldots . \delta\gamma_{xy}$, si ottiene per l'energia elastica l'espressione

$$\left.\begin{aligned} \int_V \varphi\Big(\varepsilon_x, \ \varepsilon_y, \ldots \gamma_{xy}\Big)\, dV = \int_V \varphi\Big((\varepsilon_x)_0, \ (\varepsilon_y)_0, \ldots (\gamma_{xy})_0\Big)\, dV + \\ + \int_V \varphi\Big((\varepsilon_x)_1, \ (\varepsilon_y)_1, \ldots (\gamma_{xy})_1\Big)\, dV \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

la quale ce la presenta come composta di due termini essenzialmente distinti: l'uno

$$\Phi_0 = \int_V \varphi_0 \, dV$$

funzione soltanto delle componenti della deformazione preesistenti nello stato naturale del corpo: l'altro

$$\Phi_1 = \int_V \varphi_1 \, dV$$

dipendente soltanto dalla variazione di stato che il corpo subisce nel suo passaggio dallo stato naturale allo stato generico di deformazione preso in esame.

Entrambi questi termini sono essenzialmente positivi anzi consistenti in una somma di quantità essenzialmente positive. Essi non si annullano perciò se non quando in essi tutte le variabili son nulle.

Ora noi già sappiamo che la condizione

$$(\varepsilon_x)_0 = (\varepsilon_y)_0 = \ldots = (\gamma_{xy})_0 = 0$$

si verifica sempre e soltanto quando nello stato naturale nessun elemento del corpo è deformato: per i corpi che soddisfano a questa condizione, e per essi soli, l'energia potenziale elastica si riduce al solo secondo integrale

$$\int_V \varphi_1 \, dV$$

Quando per contro, e solo quando si ha

$$(\varepsilon_x)_1 = (\varepsilon_y)_1 = \ldots\ldots = (\gamma_{xy})_1 = 0$$

allora, annullandosi il secondo integrale, l'energia elastica si riduce al primo

$$\int_V \varphi_0 \, dV$$

il quale adunque rappresenta l'energia propria dello stato naturale del corpo.

In ogni altro stato del corpo si ha sempre un'energia elastica

$$\Phi > \Phi_0 .$$

In altre parole, mentre per alcune parti del corpo la variazione d'energia elastica nel passaggio dallo stato naturale allo stato deformato può anche essere negativa, per l'intiero sistema invece ogni deformazione importa sempre un aumento propriamente detto dell'energia elastica.

Sotto altra forma ancora, tra tutti i valori che questa energia può assumere, corrispondentemente a tutti i *possibili* stati del corpo, quello Φ_0 che spetta allo stato naturale è il minimo.

In particolare se l'energia elastica di un corpo non è nulla nello stato naturale essa non può esser nulla in nessun altro stato possibile: non esiste cioè nessuna deformazione congruente e compatibile la quale possa annullare la deformazione di tutti i suoi elementi.

Per ciò fare occorrerebbe attribuire a tali elementi delle deformazioni non congruenti o almeno non compatibili coi vincoli a cui il corpo è soggetto: occorrerebbe cioè, come abbiamo già detto, liberare il corpo da questi vincoli, o praticarvi dei tagli, o eventualmente anche sconnetterlo in modo conveniente.

Sotto questo punto di vista le due porzioni in cui ci si è presentata divisa l'energia potenziale elastica di un corpo deformato si differenziano anche meglio per ciò che la prima

$$\Phi_0 = \int_V \varphi_0 \, dV$$

non può essere restituita in libertà se non distruggendo la compagine del complesso dato, mentre l'altra, la quale deriva direttamente dall'azione delle forze deformatrici, viene dal corpo restituita sotto forma di lavoro esterno al cessare dell'azione di queste forze.

Per queste ragioni l'energia propria dello stato naturale prende il nome di *energia vincolata.*

Alla differenza

$$\Phi - \Phi_0 = \Phi_1 = \int_V \varphi_1 \, dV$$

si dà invece di solito il nome di *lavoro di deformazione.*

***

È facile far comparire nell'espressione del lavoro di deformazione le forze esterne e gli spostamenti che, per causa loro, subiscono i loro punti di applicazione.

A tale fine ricordiamo che esiste un teorema di Eulero sulle funzioni omogenee, secondo il quale la somma delle derivate parziali prime di una tale funzione, moltiplicate per le rispettive variabili, è identicamente eguale al prodotto della funzione per il suo grado.

Secondo questo teorema si ha adunque

$$2\,\Phi_1 = \int_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right)_1 (\varepsilon_x)_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y}\right)_1 (\varepsilon_y)_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right)_1 (\gamma_{xy})_1 \right] dV$$

Ora se si osserva che le derivate prime della funzione φ rispetto alle varie componenti di deformazione contengono linearmente queste componenti e che perciò

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right)_0 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right)_1, \;\ldots\ldots,\; \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right)_0 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right)_1$$

si vede subito che l'integrale che compare nell'espressione precedente può scindersi nei due

$$\int_V \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} (\varepsilon_x)_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y} (\varepsilon_y)_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} (\gamma_{xy})_1 \right] dV$$

$$-\int_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x}\right)_0 (\varepsilon_x)_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y}\right)_0 (\varepsilon_y)_1 + \ldots\ldots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}}\right)_0 (\gamma_{xy})_1 \right] dV$$

il secondo dei quali è nullo per la (18), mentre il primo può facilmente trasformarsi applicando la (16).

Si ha così la eguaglianza

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}\int_V (F_x u + F_y v + F_z w)\, dV + \frac{1}{2}\int_S (P_x u + P_y v + P_z w)\, dS \quad (20)$$

la quale esprime la seguente importantissima proposizione, nota sotto il nome di teorema di Clapeyron:

Il lavoro di deformazione è eguale alla metà del lavoro che le forze esterne deformatrici eseguirebbero agendo in tutta la loro intensità durante l'intiera variazione di configurazione che porta il sistema dal suo stato naturale allo stato di deformazione che si considera.

***

In pratica accade sovente che le forze che sollecitano un dato corpo elastico derivino dal contatto di altri corpi premuti contro di esso. Può allora essere nota la risultante delle azioni esercitate da ciascuno di essi senza che si conosca la legge di distribuzione di queste azioni sulla superficie di contatto.

In tal caso, se questa superficie è sufficientemente limitata a fronte dell'intiera superficie del corpo elastico in esame, si può, nello studio delle sue condizioni generali di equilibrio, prescindere senza grave errore da quella legge di distribuzione incognita, ed immaginare il corpo sollecitato direttamente dalla risultante nota, come se si trattasse di una forza concentrata.

Precisiamo questo concetto e vediamo in qual modo risulta allora espresso il lavoro di deformazione.

A tal fine incominciamo col supporre che le forze applicate al corpo siano tutte nulle, eccezion fatta soltanto per quelle che si riferiscono agli intorni di un certo numero finito di punti.

Prendiamo in considerazione uno qualunque di questi punti e supponiamo, per fissar le idee, che esso si trovi sulla superficie del corpo.

Detto dS l'elemento di superficie che lo contiene, su cui per ipotesi le P_x, P_y, P_z son diverse da zero, immaginiamo di far tendere a zero le dimensioni dell'elemento, facendo nel tempo stesso crescere indefinitamente quelle componenti unitarie per modo che le componenti

$$P_x dS, \quad P_y dS, \quad P_z dS$$

della forza esterna ad esso effettivamente applicata tendano verso certi limiti finiti che noi denoteremo brevemente con

$$X, \quad Y, \quad Z$$

Sono ovvie le varianti che dovrebbero essere apportate al ragionamento che precede qualora il punto fosse interno al corpo.

In ogni caso la (20) assume la forma

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \Sigma (Xu + Yv + Zw)$$

che si può scrivere

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \Sigma P p \tag{21}$$

se con

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

si denota la grandezza della forza generica, e con

$$p = u \frac{X}{P} + v \frac{Y}{P} + w \frac{Z}{P}$$

si indica la proiezione, sulla linea d'azione della forza stessa, dello spostamento subito durante la deformazione dal suo punto di applicazione.