

IV.

Flessione semplice

(SECONDO CASO PARTICOLARE).

Indichiamo ancora con c una nuova costante piccolissima e poniamo

$$u = -c \frac{xy}{m}$$

$$v = -\frac{c}{2} \left(z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m} \right)$$

$$w = cyz$$

È facile constatare che tanto le (47) che le (53) risultano identicamente soddisfatte. Lo stesso accade per la (51).

Dalle (48) si ricava subito che le componenti speciali di tensione sono

$$\sigma_z = Ecy \quad \tau_{yz} = 0 \quad \tau_{zx} = 0$$

Esse sono indipendenti da z : gli stessi valori valgono dunque in particolare nei punti della base libera $z = l$, sulla quale perciò, secondo le (52), dovranno intendersi applicate delle forze esterne di componenti

$$P_x = 0 \quad P_y = 0 \quad P_z = Ecy$$

Di questo sistema di forze calcoliamoci le caratteristiche (55)

$$\mathcal{N} = Ec \int y dA$$

$$\mathcal{M} = Ec \int y^2 dA \quad \mathcal{M}' = Ec \int xy dA$$

$$Q = \mathcal{T} = \mathcal{T}' = 0$$

Ma

$$\int y dA = 0 \quad \int xy dA = 0$$

perchè x ed y sono le distanze dell'elemento generico dA della sezione dai suoi assi principali d'inerzia (baricentrici).

Il sistema di forze in questione è adunque staticamente equivalente ad una coppia di momento

$$\mathcal{M} = Ec \int y^2 dA$$

agente nel piano yz che prende perciò il nome di *piano di sollecitazione*.

Detto

$$J = \int y^2 dA$$

il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse principale baricentrico diretto secondo x , si può, ogniqua volta sia data ad arbitrio la grandezza di quel momento \mathcal{M} , dedurre il valore della costante c dalla eguaglianza

$$c = \frac{\mathcal{M}}{EJ}$$

Le componenti dello spostamento prodotto da esso momento in un punto generico del corpo dato vengono ad avere le espressioni

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\mathcal{M}}{EJ} \frac{xy}{m} \\ v &= -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{EJ} \left(z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m} \right) \\ w &= \frac{\mathcal{M}}{EJ} yz \end{aligned} \right\} (60)$$

**
**

Nella deformazione così definita, ogni punto' passa dalla sua posizione iniziale di coordinate x, y, z alla nuova posizione di coordinate

$$x' = x - \frac{\mathcal{M}}{EJ} \frac{xy}{m}$$

$$y' = y - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{EJ} \left(z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m} \right)$$

$$z' = z + \frac{\mathcal{M}}{EJ} yz$$

Osserviamo subito che per $z=0$ si ha $z'=0$; dunque la base incastrata si mantiene piana. Lo stesso succede per tutte le altre sezioni rette se le deformazioni sono, come abbiamo supposto, piccolissime.

Sostituiamo infatti nella espressione di z' ad y il suo valore quale si ricava dall'espressione di y' e trascuriamo tutti i termini in cui la costante piccolissima $\frac{\mathcal{M}}{EJ}$ entra alla seconda potenza. Troviamo

$$z' = z \left(1 + \frac{\mathcal{M}}{EJ} y' \right)$$

che per $z = \text{costante}$ è l'equazione di un piano inclinato sul piano xy di $\frac{\mathcal{M}}{EJ} z$.

Questo piano taglia il piano xy secondo una retta di equazione

$$y' = - \frac{EJ}{\mathcal{M}}$$

la quale non dipende dal particolare valore attribuito alla z , epperò è sempre la stessa qualunque sia la sezione retta che si è presa a considerare.

Si può pertanto concludere che nella deformazione a semplice flessione i piani delle sezioni rette, inizialmente paralleli fra loro ed alle due basi, si trasformano nei piani di un fascio che ha per asse una retta del piano $z=0$, parallela all'asse x ,

la cui distanza da questo è inversamente proporzionale al momento flettente \mathcal{M} , e direttamente al momento d'inerzia J della sezione ed al modulo di elasticità E del materiale.

In particolare, mentre il piano della base incastrata resta fisso, quello della base libera ruota di un angolo

$$a = \frac{\mathcal{M}l}{EJ} \quad (61)$$

Per altra parte, visto che, in assenza di tensioni tangenziali, debbono per le (38) esser nulli tutti gli scorrimenti, è ben certo che tutti gli elementi che inizialmente si incontravano ad angolo retto, debbono continuare ad incontrarsi ad angolo retto dopo la deformazione.

Ne segue che il sistema delle parallele all'asse z , traiettorie ortogonali ai piani paralleli alle basi nel cilindro non deformato, deve trasformarsi nel sistema delle traiettorie ortogonali ai piani del detto fascio, il che è quanto dire nel sistema dei cerchi che hanno i loro centri sulla retta asse del fascio e sono contenuti in piani ad essa retta normali.

Un particolare interesse si annette nelle applicazioni alla trasformata dell'asse geometrico del cilindro, la quale prende il nome generico di *linea elastica*.

Nel caso concreto di cui ci stiamo occupando la linea elastica è essa pure un arco di cerchio: esso giace nel piano di sollecitazione ed ha il raggio eguale ad

$$\frac{EJ}{\mathcal{M}}$$

Per definire completamente la forma del cilindro deformato basterà ormai determinare in qual modo si deforma una qualunque delle sue sezioni rette.

Ci riferiremo in quanto stiamo per dire alla base incastrata $z = 0$.

Tra le

$$x' = x - \frac{\mathcal{M}}{EJ} \frac{xy}{m}$$

$$y' = y + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{EJ} \frac{x^2 - y^2}{m}$$

eliminiamo la y , trascurando al solito i termini che vengono a contenere la costante piccolissima $\frac{\mathcal{N}}{EJ}$ ad un grado superiore al primo. Troviamo

$$x' = x \left(1 - \frac{\mathcal{N}}{EJ} \frac{y'}{m} \right)$$

che per $x = \text{costante}$ ci dà l'equazione di una retta che incontra l'asse delle y nel punto di ordinata

$$y' = m \frac{EJ}{\mathcal{N}}$$

Questo punto non dipende dal particolare valore attribuito ad x : tutte le rette inizialmente parallele all'asse y si mantengono dunque rette e si dispongono in fascio col centro nel punto testè definito.

Con un ragionamento simile a quello usato in condizioni analoghe poc'anzi, si dimostra inoltre che tutte le rette inizialmente perpendicolari alle prime, cioè parallele all'asse x , dovendo continuare ad incontrare ad angolo retto le nuove rette in cui le prime si son trasformate, devono mutarsi in altrettanti cerchi aventi quel medesimo punto per centro.

In particolare, mentre i punti dell'asse y restano su questo asse, i punti che inizialmente stavano sull'asse x si dispongono su di un cerchio il cui raggio

$$m \frac{EJ}{\mathcal{N}}$$

è eguale ad m volte quello della linea elastica.

* * *

Dopo ciò che abbiamo detto riesce facile farsi un'idea chiara della deformazione se si pensa al caso di un prisma a sezione rettangolare. Esso deve infatti necessariamente assumere una forma del tipo di quella prospetticamente rappresentata nella fig. 11.

Mentre due qualunque sezioni rette $ABCD$ e $A'B'C'D'$ si mantengono piane, le due faccie $AA'D'D$ e $BB'C'C$ inizialmente parallele al piano di sollecitazione yz assumono la forma di due superfici coniche aventi per asse la retta HK di intersezione dei piani di quelle sezioni.

Le altre due faccie $AA'B'B$ e $CC'D'D$ inizialmente parallele al piano zx si dispongono invece secondo certe porzioni di tori circolari aventi la stessa retta HK per asse.

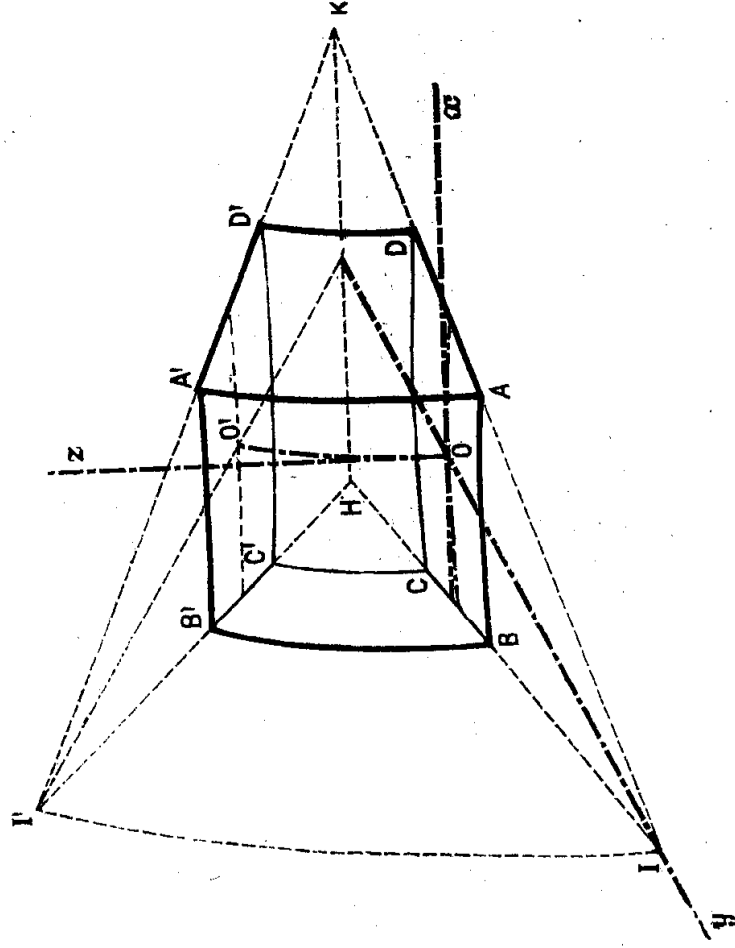


Fig. 11.

Una simile deformazione si può osservare assai facilmente sollecitando a flessione un prisma di caoutchouc o di gomma elastica. S'intende che l'esperienza non ha alcun carattere dimostrativo poichè la teoria non si applica neppure approssimativamente alle grandi deformazioni che si osservano in tal caso.

Perchè l'esperienza conduca a qualche risultato concreto essa deve al solito essere eseguita su di un materiale dotato di un modulo sufficientemente elevato, impiegando sollecitazioni di intensità convenientemente limitate, sicchè le deformazioni riescano piccolissime.

Ciò non impedisce che esse possano essere, con mezzi acconci, non solo osservate ma anche misurate.

Così ad esempio si può giungere ad una determinazione sperimentale del modulo E , che sotto certi punti di vista può anche essere preferibile a quella indicata nel precedente capitolo, disponendo, solidali alle due sezioni estreme a distanza l che limitano il tratto utile di un prisma sollecitato a flessione, due specchietti affacciati e deducendo lo spostamento angolare relativo α di quelle sezioni dalla rotazione che subisce un raggio luminoso il quale, partendo da una sorgente fissa, si rifletta successivamente su entrambi gli specchi.

Si ha infatti dalla (61):

$$E = \frac{\mathcal{N}l}{Ja}$$

Un'altra esperienza che ha tutto il valore di un vero e proprio controllo della teoria, e che ha insieme il merito non indifferente di fornire una misura diretta del rapporto di contrazione laterale, si può fare applicando il noto metodo di Fizeau alla determinazione della forma assunta dopo la deformazione dalle faccie laterali del prisma che inizialmente erano parallele al piano coordinato zx .

Se infatti contro una di queste faccie, opportunamente preparata e resa rigorosamente piana e speculare, si appoggia una lastra di cristallo, essa pure perfettamente piana, si ottengono per riflessione sulle due superfici vicinissime, delle flangie di interferenza disposte secondo le linee di equidistanza dell'una rispetto all'altra, vale a dire secondo le intersezioni della faccia deformata del prisma coi piani paralleli alla lastra.

Riferiamoci per fissar le idee alla faccia $AA'B'B$ della fig. 11: la lastra toccherà il prisma in due punti degli spigoli AA' e BB' situati ad eguali distanze dal piano xy , che indicheremo con A_1 e B_1 ; essa riuscirà quindi certamente parallela all'asse HK .

Le linee di livello della faccia deformata del prisma rispetto alla lastra si proietteranno su questa in un fascio di quartiche: una di esse, proveniente dalla intersezione della superficie del toro con quello dei piani seganti che le è tangente, presenta un nodo con due flessi nel punto di mezzo M dal segmento A_1B_1 (fig. 12); le altre saranno invece prive di punto doppio ed avranno uno o due rami distinti a seconda che provengono dalla intersezione di piani situati da una ovvero dall'altra banda di quel piano tangente.

Siccome però è praticamente osservabile soltanto una limitatissima regione del campo nei dintorni di M , così un tal fascio di quartiche non differisce sensibilmente dal fascio delle iperboli che hanno per assintoti le due tangenti di flesso della quartica dotata di punto doppio.

Tali iperboli non son altro invero che le proiezioni delle linee di livello di una quadrica osculatrice al toro nel punto che si proietta in M , quale sarebbe ad esempio l'iperboloide rigato che si genera facendo ruotare attorno ad HK l'iperbole che ha in HK stesso uno degli assi e che è ulteriormente individuata dalla condizione di osculare in quel medesimo punto M il cerchio sezione del toro col piano HKM .

Indichiamo con r_1 e con r_2 i due raggi principali di curvatura della superficie data epperò anche dell'iperboloide osculatore. E riferiamo il fascio di iperboli in discorso ai due assi x e z (proiezioni degli assi coordinati che si sono contrassegnati colle medesime lettere), denotando con z_0 la distanza OM .

Si avrà allora per ciascuna di quelle iperboli

$$\frac{x^2}{r_1} - \frac{(z - z_0)^2}{r_2} = \text{costante}$$

L'inclinazione dei loro assintoti sull'asse z sarà per conseguenza misurata dalla radice quadrata del rapporto di quei due raggi.

E poichè nell'ipotesi da noi ammessa che le dimensioni trasversali del prisma siano trascurabili a fronte di quei raggi,

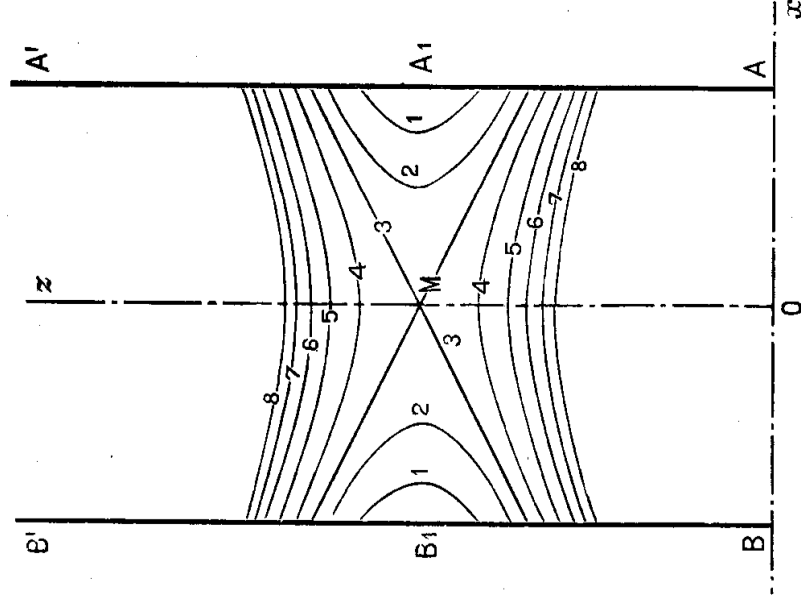
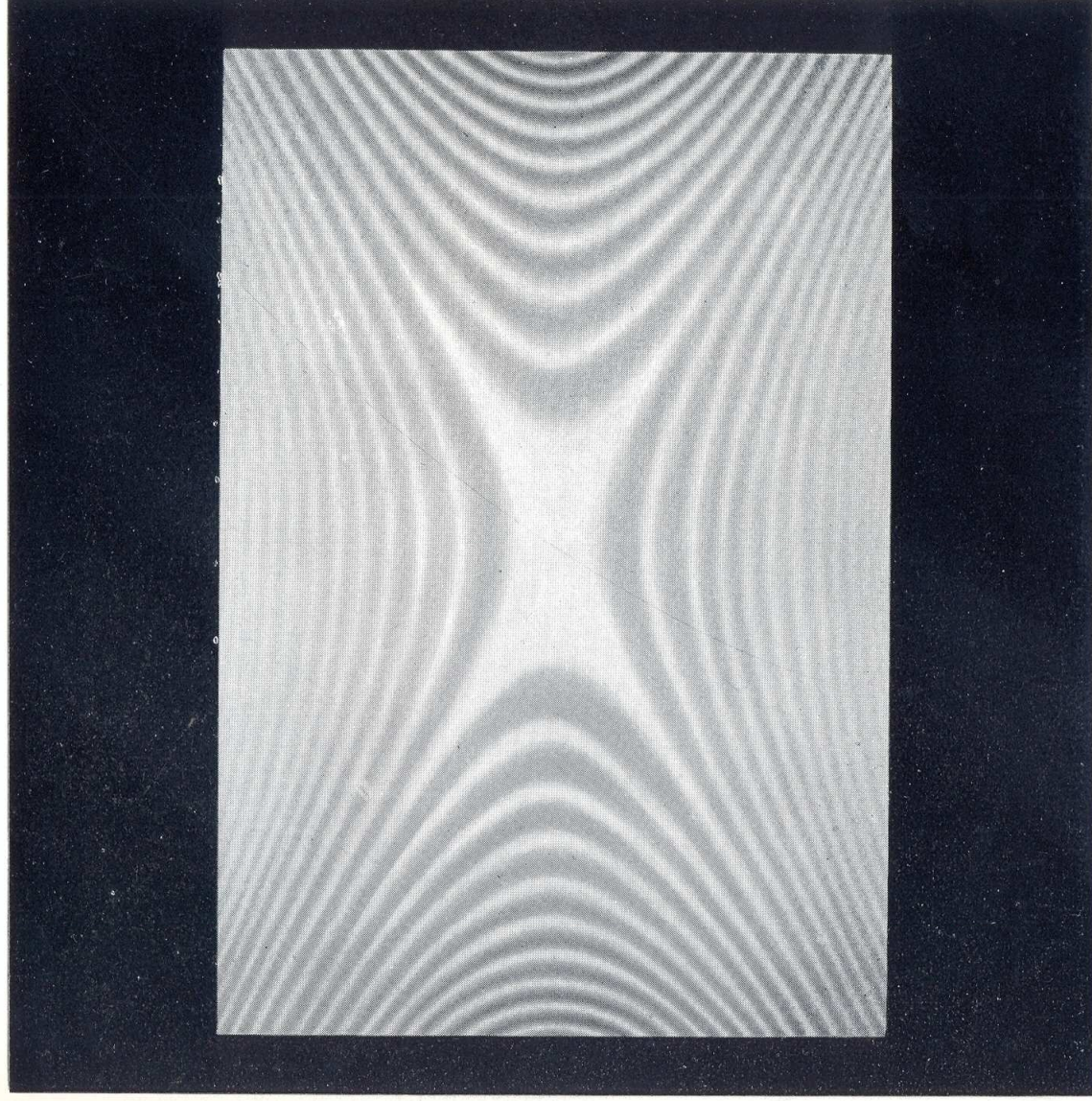


Fig. 12.



questi si possono ritenere eguali ad

$$\frac{EJ}{\mathcal{K}} \quad \text{e ad} \quad m \frac{EJ}{\mathcal{K}}$$

quell'inclinazione ci darà senz'altro la misura di \sqrt{m} .

Se m fosse esattamente eguale a 4 l'angolo fatto da quegli assintoti colla direzione dell'asse z dovrebbe essere di circa $63^{\circ}26'$: e da questo valore in realtà differisce assai poco l'angolo in questione nella tavola VI che rappresenta l'aspetto delle flangie d'interferenza ottenute operando nel modo sopra descritto su di un prisma di vetro.

* * *

Venendo finalmente all'analisi dello stato di tensione premettiamo che per ciascuna sezione retta la sollecitazione si riduce ad un semplice *momento flettente* di intensità costante:

$$\mathcal{M}_z = \mathcal{M}$$

Limitandoci dunque allo studio della ripartizione delle tensioni interne su una sezione generica, osserveremo subito che l'unica componente speciale di tensione che non sia identicamente nulla

$$\sigma_z = \frac{\mathcal{M}y}{J} \quad (62)$$

si annulla per $y = 0$ cioè in tutti i punti dell'asse principale centrale d'inerzia parallelo ad x : quell'asse prende perciò il nome di *asse neutro*, mentre l'altro asse principale d'inerzia, traccia del piano di sollecitazione, prende il nome di *asse di sollecitazione*. L'asse neutro divide la sezione in due regioni in una delle quali gli sforzi sono tutti di tensione, nell'altra sono tutti di compressione.

L'intensità di questi sforzi varia da punto a punto proporzionalmente alla distanza dall'asse neutro, e diviene massima nei punti più distanti da esso, vale a dire nei punti di contatto delle tangenti al contorno parallele all'asse neutro.

A parità di altre condizioni, cioè per un punto dato, l'intensità della tensione interna riesce poi direttamente proporzionale al momento flettente \mathcal{M} ed inversamente al momento d'inerzia J della sezione, preso rispetto al suo asse neutro.

* * *

Ecco, per finire, i valori della dilatazione cubica e dell'energia elastica.

Si ha, applicando la (49):

$$\Theta = \frac{m-2}{m} \frac{\mathcal{M}y}{EJ}$$

dunque anche la dilatazione cubica, come già la tensione interna, riesce in ogni punto proporzionale alla sua distanza dall'asse neutro.

Invece l'energia elastica elementare si presenta proporzionale al quadrato di quella distanza: la (50) diviene infatti

$$\varphi = \frac{\mathcal{M}^2 y^2}{2EJ^2}$$

Di qui si ricava

$$\Phi = \int_V \varphi dV = \frac{\mathcal{M}^2 l}{2EJ^2} \int_A y^2 dA = \frac{\mathcal{M}^2 l}{2EJ}$$

Questo valore avrebbe d'altronde potuto ottenersi direttamente come semiprodotto del momento flettente \mathcal{M} per la rotazione α subita, secondo la (61), dalla base libera $z = l$ a cui quel momento è stato applicato.