

---

### III.

#### Sistemi iperstatici.

Quando il sistema elastico — trave, od arco, o complesso di travi e di archi — che si vuol studiare, è staticamente indeterminato per sovrabbondanza di vincoli, la linea d'influenza di una reazione incognita si può bensì ancora ottenere immaginando praticato un taglio in corrispondenza della superficie di contatto tra il sistema vincolato ed il corpo, od i corpi, che creano il vincolo, ed impressa alle due faccie del taglio la solita traslazione relativa di grandezza unitaria nella direzione secondo cui agisce la reazione.

Ma questa volta il taglio, pur liberando il sistema dal vincolo di cui si cerca la reazione, non rende possibile alcun moto rigido: poichè infatti le condizioni di vincolo erano inizialmente in numero sovrabbondante, convien ritenere che, anche dopo soppressane una, le rimanenti continueranno ad essere sufficienti a determinare la posizione del sistema.

Il voluto spostamento relativo delle due faccie del taglio può bensì immaginarsi ancora realizzato colla manovra di quel certo dispositivo meccanico di cui abbiamo parlato, a proposito dei sistemi staticamente determinati, nel precedente capitolo [cfr. pag. 390]; ma, mentre allora tale manovra, effettuandosi sopra un sistema libero di muoversi, si limitava a determinare i movimenti delle varie sue parti compatibilmente coi vincoli mantenuti in funzione, senza incontrar resistenza alcuna, e quindi senza dar origine a sforzi di sorta, qui la manovra, effettuandosi sopra un sistema cui non è più consentito alcun movimento rigido, deve necessariamente essere accompagnata dallo sviluppo di forze capaci di determinare il voluto spostamento delle due faccie del taglio attraverso una vera e propria distorsione del sistema elastico dato.

*Le linee d'influenza delle reazioni dei vincoli non saranno quindi più delle spezzate immediatamente costruibili in base a semplici considerazioni di cinematica elementare; saranno delle vere e proprie linee elastiche da tracciarsi coi metodi, a suo tempo studiati, della teoria dell'elasticità, previa la determinazione di tutte le forze agenti sul sistema.*

Ora, in ordine a questa determinazione di forze, due casi ben distinti possono presentarsi a seconda che il sistema dato era inizialmente dotato di un solo o di più vincoli sovrabbondanti.

Nel primo caso, infatti, soppresso mediante il taglio un vincolo, il sistema resta staticamente determinato, e gli sforzi che si producono nelle varie sue parti, ed in particolare le reazioni dei vincoli conservati, possono essere calcolate in funzione delle forze applicate alle due faccie del taglio coll'aiuto delle sole e solite leggi della statica dei sistemi rigidi.

Nel secondo caso, invece, il sistema tagliato conterrà ancora dei vincoli sovrabbondanti, epperò l'identificazione così degli sforzi interni come delle reazioni di vincolo che nascono allorché si agisce sulle due faccie del taglio per determinare il voluto loro spostamento relativo, presuppone la preliminare risoluzione di un problema iperstatico.

\* \* \*

In entrambi i casi, poi — siano cioè le reazioni di vincolo che accompagnano la distorsione staticamente determinate od iperstatiche — il solo fatto che esse esistano, cioè abbiano valori generalmente diversi da zero, porta con sé una conseguenza di capitale importanza che va subito segnalata e costantemente tenuta presente.

Ed è questa: che non solo la trave ma anche i corpi che le servono da vincolo possono deformarsi, e che da queste eventuali loro deformazioni dipende non di rado la forma, in ogni caso la posizione, delle linee d'influenza delle reazioni.

Donde la conseguenza che, mentre nei sistemi staticamente determinati le linee d'influenza delle reazioni erano evidentemente indipendenti dalle deformazioni, elastiche o non elastiche, che i vincoli potevano presentare nell'atto di sviluppare delle reazioni, nei sistemi iperstatici la deformabilità dei vincoli influisce sull'andamento delle linee d'influenza e quindi sui valori delle reazioni.

\*\*\*

### Sistemi dotati di un solo vincolo sovrabbondante.

Incominceremo collo studiare un caso molto semplice: quello di una *trave continua a due campate*.

Consideriamo una trave, e supponiamo, tanto per fissar le idee, che essa, oltre ai soliti vincoli strettamente indispensabili — uno doppio (cerniera) in  $A$  ed uno semplice (appoggio) in  $B$  — sia dotata di un appoggio semplice in un altro suo punto qualunque  $C$  (fig. 113).

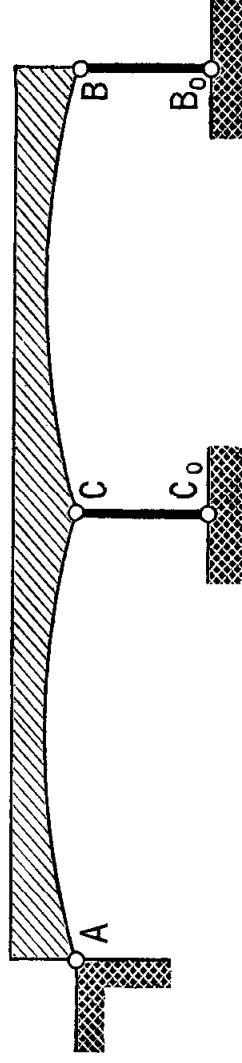


Fig. 113.

È ben evidente che delle quattro condizioni di vincolo una è sovrabbondante; che cioè si può immaginar soppresso l'appoggio in  $C$  e che la trave viene così ad essere staticamente determinata nelle identiche condizioni di quella rappresentata in figura 83.

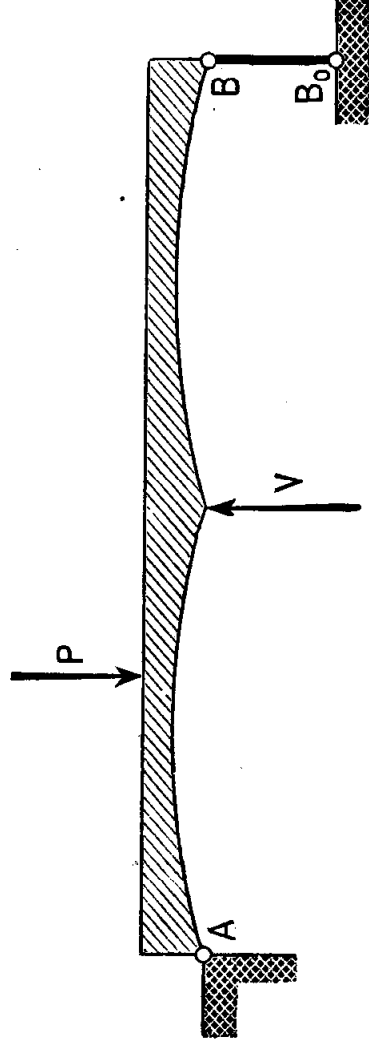


Fig. 114.

La reazione  $V$  (fig. 114) del vincolo sovrabbondante è staticamente indeterminata: qualunque valore si immagini infatti di attribuire ad essa, esiste sempre uno ed un solo sistema di rea-

zioni dei vincoli rimanenti che soddisfa alle equazioni dell'equilibrio.

Viceversa essa è perfettamente determinata dal punto di vista della teoria dell'elasticità, nel senso che tra tutti i possibili valori della reazione  $V$  ve n'è uno, ed un solo, per il quale la deformazione elastica della trave riesce compatibile col vincolo che dà origine a quella reazione.

Avvertiamo, prima di passar oltre, che la scelta di quella tra le quattro condizioni di vincolo imposte alla trave, che è da considerarsi come iperstatica, è, in tesi generale, affatto arbitraria.

Invece di considerar come sovrabbondante l'appoggio semplice in  $C$  avremmo evidentemente ben potuto riguardar come tale quello in  $B$ ; oppure avremmo potuto scindere il vincolo doppio agente in  $A$  in due vincoli semplici, per esempio in due appoggi semplici agenti sullo stesso punto  $A$  secondo due direzioni generiche, e considerare come sovrabbondante uno di questi.

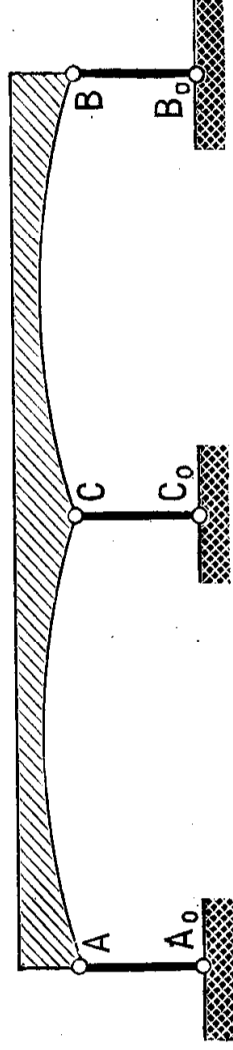


Fig. 115.

Occorre però badar bene che le tre condizioni di vincolo rimanenti siano atte a definire completamente la posizione della trave nel piano; tutto il nostro ragionamento cadrebbe infatti in difetto qualora, soppresso il vincolo considerato come sovrabbondante, si venisse a cadere in uno di quei casi singolari che abbiamo segnalati ed ampiamente discussi nel precedente capitolo.

Così, per esempio, stando le cose come è indicato nelle nostre figure, non sarebbe lecito operare la decomposizione del vincolo doppio agente in  $A$  in un appoggio semplice verticale ed in uno orizzontale, per considerare poi quest'ultimo come sovrabbondante, perchè in tal caso i tre appoggi semplici che si verrebbero a mantenere (fig. 115) operando tutti e tre in direzione verticale, non varrebbero ad impedire una traslazione elementare della trave in direzione orizzontale.

\*\*

A norma del secondo principio di reciprocità si ottiene la linea d'influenza della reazione incognita  $V$  per forze applicate all'asse geometrico della trave in una data direzione arbitraria, per esempio verticale, costruendo il diagramma degli spostamenti verticali dei vari punti dell'asse stesso — 0, per dirla più brevemente, la deformata verticale dell'asse — nella ipotesi che, praticato il solito taglio in corrispondenza del vincolo sovrabondante, sulle due faccie di esso si siano applicate due forze eguali e contrarie, tali da determinare il voluto spostamento relativo di grandezza unitaria nella direzione di azione del vincolo (fig. 116).

Incominciamo col supporre che il vincolo sia perfettamente rigido: che cioè il corpo od i corpi cui è affidato il compito di realizzarlo siano capaci di sopportare le azioni su di essi esercitate senza deformarsi.

Allora la faccia del taglio ad essi corpi appartenente non può in modo alcuno spostarsi; perciò lo spostamento relativo delle due faccie del taglio coincide, in questo caso, con lo spostamento assoluto dell'altra faccia, di quella cioè che è connessa alla trave. Bisogna quindi che la trave si infletta in misura tale da far subire alla faccia del taglio ad essa connessa il voluto spostamento unitario.

In generale non si potrà disegnare di primo acchito una deformata soddisfacente ad una tale condizione, perchè della forza deformatrice noi conosciamo la sola linea d'azione, non la grandezza.

Ma nulla ci vieta di assumere questa grandezza ad arbitrio, di disegnare in conseguenza la deformata  $A' C' B'$ , e di leggere poi le sue ordinate generiche  $\eta$ , assumendo per unità di misura lo spostamento della faccia del taglio su cui agisce la forza deformatrice, nella direzione stessa di questa forza; nel caso particolare della figura: assumendo per unità di misura l'ordinata  $\delta$  della stessa deformata, letta sulla verticale per  $C$ .

Se invece il vincolo  $CC_0$  è elasticamente deformabile — 0, ciò che fa lo stesso, è elasticamente deformabile il corpo a cui esso è raccomandato — lo spostamento relativo delle due faccie del taglio non richiederà più che lo spostamento assoluto di

quella delle faccie che è connessa alla trave sia di grandezza unitaria: basterà che esso eguagli la differenza fra l'unità di

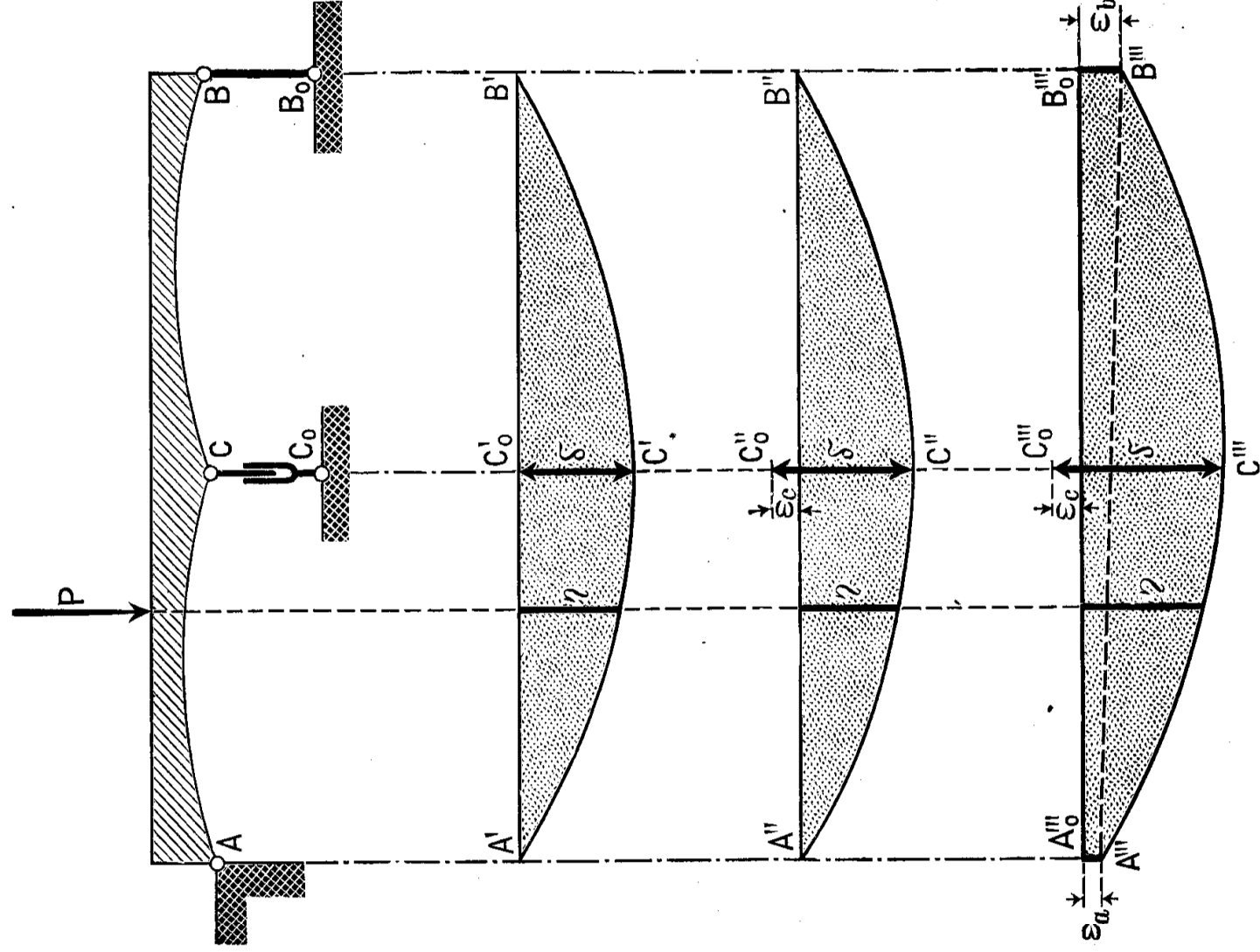


Fig. 116.

lunghezza ed il cedimento che, sotto l'azione della forza deformatrice, presenta il vincolo.



plici che le equivalgono (fig. 118), si può considerare l'appoggio orizzontale  $BB_1$  come sovrabbondante ed eliminarlo idealmente riducendo il sistema ad essere staticamente determinato (fig. 119) ed assumendo la corrispondente reazione  $V$  come incognita iperstatica.

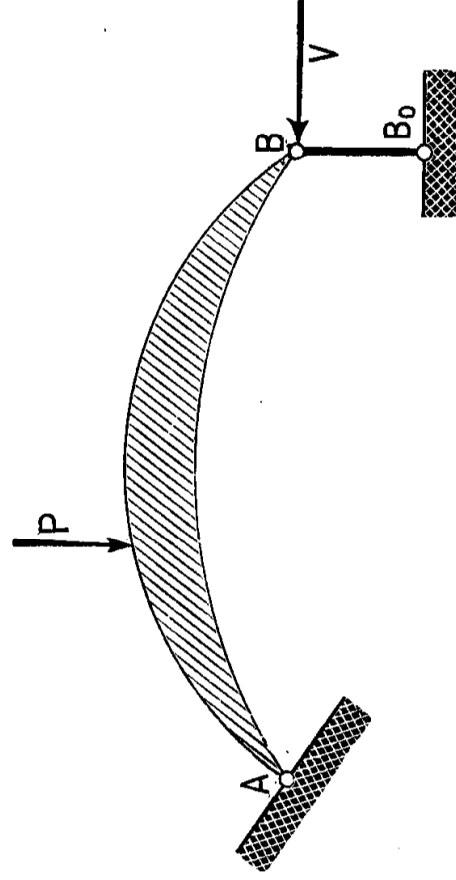


Fig. 119.

Anche qui poi vanno escluse quelle scelte del vincolo sovrabbondante che darebbero luogo a singolarità; come accadrebbe per esempio se si fosse considerato sovrabbondante l'appoggio verticale: in tal caso infatti (fig. 120) il sistema verrebbe a trovarsi nelle condizioni di quello raffigurato a suo tempo in figura 84.

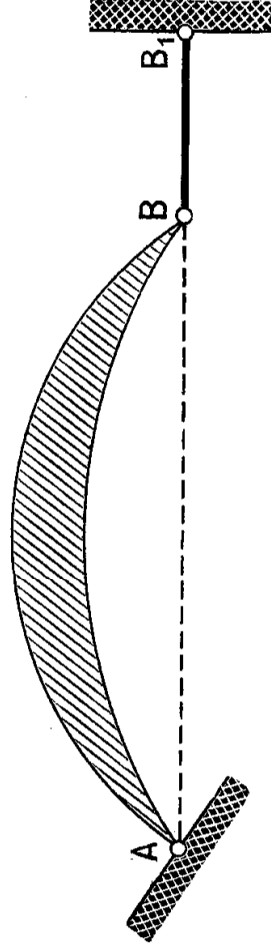


Fig. 120.

La linea d'influenza della reazione  $V$  si ottiene imprimendo il solito spostamento relativo unitario alle due faccie di un taglio praticato nell'asta  $BB_1$  (fig. 121). Per tracciarla si assumerà ad arbitrio lo sforzo che così si viene ad esercitare su  $B$ , si costruirà la deformata verticale dell'asse geometrico dell'arco, e si leggeranno poi le sue ordinate  $\eta$  assumendo per unità di misura  $\delta$  lo spostamento orizzontale di  $B$ , eventualmente accresciuto del contemporaneo cedimento del vincolo  $BB_1$ .



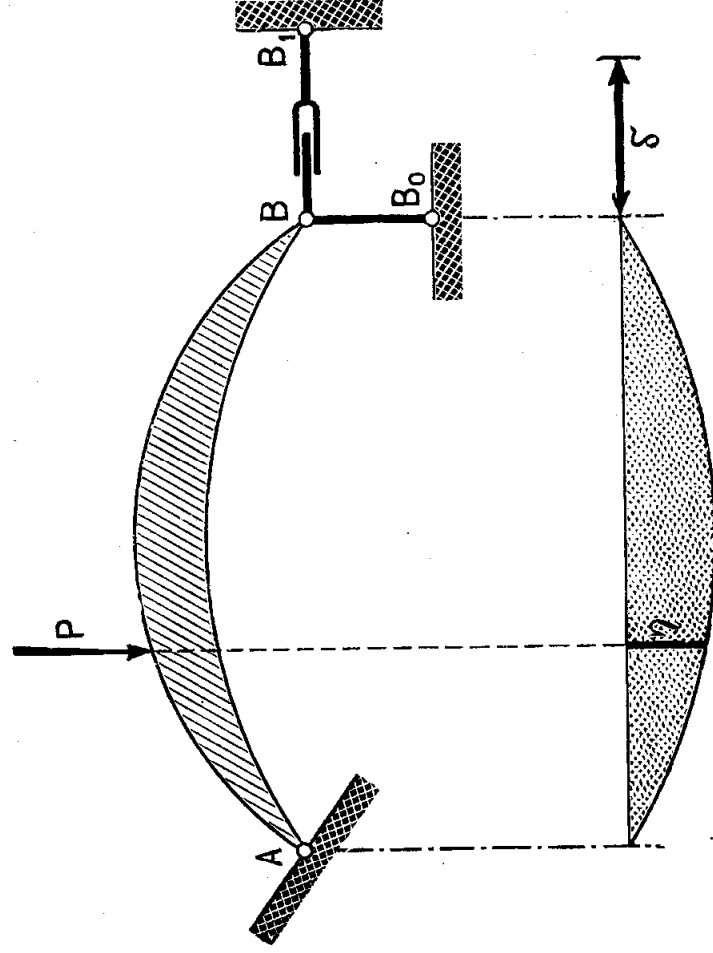


Fig. 121.

\* \* \*

## APPLICAZIONE — TAVOLA XXII.

*Studio statico di un arco metallico a due cerniere (Costruzione grafica delle linee d'influenza della spinta orizzontale).*

L'arco ha 60 metri di luce, e 15 di monta: è simmetrico rispetto alla sua verticale di mezzo.

La sezione è del solito tipo a **I**, composta di un'anima, quattro cantonali, ed una, ovvero due, ovvero tre coppie di piattabande.

Supposto diviso il semiarco in otto tronchi di uguale lunghezza (cm. 430 misurati sull'asse geometrico), il momento d'inerzia rispetto al solito asse orizzontale baricentrico della sezione generica, risulta eguale a

2.150.000<sup>cm<sup>4</sup></sup> per il primo ed il secondo tronco (a partire dalla cerniera d'imposta);

2.750.000<sup>cm<sup>4</sup></sup> per il terzo ed il quarto tronco;

3.800.000<sup>cm<sup>4</sup></sup> per i rimanenti quattro tronchi.

In conseguenza, assunto il modulo di elasticità

$$E = 2000 \text{ t/cm}^2$$

si trova

$$w_1 = w_2 = 0,000\,000\,100 \text{ t}^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

$$w_3 = w_4 = 0,000\,000\,078 \text{ t}^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

$$w_5 = w_6 = w_7 = w_8 = 0,000\,000\,056 \text{ t}^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

Poichè la tangente all'asse geometrico in chiave, per ogni sollecitazione simmetrica per rapporto all'asse di simmetria del sistema, deve mantenersi orizzontale, il semiarco sinistro (disegnato in scala 1:200 nella nostra Tavola) si comporta come se fosse incastrato in corrispondenza della sua sezione estrema superiore (mezzeria dell'arco); orbene noi lo immagineremo sollecitato, in corrispondenza della cerniera d'imposta da una forza orizzontale.

Le sue deformazioni si calcoleranno:

- 1) disponendo i pesi elastici come se fossero delle forze orizzontali applicate ai rispettivi baricentri;
- 2) collegandoli con un primo poligono funicolare che nel nostro disegno è stato costruito con distanza polare

$$\lambda = 0,000\,000\,5 \text{ t}^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

3) determinando sulla corda orizzontale dell'arco (linea d'azione della forza) i segmenti 0'1', 1'2', ..., 7'8' che nella base  $\lambda$  rappresentano i momenti statici dei pesi elastici rispetto a detta corda;

4) considerando tali momenti statici come delle nuove forze applicate ai rispettivi centri, vale a dire agli antipoli della solita corda rispetto alle ellissi di elasticità dei singoli tronchi;

5) disponendo tali nuove forze sia orizzontalmente che verticalmente e collegandole tanto nell'un caso come nell'altro con un nuovo poligono funicolare di distanza polare

$$\mu = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{P \cdot \lambda}$$

Nel nostro disegno si è supposto  $P = 1^t$  e  $\xi = 200$  e perciò si è assunto

$$\mu = 1000^{\text{cm}}$$

Con ciò i due poligoni funicolari — diagrammi degli spostamenti, rispettivamente orizzontali e verticali, dei singoli punti dell'asse geometrico dell'arco per la supposta azione di uno sforzo agente secondo la sua corda — vengono a rappresentare tali spostamenti in vera grandezza per una intensità dello sforzo pari ad una tonnellata.

A questo punto non sarebbe difficile dedurre quale dovrebbe essere in realtà l'intensità di questo sforzo perchè lo spostamento delle solite due faccie del taglio — che, nel caso concreto, se i vincoli sono rigidi, eguaglia esattamente la variazione di lunghezza della corda — risulti eguale all'unità di lunghezza.

Ma la cosa interessa poco, poichè le nuove deformate che così si potrebbero costruire sarebbero naturalmente affini a quelle che già possediamo; tanto vale dunque servirsi senz'altro di queste assumendo nella lettura delle loro ordinate, per unità di lunghezza, precisamente il segmento  $\delta$  che in disegno rappresenta la variazione di lunghezza della corda dell'arco.

Con questa avvertenza i due poligoni, ultimi costruiti, possono senz'altro venire interpretati come linee d'influenza della spinta orizzontale iperstatica dell'arco per un carico di una tonnellata agente sui vari punti dell'asse geometrico, rispettivamente in direzione orizzontale ed in direzione verticale.

\* \* \*

#### TAVOLA XXIII.

*Studio di un arco metallico a due cerniere (Tracciamento della linea d'influenza dell'abbassamento del vertice).*

Non spiacerà al lettore che noi prendiamo occasione dallo studio statico testè condotto a termine di un arco metallico a due cerniere, per aprire una breve parentesi nell'ordine logico della nostra esposizione: si tratta di far vedere come gli stessi procedimenti grafici che ci hanno servito per costruire la linea d'influenza di una reazione iperstatica, possano immediatamente

venire utilizzati quando si vuole procedere ad un'effettiva analisi di deformazioni elastiche.

Immaginiamo a questo fine che sul vertice dell'arco — riprodotto nelle sue condizioni iniziali di vincolo — venga applicato un carico concentrato, per esempio di 10 tonnellate.

Coll'aiuto della linea d'influenza precedentemente costruita, e più precisamente servendoci della sua ordinata in mezzzeria, abbiamo calcolata la spinta orizzontale (tonnellate 7,28). Poi, tenuto conto che per ragion di simmetria ciascuna delle due reazioni verticali deve risultar eguale alla metà del carico (cioè a 5 tonnellate), ne abbiamo dedotta non solo la grandezza (tonnellate 8,83) ma anche la linea d'azione della reazione della cerniera situata all'imposta sinistra.

Abbiamo poi ripetute, colle dovute ovvie varianti, le operazioni già eseguite nel calcolo precedente. E precisamente:

1) abbiamo disposti i soliti pesi elastici  $w$  come se fossero delle forze agenti sui rispettivi baricentri *parallelamente alla linea di azione della reazione*;

2) li abbiamo collegati con un primo poligono funicolare, assumendo questa volta per distanza polare

$$\lambda = 0,000\ 000\ 1\ \text{t}^{-1}\ \text{cm}^{-1}$$

3) abbiamo determinati, *sulla linea d'azione della reazione*, i segmenti  $0'1'$ ,  $1'2'$ , ...  $7'8'$  che rappresentano, nella base  $\lambda$ , i momenti statici (per rapporto ad essa linea) dei pesi elastici; 4) abbiamo considerati questi momenti statici come delle nuove forze applicate verticalmente *negli antipoli della linea d'azione della reazione per rapporto alle ellissi di elasticità dei singoli tronchi*.

5) abbiamo collegate queste nuove forze con un nuovo poligono funicolare la cui distanza polare

$$\mu = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{P \cdot \lambda}$$

per  $P = 8^t, 83$  e  $\xi = 200$ , è risultata

$$\mu = 567\ \text{cm}$$

Con ciò, il poligono funicolare — tracciato in modo che il suo lato in mezzzeria risulti orizzontale, come la simmetria ri-

TAVOLA XXII

(pag. 410).

Studio statico di un arco metallico a due cerniere (Costruzione grafica delle linee d'influenza della spinta orizzontale).

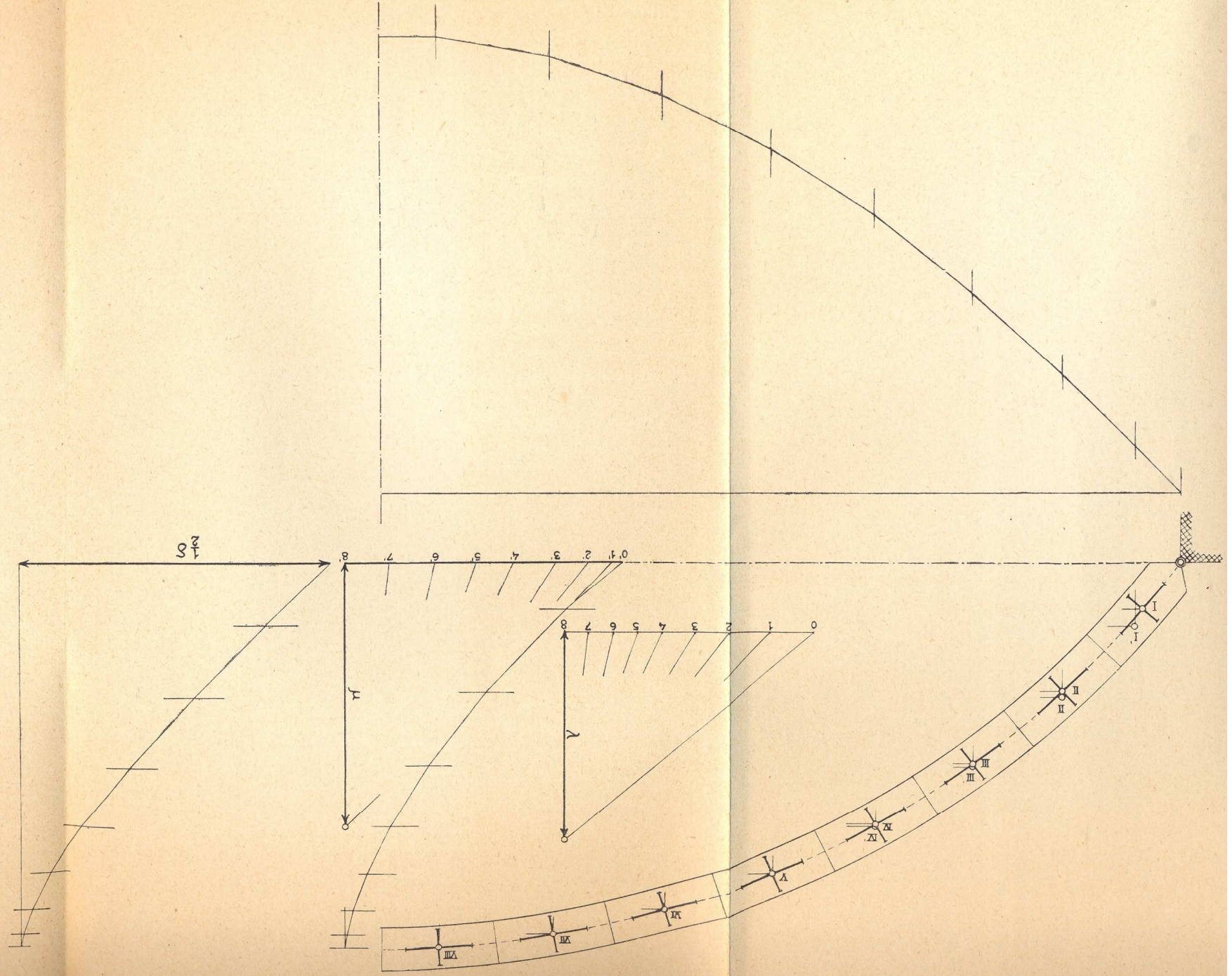
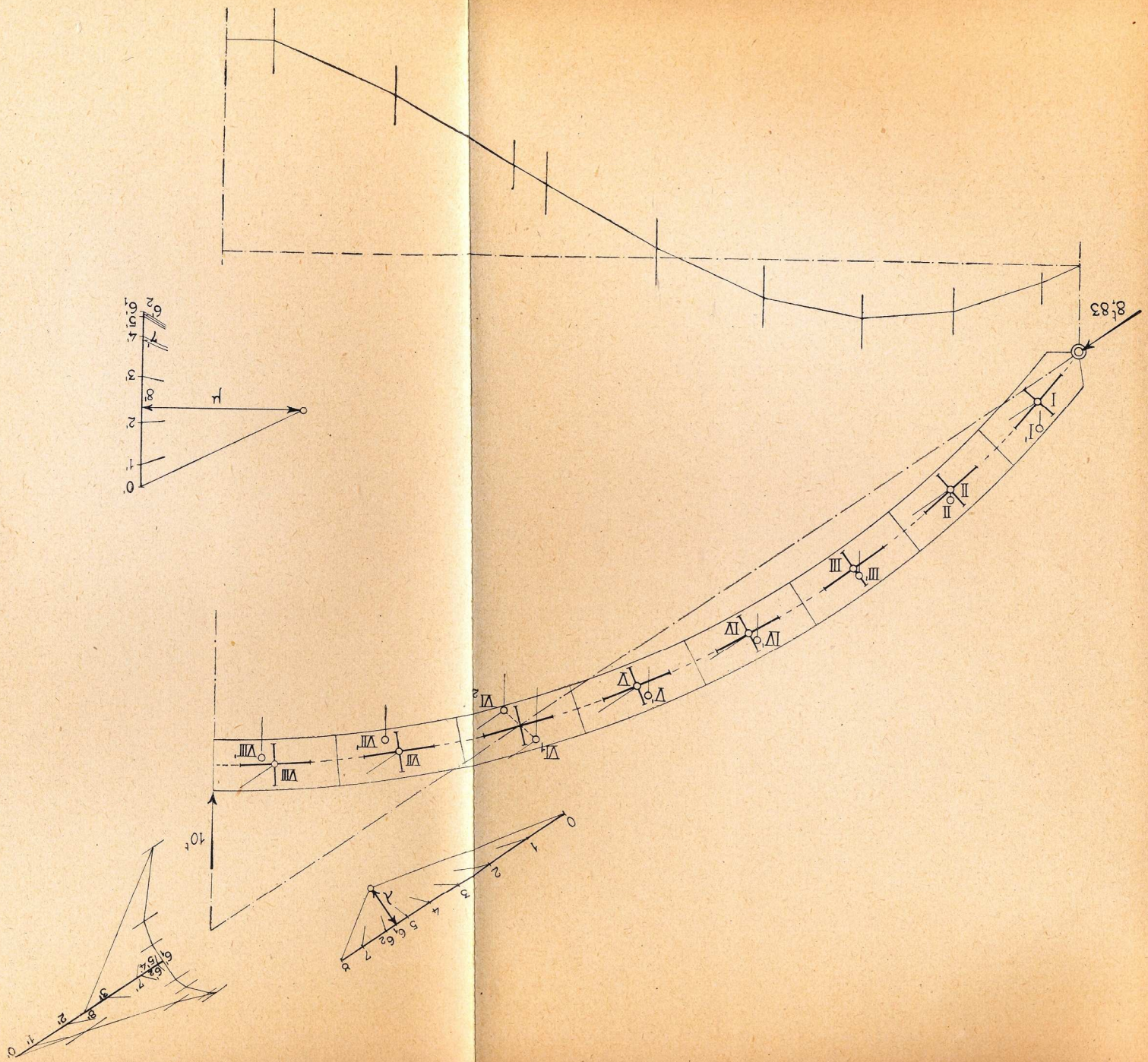


TAVOLA XXIII

(pag. 410).

Studio di un arco metallico a due cerniere (Tracciamento della  
linea di influenza dell'abbassamento del vertice).





chiede, e riferito alla sua corda, vale a dire alla orizzontale condotta per il punto in cui esso interseca la verticale passante per la cerniera d'imposta — rappresenta *in vera grandezza* gli spostamenti verticali dei singoli punti dell'asse geometrico dell'arco per la considerata condizione di carico (10 tonnellate in mezzeria).

In virtù del teorema di Betti esso rappresenterà quindi anche, *in vera grandezza*, gli spostamenti verticali del vertice dell'arco per un carico di 10 tonnellate il cui punto di applicazione si sposti lungo il suo asse geometrico.

Nella Tavola il lettore non mancherà di rilevare la variante adottata nelle operazioni grafiche per il peso elastico  $w_6$ . Essa fu occasionata dal fatto che la linea d'azione della reazione andava casualmente a passare vicinissima al baricentro elastico del sesto tronco. Ad evitare la considerazione di una forza momento statico che era prevedibile sarebbe risultata molto piccola e molto lontana (fors'anche esterna ai limiti del disegno), si è provvisto scindendo fin da principio il peso elastico  $w_6$  in due pesi elastici parziali, eguali a  $\frac{w_6}{2}$ , ed applicati ai due estremi del diametro dell'ellisse di elasticità del sesto tronco che ha la direzione coniugata a quella della linea d'azione della reazione. Negli stessi punti si possono allora intendere concentrati anche i corrispondenti momenti statici [cfr. la nota a pag. 288].

\* \* \*

### Sistemi dotati di più vincoli sovrabbondanti.

Incominceremo anche qui con un tipo di trave continua: quello a tre campate, rappresentato nella figura 122, ed il cui regime statico dipende naturalmente da due incognite iperstatiche. Assumeremo come tali le reazioni dei due appoggi semplici intermedi  $C$  e  $D$ .

La via per costruire la linea d'influenza di una di quelle due reazioni è naturalmente sempre la stessa: si tratta di immaginar praticato il solito taglio ideale in corrispondenza di uno dei vincoli sovrabbondanti, di mantener fermi al loro posto *tutti* gli altri vincoli, e di tracciare la deformata della trave nella solita

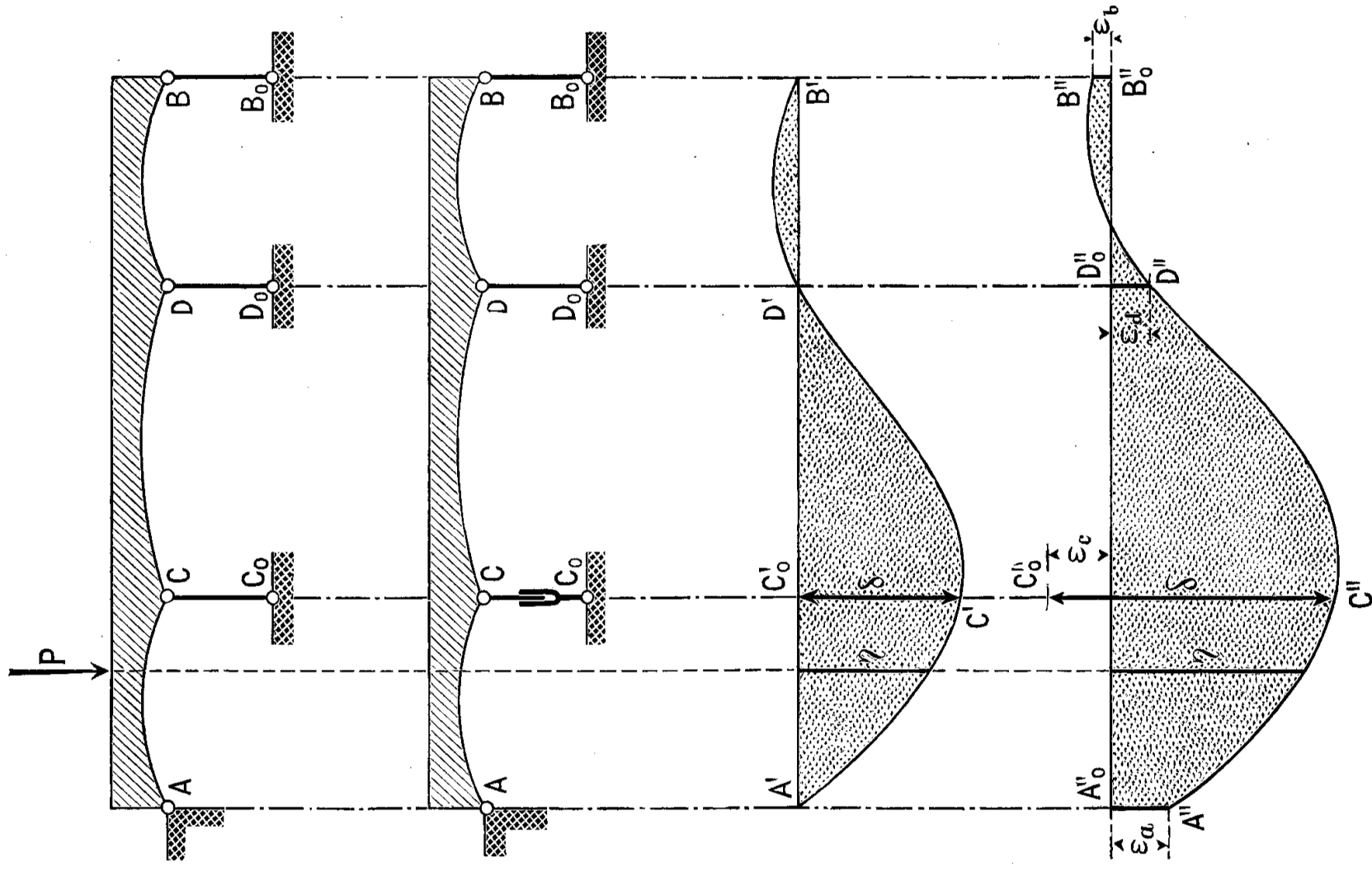


Fig. 122.

ipotesi che le due faccie del taglio siano costrette al solito spostamento relativo unitario nella direzione secondo cui il vincolo agisce.

Il diagramma avrà l'una o l'altra delle due forme indicate in figura a seconda che i vincoli si suppongono rigidi, ovvero che si tien conto della loro elasticità.

In sostanza, dunque, nulla di nuovo.

Il nuovo sta soltanto nel fatto che il sistema questa volta è iperstatico anche dopo praticato il taglio; e che quindi lo spostamento relativo delle due faccie di questo non soltanto implica l'esistenza, nella trave e nei vincoli, di uno stato di tensione, come accadeva già negli esempi precedenti; ma questo stato di tensione è alla sua volta staticamente indeterminato, richiede cioè per essere identificato — come occorre fare per poter procedere al tracciamento della deformata — che si risolva un problema iperstatico preliminare relativo al sistema tagliato.

Naturalmente questo problema iperstatico preliminare ha questo vantaggio su quello proposto, che contiene un'incognita di meno.

Così se la trave considerata possedeva, come nel caso di cui stiamo occupandoci, due vincoli sovrabbondanti, il sistema tagliato ne conterrà solo più uno (fig. 123).

E proceduto che si sia allo studio di questo vincolo coi metodi che già conosciamo, si potrà utilizzare la linea d'influenza della reazione iperstatica in esso mantenuta, per la determinazione del valore che la reazione stessa deve assumere allorquando alle faccie del taglio praticato in corrispondenza del primo vincolo si applica quella sollecitazione che è necessaria per produrre lo spostamento relativo.

Nella figura 123, per esempio, si è incominciato lo studio col tracciamento della linea d'influenza  $A'C'D'B'$  della reazione  $D$  nella trave che ha in  $D$  il suo solo vincolo sovrabbondante.

Detta poi  $F_C$  la forza, incognita, che conviene sviluppare in corrispondenza dell'appoggio  $C$  per produrre il voluto spostamento relativo unitario delle due faccie del taglio ivi praticato, quando tutti gli altri vincoli restano in posto, si è determinato il valore

$$- F_C \frac{\eta_{CD}}{\eta_{DD}}$$

della reazione sviluppata dall'appoggio  $D$ .

Restano così noti tutti gli elementi occorrenti per tracciamento di una deformata affine a quella che si cercava. Al solito essa potrà venire senz'altro utilizzata come linea d'influenza della reazione nel sistema dato purchè si assuma per leggerla la dovuta unità di misura.

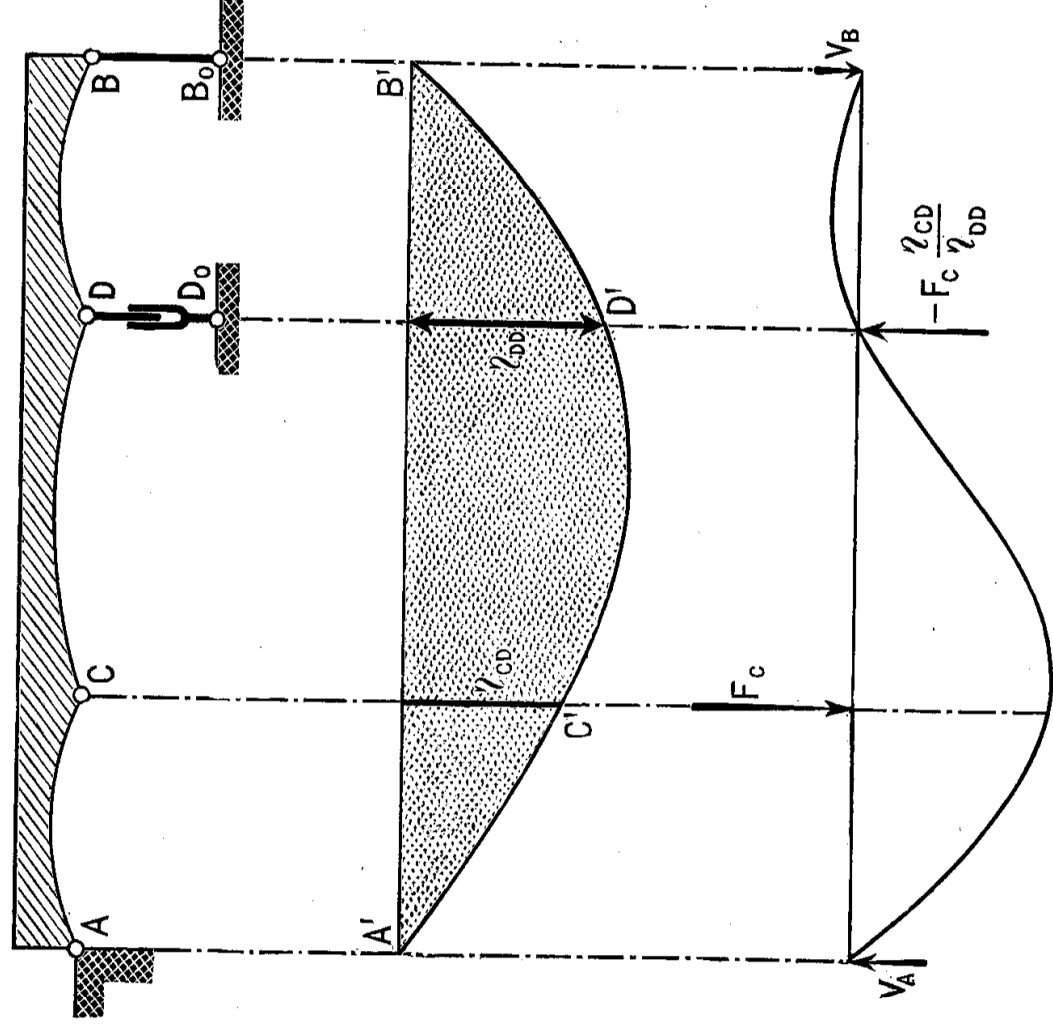


Fig. 123.

\*\*\*

Non è però questo il solo modo di procedere.

Si può infatti affrontare il problema dell'equilibrio elastico di un sistema a più vincoli sovrabbondanti in modo diretto, vale a dire senza passare per alcun sistema iperstatico intermedio; e mostrare come esso possa risolversi previa la cono-

scenza di un certo numero di deformate di un sistema staticamente determinato a cui il primo si può sempre ridurre praticando non uno ma tanti tagli quante sono le condizioni di vincolo sovrabbondanti.

Nel caso concreto che abbiamo preso in esame, immaginiamo momentaneamente soppressi tanto l'appoggio in  $C$  come quello in  $D$  (fig. 124) ed applicate in loro luogo, e secondo le loro linee d'azione, delle forze che indicheremo provvisoriamente in modo generico con  $F_C$  e con  $F_D$ .

Fatto in un primo tempo

$$F_C = 1 \quad \text{ed} \quad F_D = 0$$

si procede al tracciamento della deformata, la cui ordinata generica verrà qui indicata con  $\eta_C$ .

Poi si farà

$$F_C = 0 \quad \text{ed} \quad F_D = 1$$

e si traccierà una seconda deformata, la cui ordinata generica indicheremo con  $\eta_D$ .

Allora, per il principio della sovrapposizione degli stati di equilibrio, la deformata relativa a valori affatto arbitrari di  $F_C$  e di  $F_D$  si potrà sempre dedurre dalle due precedenti, in quanto la sua ordinata generica dovrà esser del tipo

$$\eta = F_C \eta_C + F_D \eta_D$$

Ora, tra tutte le deformate che così si possono ottenere, vi è certamente anche quella che noi poc'anzi avevamo determinata supponendo mantenuto in posto l'appoggio in  $D$ , praticato il taglio soltanto in  $C$ , ed impresso alle due faccie di questo taglio il solito spostamento relativo unitario.

Nè è difficile, al punto a cui siamo, identificare i particolari valori di  $F_C$  e di  $F_D$  che caratterizzano questa particolare deformata.

Se ci riferiamo, tanto per fissar le idee, al caso dei vincoli rigidi, basta imporre che l'ordinata  $\eta$  si annulli sulla verticale per  $D$ : basta cioè imporre che sia

$$F_C \eta_{DC} + F_D \eta_{DD} = 0$$

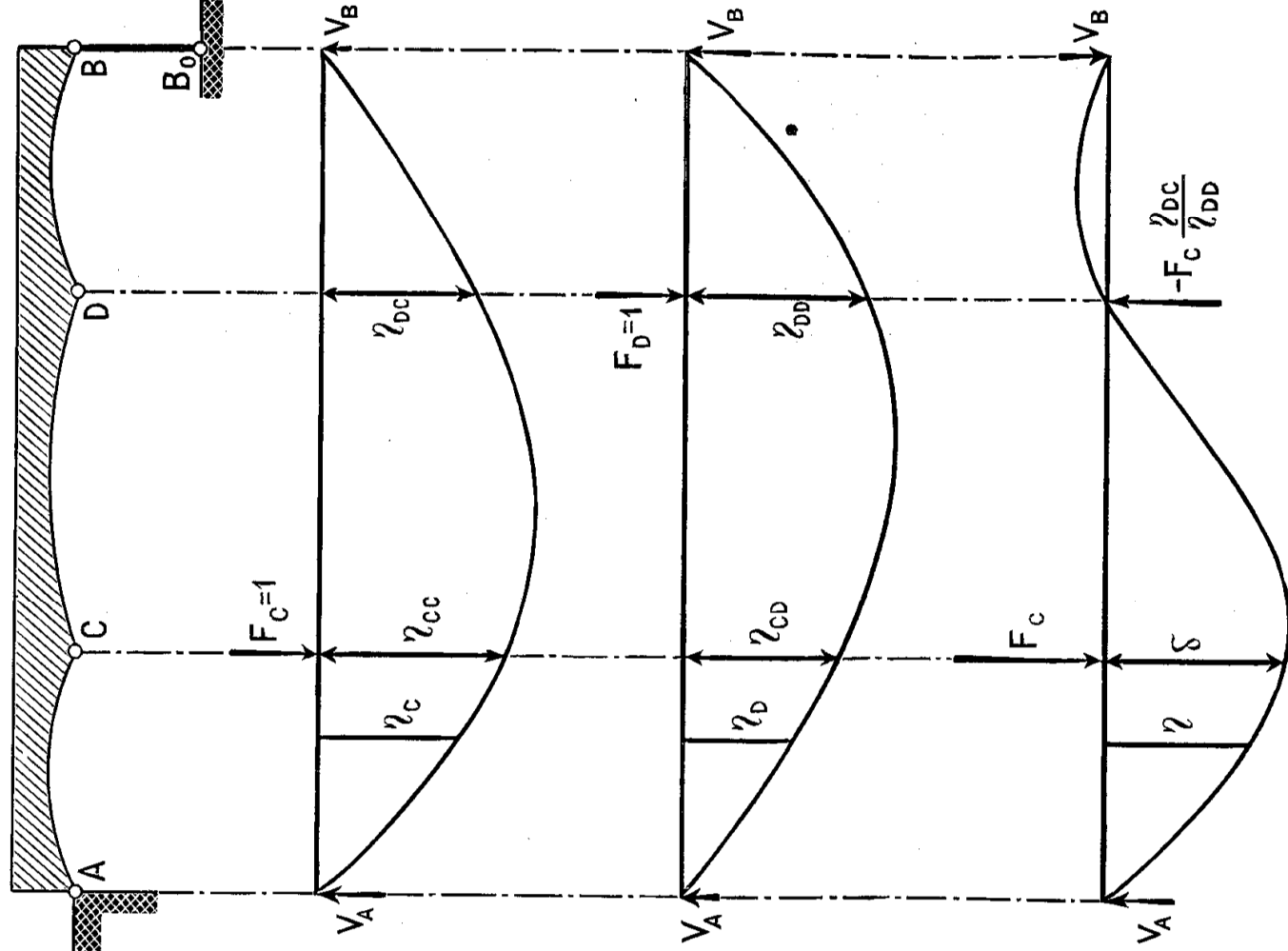


Fig. 124.

Se si aggiunge la condizione che lo spostamento verticale del punto  $C$  riesca eguale all'unità, per il che occorre e basta che sia

$$F_C r_{CC} + F_D r_{CD} = 1$$

le due grandezze  $F_C$  ed  $F_D$  restano completamente determinate. In generale non occorre neppure tanto.

Basta assumere  $F_C$  ad arbitrio, scegliere  $F_D$  in modo che sia soddisfatta la prima di quelle due condizioni, cioè scegliere

$$F_D = - F_C \frac{\eta_{DC}}{\eta_{DD}}$$

e la deformata che così si otterrà si potrà utilizzare come linea d'influenza della reazione incognita agente in  $C$  nella trave doppiamente iperstatica data, solo che la si legga assumendo l'ordinata  $\delta$  come unità di misura.

Chi volesse constatare materialmente l'identità del procedimento qui indicato con quello esposto precedentemente, non avrebbe che da tener presente che, in virtù del teorema di Betti,

$$\eta_{DC} = \eta_{CD}$$

\* \* \*

Ed ecco un esempio contenente tre incognite iperstatiche. Consideriamo una trave arcuata come quella raffigurata nella fig. 125: vincolata a cerniera ai due estremi  $A$  e  $B$  e semplicemente appoggiata in due punti intermedi  $C$  e  $D$ .

Vi sono evidentemente tre condizioni di vincolo sovrabbondanti: assumeremo come sovrabbondanti gli appoggi verticali intermedi ed uno dei due appoggi semplici in cui può immaginarsi decomposto il vincolo doppio applicato all'estremità destra: se si adotta la decomposizione in un appoggio verticale ed in uno orizzontale, sarà precisamente quest'ultimo che si dovrà assumere come sovrabbondante.

Ed è precisamente di questo che incominceremo coll'occuparci.

Incominceremo cioè col tracciare la linea d'influenza della sua reazione (spinta orizzontale) nell'ipotesi che vi sia questo solo vincolo sovrabbondante, applicando il procedimento indicato per l'arco a due cerniere.

Servendoci della linea d'influenza così costruita, calcoleremo la spinta

$$V_B = F_D \frac{\eta_{DB}}{\eta_{BB}}$$

dovuta ad una forza qualunque  $F_D$  agente secondo la verticale per  $D$ ; e ci serviremo di essa per determinare la linea d'influenza

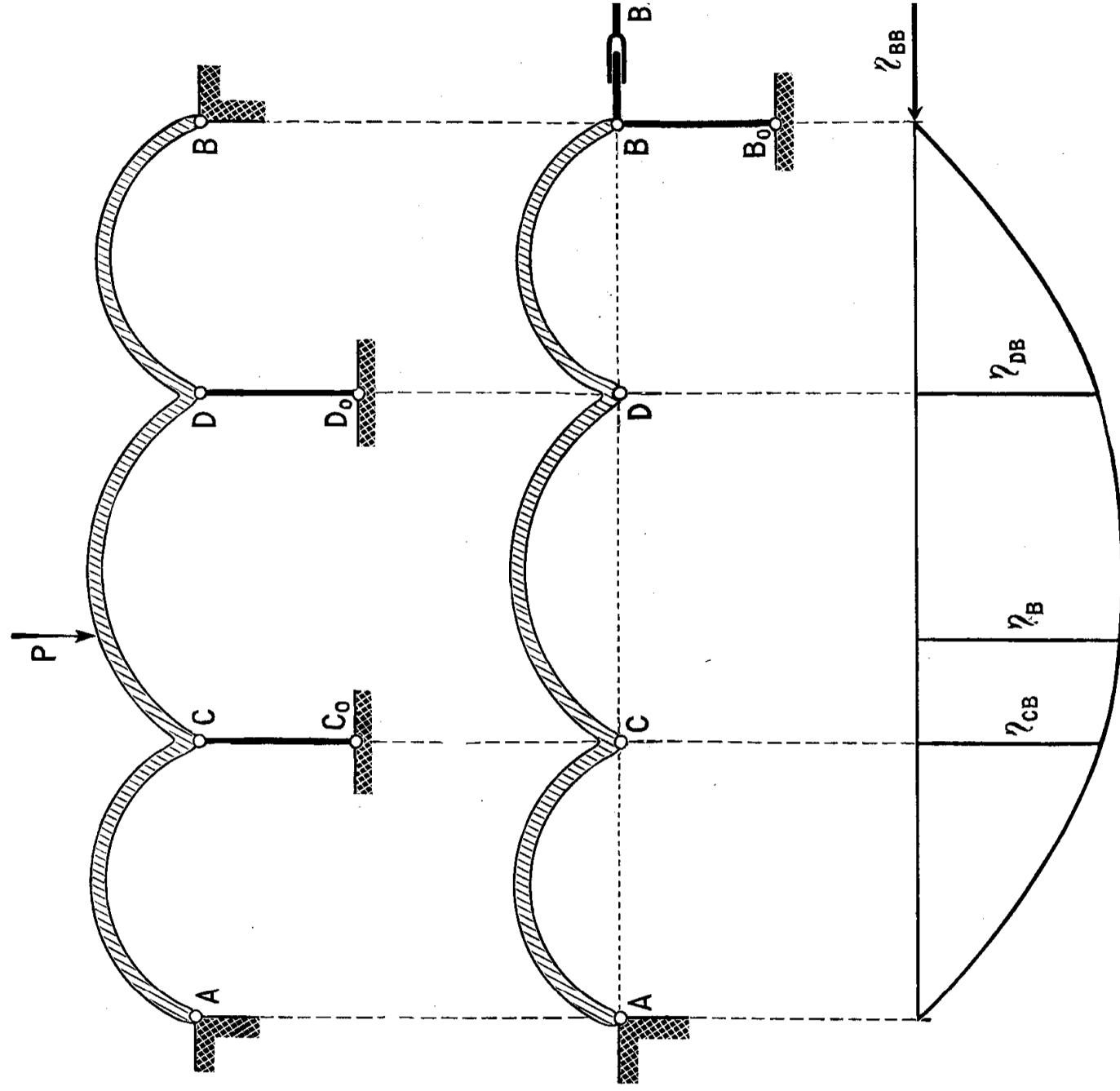


Fig. 125.

della reazione in  $D$  (fig. 126) dell'arco vincolato in  $D$  stesso oltrechè dalle due cerniere d'estremità.

Su questa nuova linea d'influenza si potrà leggere il valore



della reazione in  $D$  dovuta ad una forza  $F_C$  agente secondo la verticale dell'appoggio  $C$

$$V_D = - F_C \frac{\eta_{CD}}{\eta_{DD}}$$

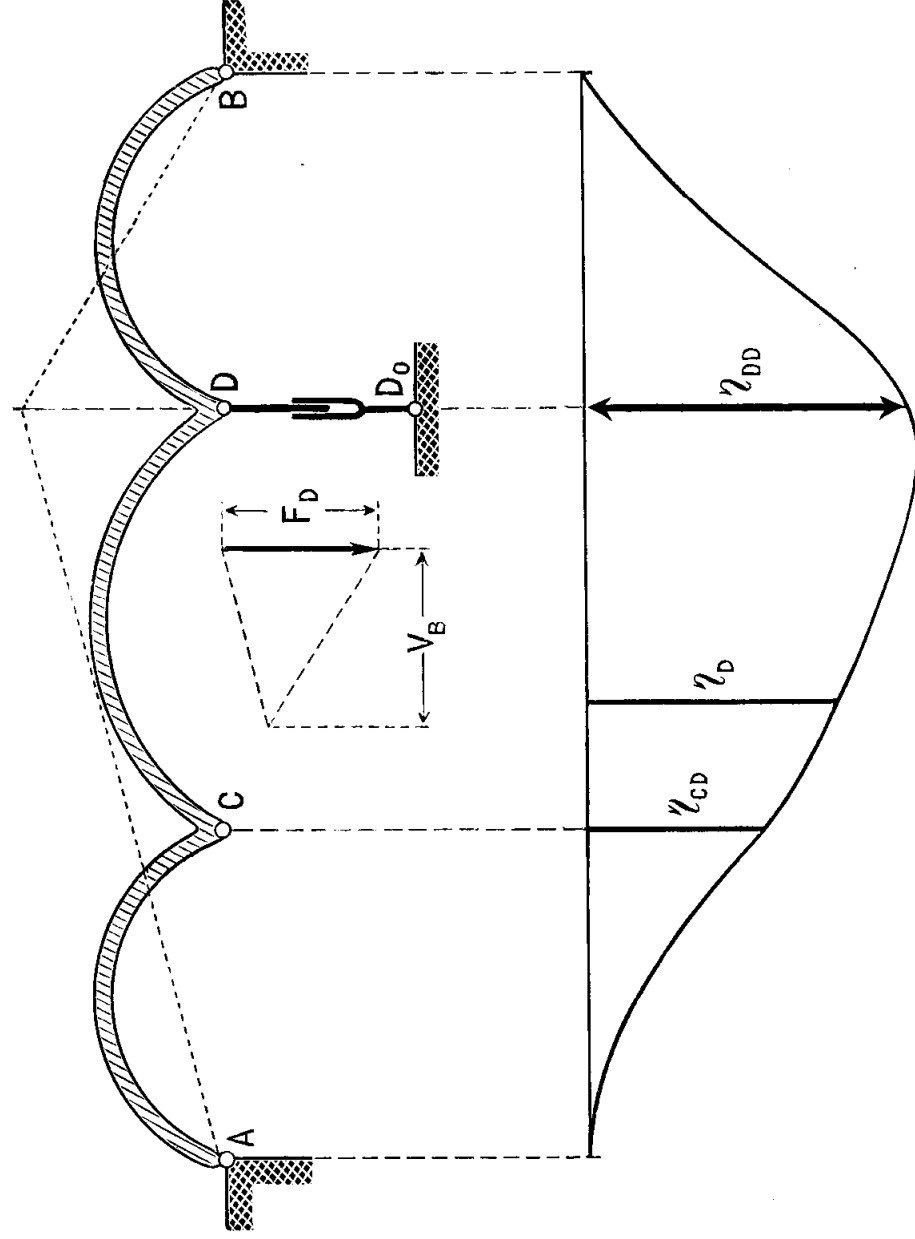


Fig. 126.

Quanto alla spinta, tenuto conto della coesistenza delle due forze  $F_C$  e  $V_D$ , sarà della forma

$$\begin{aligned} V_B &= F_C \frac{\eta_{CB}}{\eta_{BB}} + V_D \frac{\eta_{DB}}{\eta_{BB}} \\ &= F_C \left( \frac{\eta_{CB}}{\eta_{BB}} - \frac{\eta_{CD}}{\eta_{DD}} \frac{\eta_{DB}}{\eta_{BB}} \right) \end{aligned}$$

Si avranno così tutti gli elementi occorrenti per tracciare la linea di influenza della reazione  $C$  nel sistema dato, cioè munito di tutti e tre i vincoli sovrabbondanti (fig. 127).

Per una generica condizione di carico, rappresentata per esempio da una forza  $P$ , come è quella indicata in figura 125, si leggerà quindi direttamente sull'ultimo diagramma (fig. 127) il valore della reazione  $C$

$$V_c = P \frac{\eta_c}{\delta_c}$$

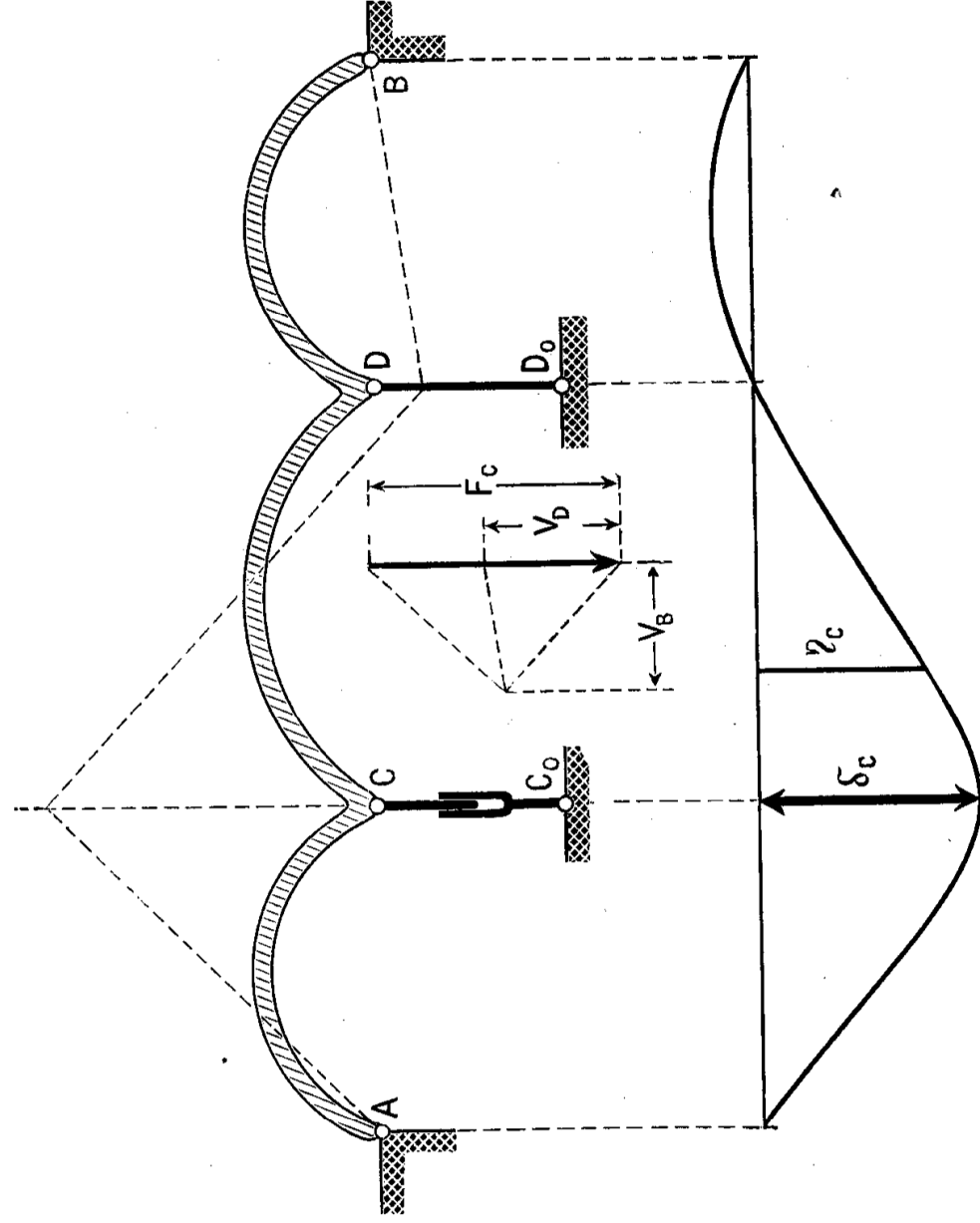


Fig. 127.

poi dal precedente (fig. 126) si dedurrà il valore della reazione dell'appoggio  $D$  dovuto all'azione simultanea di  $P$  e di  $V_c$

$$\begin{aligned} V_D &= P \frac{\eta_D}{\eta_{DD}} - V_c \frac{\eta_{CD}}{\eta_{DD}} \\ &= P \left( \frac{\eta_D}{\eta_{DD}} - \frac{\eta_c}{\delta_c} \frac{\eta_{CD}}{\eta_{DD}} \right) \end{aligned}$$

finalmente dal primo (fig. 125), considerando l'azione simultanea di  $P$ , di  $V_C$  e di  $V_D$ , si dedurrà il valore della spinta

$$\begin{aligned} V_B &= P \frac{\eta_B}{\eta_{BB}} - V_D \frac{\eta_{DB}}{\eta_{BB}} - V_C \frac{\eta_{CB}}{\eta_{BB}} \\ &= P \left[ \frac{\eta_B}{\eta_{BB}} - \left( \frac{\eta_D}{\eta_{DD}} - \frac{\eta_C}{\delta_C} \frac{\eta_{CD}}{\eta_{DD}} \right) \frac{\eta_{DB}}{\eta_{BB}} - \frac{\eta_C}{\delta_C} \frac{\eta_{CB}}{\eta_{BB}} \right] \\ &= P \left[ \frac{\eta_B}{\eta_{BB}} - \frac{\eta_D}{\eta_{DD}} \frac{\eta_{DB}}{\eta_{BB}} - \frac{\eta_C}{\delta_C} \left( \frac{\eta_{CB}}{\eta_{BB}} - \frac{\eta_{CD}}{\eta_{DD}} \frac{\eta_{DB}}{\eta_{BB}} \right) \right] \end{aligned}$$

\* \* \*

Resta ben inteso che si può invece arrivare al tracciamento simultaneo delle tre linee d'influenza delle tre reazioni iperstatiche, deducendole dalle tre deformate del sistema reso staticamente determinato colla soppressione non di un solo, ma di tutti e tre i vincoli sovrabbondanti, ed idealmente assoggettato in un primo tempo alla sollecitazione semplice

$$F_B = 1 \quad F_C = 0 \quad F_D = 0$$

poi alla

$$F_B = 0 \quad F_C = 1 \quad F_D = 0$$

e finalmente alla

$$F_B = 0 \quad F_C = 0 \quad F_D = 1$$

Da tali deformate (che hanno l'andamento indicato in fig. 128) si può infatti, colla semplice applicazione del principio di sovrapposizione degli stati di equilibrio, risalire alla deformata relativa ad una sollecitazione definita da valori affatto arbitrarii di  $F_B$ ,  $F_C$ ,  $F_D$ .

Ora si avrà la linea d'influenza della reazione  $V_B$  allorchando detti tre valori saranno tali che le due faccie del taglio praticato in corrispondenza al vincolo  $B$  vengano a subire uno spostamento relativo unitario, mentre le faccie dei tagli praticate in corrispondenza a  $C$  ed a  $D$  non subiscono spostamento relativo di sorta.

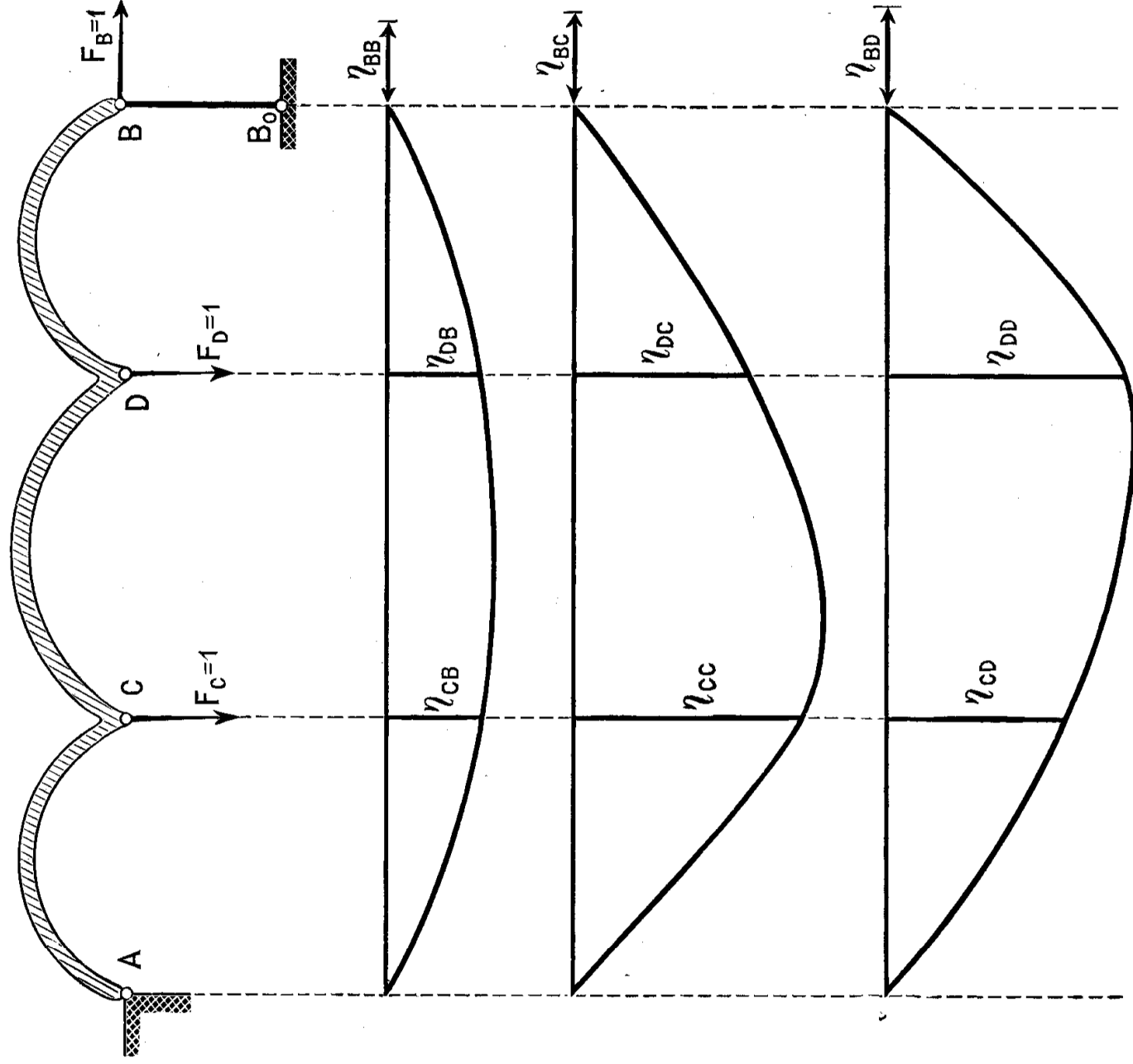


Fig. 128.

Dovranno perciò essere soddisfatte tre equazioni di condizione della forma

$$F_B \eta_{BB} + F_C \eta_{BC} + F_D \eta_{BD} = 1$$

$$F_B \eta_{CB} + F_C \eta_{CC} + F_D \eta_{CD} = 0$$

$$F_B \eta_{DB} + F_C \eta_{DC} + F_D \eta_{DD} = 0$$

le quali, essendo lineari e non omogenee nelle  $F_B$ ,  $F_C$ ,  $F_D$ , ne determinano completamente i valori.

Al solito ci si servirà in pratica delle sole due ultime equazioni per ricavare  $F_C$  ed  $F_D$  in funzione di una  $F_B$  scelta arbitrariamente; naturalmente, così facendo, la prima equazione non risulterà soddisfatta; ma, detto  $\delta_B$  il valore assunto dal suo primo membro, lo si assumerà a sua volta come unità di misura, e si riferiranno ad esso le ordinate del diagramma.

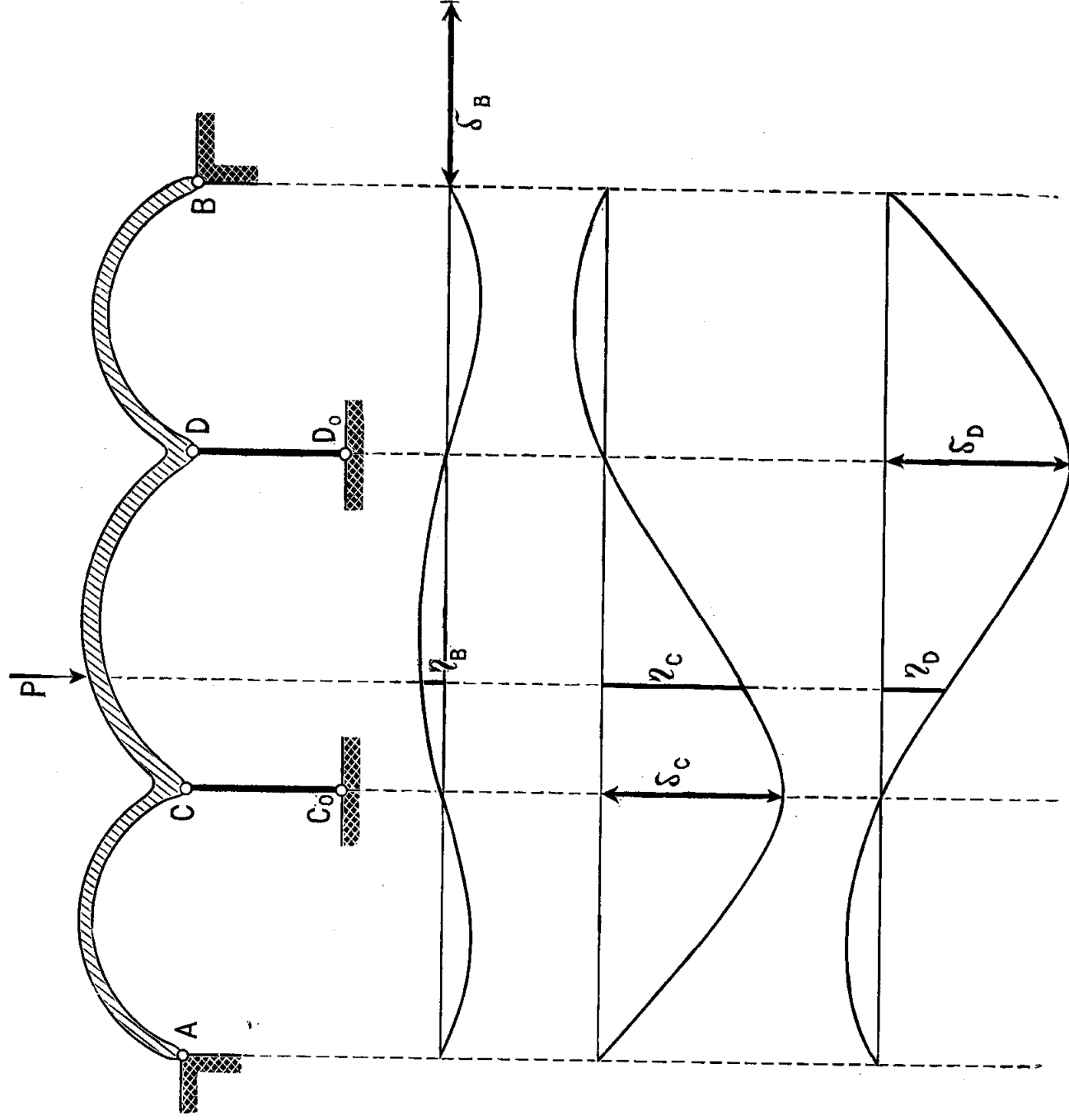


Fig. 129.

Per la linea d'influenza di  $V_C$  la terna delle equazioni di condizione sarà

$$F_B \eta_{BB} + F_C \eta_{BC} + F_D \eta_{BD} = 0$$

$$F_B \eta_{CB} + F_C \eta_{CC} + F_D \eta_{CD} = 1$$

$$F_B \eta_{DB} + F_C \eta_{DC} + F_D \eta_{DD} = 0$$

con possibilità di utilizzazione pratica affatto analoghe: si potrà, per esempio, scegliere ad arbitrio  $F_C$ , servirsi della prima e della terza equazione per dedurre  $F_B$  ed  $F_D$ , ed utilizzare poi la seconda per il calcolo dell'unità di misura  $\delta_C$ .

Similmente per la linea d'influenza di  $V_D$ , cui provvedono le equazioni

$$F_B \eta_{BB} + F_C \eta_{BC} + F_D \eta_{BD} = 0$$

$$F_B \eta_{CB} + F_C \eta_{CC} + F_D \eta_{CD} = 0$$

$$F_B \eta_{DB} + F_C \eta_{DC} + F_D \eta_{DD} = 1$$

Nella figura 129 si vedono disegnate le tre linee d'influenza. Perchè la rappresentazione delle incognite iperstatiche risultasse più espressiva, le tre linee sono state disegnate in una medesima scala

$$\delta_B = \delta_C = \delta_D$$

La cosa però non ha in pratica alcuna importanza, e la relativa riduzione può essere con vantaggio risparmiata da chi ha semplicemente per iscopo di trarre da tali diagrammi i valori numerici delle incognite del suo problema.