III.

La dilatazione cubica.

Facciamo una breve digressione allo scopo di stabilire una importante formula di calcolo, della quale avremo spesso, in seguito, occasione di servirci.

Sia V uno spazio comunque connesso, limitato da una o più superficie chiuse il cui complesso denoteremo con S. Immaginiamo riferito tale spazio ad un sistema di assi coordinati x, y, z scelti per modo che esso resti tutto da una medesima parte del piano coordinato $y\,z$, per esempio dalla parte delle x positive.

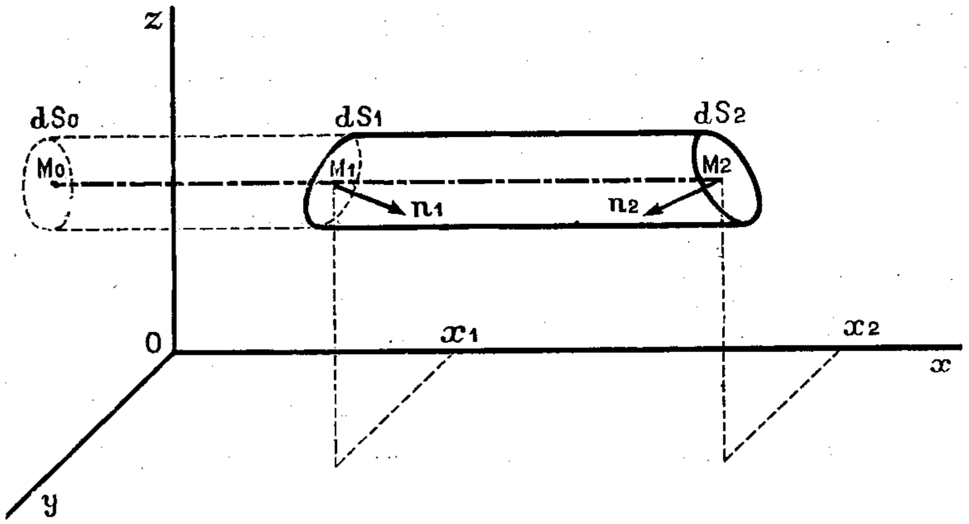

Fig. 1.

Le proiezioni, su questo piano coordinato, dei punti dello spazio dato V occupano un'area, connessa, che denoteremo brevemente con S_0. Sia dS_0 un elemento qualunque di quest'area ed M_0 un punto di dS_0 (fig. 1); per tutti i punti del contorno di dS_0 conduciamo le parallele all'asse delle x: otterremo così un cilindro elementare che taglierà sulla superficie S un numero *pari* di elementi superficiali le cui aree noi designeremo rispettivamente con

$$dS_1,\quad dS_2,\ \ldots\ldots,\quad dS_{2p}$$

nell'ordine stesso in cui si incontrano procedendo sulla parallela condotta per M_0 all'asse delle x, nel senso delle x crescenti.

Siano

$$M_1,\quad M_2,\ \ldots\ldots,\quad M_{2p}$$

quei punti, appartenenti rispettivamente a quegli elementi, nei quali tale parallela incontra la superficie S, e siano

$$x_1,\quad x_2,\ \ldots\ldots,\quad x_{2p}$$

le loro ascisse.

Denoteremo ordinatamente con

$$n_1,\quad n_2,\ \ldots\ldots,\quad n_{2p}$$

le normali in essi alla superficie S, *rivolte verso l'interno di* V.

In corrispondenza di ogni intersezione di ordine dispari, laddove un punto il quale percorresse la solita parallela all'asse x nel solito senso delle x crescenti entrerebbe nello spazio V, l'angolo formato dalla normale sopra definita colla direzione positiva dell'asse x è evidentemente sempre acuto. Per contro in corrispondenza di ogni intersezione di ordine pari, laddove lo stesso punto mobile escirebbe dallo spazio V, l'angolo in questione deve risultare sempre ottuso.

Considerando pertanto l'area elementare dS_0 come la proiezione, sul piano yz, delle singole aree elementari dS_1, $dS_2, \ldots$, dS_{2p}, si avrà, in grandezza e segno,

$$\begin{aligned} dS_0 &= dS_1 \cos(n_1, x) = -\,dS_2 \cos(n_2, x) = \\ &= dS_3 \cos(n_3, x) = \ldots\ldots = -\,dS_{2p} \cos(n_{2p}, x) \end{aligned}$$

Ciò premesso, sia $f(x, y, z)$ una funzione delle variabili x, y, z, data nel campo V e tale che in tutti i punti di esso, compreso il contorno, sia finita, continua, ad un sol valore, ed ammetta la derivata $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ pure finita, determinata ed atta all'integrazione.

Consideriamo l'integrale

$$I = \int_V \frac{\partial f}{\partial x}\, dV$$

Esso può, dopo ciò che si è detto, evidentemente scriversi sotto la forma

$$I = \int \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \int_{x_3}^{x_4} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \ldots + \int_{x_{2p-1}}^{x_{2p}} \frac{\partial f}{\partial x} dx \right] dS_0$$

il primo segno di integrazione indicando una operazione che va estesa a tutti gli elementi dS_0 dell'area S_0.

Ma, per la supposta continuità della funzione f, detto f_1 il valore che essa prende in corrispondenza del punto M_1, f_2 quello che essa prende in corrispondenza di M_2, e, così proseguendo, f_{2p} quello che essa prende in corrispondenza di M_{2p}, si può scrivere

$$I = -\int (f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \ldots + f_{2p-1} - f_{2p})\, dS_0$$

ovvero, sostituendo a dS_0 ordinatamente le sue espressioni sopra trovate,

$$I = -\int f_1 \cos(n_1, x)\, dS_1 - \int f_2 \cos(n_2, x)\, dS_2 - \ldots$$
$$\ldots - \int f_{2p} \cos(n_{2p}, x)\, dS_{2p}$$

o più semplicemente

$$I = -\int f \cos(n, x)\, dS$$

l'integrazione intendendosi estesa a tutti gli elementi della superficie S.

Si ha così la notevole relazione

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x} dV = -\int_S f \cos(n, x)\, dS \tag{10}$$

la quale trasforma, come si vede, un integrale esteso a tutto uno spazio dato, in un integrale esteso alla sola superficie che lo limita. Essa è nota sotto il nome di *formola di Gauss*.

Per la sua validità, oltre alle condizioni imposte alla funzione f, si richiede naturalmente che la normale n sia su S dappertutto determinata, cioè che la superficie o l'insieme di superfici limitanti lo spazio V ammettano generalmente il piano tangente.

In modo analogo si troverebbe, per altre funzioni $f'(x, y, z)$ ed $f''(x, y, z)$ soddisfacenti a condizioni analoghe a quelle già imposte alla funzione f,

$$\int_V \frac{\partial f'}{\partial y} dV = -\int_S f' \cos(n, y)\, dS$$

e

$$\int_V \frac{\partial f''}{\partial z} dV = -\int_S f'' \cos(n, z)\, dS$$

Sommando membro a membro queste relazioni colla (10) si ottiene

$$\left.\begin{aligned} &\int_V \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f'}{\partial y} + \frac{\partial f''}{\partial z}\right) dV = \\ &= -\int_S \left[f \cos(n, x) + f' \cos(n, y) + f'' \cos(n, z)\right] dS \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

formola la quale comprende le precedenti come casi particolari.

***

Ritorniamo ora all'analisi della deformazione ed indichiamo con dV' il volume occupato dopo la deformazione dalla massa elementare che inizialmente occupava un dato elemento di volume dV.

Il rapporto

$$\Theta = \frac{dV' - dV}{dV} \qquad (12)$$

prende il nome di *coefficiente di dilatazione cubica.*

Questo coefficiente può venire assai facilmente determinato per mezzo di un teorema di fondamentale importanza che, coll'aiuto della formola (11), ci proponiamo ora di stabilire.

Consideriamo a tal fine, nell'interno del corpo, una massa finita qualunque: indicheremo ancor qui con V lo spazio che essa occupa allo stato naturale, con S la superficie che la limita. A deformazione avvenuta la stessa massa occuperà uno spazio V' limitato da una superficie S' infinitamente vicina alla superficie S.

Si può valutare la totale dilatazione subìta dalla massa in questione considerandola come la somma dei volumi che gli elementi superficiali dS generano trasferendosi sulla nuova superficie S'.

Preso pertanto in dS un punto qualunque M e detta M' la posizione che esso assume su S' dopo la deformazione, il volume generato da dS è misurato dal prodotto di dS per la proiezione dello spostamento MM' sulla normale alla superficie.

Volendo pertanto considerare come positive le dilatazioni, e come negative le contrazioni di volume, pur continuando ad indicare con n la normale generica diretta verso l'interno di S, dovremo scrivere tale proiezione sotto la forma

$$-u\cos(n,x) - v\cos(n,y) - w\cos(n,z)$$

La totale dilatazione cercata sarà dunque

$$-\int_S [u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z)]\, dS$$

ovvero, adoperando la (11)

$$\int_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dV$$

Per altra parte la stessa dilatazione può scriversi, tenendo presente la definizione di coefficiente di dilatazione cubica,

$$\int_V \Theta\, dV$$

Il paragone di queste due espressioni conduce al risultato che deve esser nullo l'integrale

$$\int_V \left[\Theta - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] dV$$

qualunque sia, lo si tenga ben presente, la porzione di volume (compresa sempre nell'interno del corpo) a cui l'integrale si intende esteso.

Ciò equivale a dire che dev'essere in ogni punto

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Supponiamo infatti che la differenza

$$\Theta - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

sia differente da zero in un certo punto M. Allora, per ragioni ovvie di continuità, si dovrebbe sempre poter trovare un intorno del punto M, in ogni punto del quale la quantità sopra scritta si mantenga del medesimo segno. In conseguenza il suo integrale esteso a quell'intorno non potrebbe essere eguale a zero.

Dunque concludendo, e tenendo presenti le (4), il coefficiente di dilatazione cubica in un corpo infinitamente poco deformato vale

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \tag{13}$$

cioè è eguale alla somma dei tre coefficienti di dilatazione lineari dei tre elementi paralleli agli assi coordinati uscenti dal punto che si considera.

E poichè l'orientazione della terna di assi a cui abbiamo riferito il corpo non è stata assoggettata ad alcuna ipotesi particolare, ciò che si è detto per le tre direzioni degli assi potrà evidentemente ripetersi per tre qualsiansi altre direzioni fra loro ortogonali.

Si potrà cioè affermare che: *la somma dei tre coefficienti di dilatazione lineare di tre elementi, comunque orientati, purchè fra loro ortogonali, uscenti da un dato punto generico del corpo, è costante e misura il coefficiente di dilatazione cubica in quel punto.*