III.

Il teorema di Betti.

Siano ora

$$u, \; v, \; w$$

ed

$$u', \; v', \; w'$$

gli spostamenti che definiscono le configurazioni prese dal solido sotto l'azione dei sistemi di forze esterne che hanno per componenti

$$F_x, \; F_y, \; F_z, \; P_x, \; P_y, \; P_z$$

ed

$$F_x', \; F_y', \; F_z', \; P_x', \; P_y', \; P_z'$$

rispettivamente.

Per la prima configurazione le condizioni di equilibrio si riassumono nella nota relazione (16)

$$\int_V (F_x \delta u + F_y \delta v + F_z \delta w)\, dV + \int_S (P_x \delta u + P_y \delta v + P_z \delta w)\, dS =$$

$$= \int_V \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y} \delta \varepsilon_y + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_z} \delta \varepsilon_z + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \delta \gamma_{yz} + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}} \delta \gamma_{zx} + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy} \right] d\, V$$

che deve aver luogo qualunque siano le variazioni

$$\delta u, \; \delta v, \; \delta w$$

purchè compatibili coi vincoli; in particolare essa deve risultare verificata quando si assumano quelle tre variazioni ordinatamente eguali agli spostamenti

$$u', \; v', \; w'$$

che, per essere quelli che il corpo effettivamente subisce sotto l'azione del secondo sistema di forze esterne, sono senza dubbio compatibili.

In questa ipotesi, la relazione precedente diventa

$$\int_V (F_x u' + F_y v' + F_z w')\, dV + \int_S (P_x u' + P_y v' + P_z w')\, dS =$$
$$= \int_V \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} (\varepsilon_x)_1' + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y} (\varepsilon_y)_1' + \ldots\ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} (\gamma_{xy})_1' \right] dV$$

L'integrale al secondo membro può, conformemente a ciò che si è già detto a pag. 39, scindersi nei due

$$\int_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} \right)_0 (\varepsilon_x)_1' + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y} \right)_0 (\varepsilon_y)_1' + \ldots\ldots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \right)_0 (\gamma_{xy})_1' \right] dV$$
$$\int_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} \right)_1 (\varepsilon_x)_1' + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y} \right)_1 (\varepsilon_y)_1' + \ldots\ldots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \right)_1 (\gamma_{xy})_1' \right] dV$$

il primo dei quali è nullo per la (18).

Similmente, esprimendo le condizioni generali di equilibrio della seconda configurazione, ed assumendo come variazioni virtuali delle componenti di spostamento, precisamente le componenti

$$u, \; v, \; w$$

che caratterizzano la prima, si ha

$$\int_V (F_x' u + F_y' v + F_z' w)\, dV + \int_S (P_x' u + P_y' v + P_z' w)\, dS =$$
$$= \int_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} \right)' (\varepsilon_x)_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y} \right)' (\varepsilon_y)_1 + \ldots\ldots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \right)' (\gamma_{xy})_1 \right] dV$$

Anche qui l'integrale al secondo membro può scindersi immediatamente nei due

$$\int_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} \right)_0' (\varepsilon_x)_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y} \right)_0' (\varepsilon_y)_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \right)_0' (\gamma_{xy})_1 \right] dV$$
$$\int_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} \right)_1' (\varepsilon_x)_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y} \right)_1' (\varepsilon_y)_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \right)_1' (\gamma_{xy})_1 \right] dV$$

il primo dei quali è nullo.

D'altra parte, per una nota, e del resto facilmente dimostrabile, proprietà delle forme quadratiche

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x}\right)_1(\varepsilon_x)_1{}' + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_y}\right)_1(\varepsilon_y)_1{}' + \ldots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{xy}}\right)_1(\gamma_{xy})_1{}' =$$

$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x}\right)_1'(\varepsilon_x)_1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_y}\right)_1'(\varepsilon_y)_1 + \ldots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{xy}}\right)_1'(\gamma_{xy})_1$$

Si ha così in conclusione

$$\left.\begin{aligned}&\int_V (F_x u' + F_y v' + F_z w')\,dV + \int_S (P_x u' + P_y v' + P_z w')\,dS = \\ &= \int_V (F_x' u + F_y' v + F_z' w)\,dV + \int_S (P_x' u + P_y' v + P_z' w)\,dS\end{aligned}\right\} \quad (110)$$

Date dunque due diverse deformazioni di un corpo elastico, relative a due diversi sistemi di forze esterne, il lavoro che le forze del primo sistema compirebbero qualora ai varii loro punti di applicazione venissero attribuiti gli spostamenti che caratterizzano la seconda deformazione, è eguale al lavoro che compirebbero le forze del secondo sistema nell'ipotesi che ai loro punti di applicazione venissero attribuiti gli spostamenti che caratterizzano la prima deformazione.

Questo teorema o *principio di reciprocità*, che Enrico Betti dimostrò per la prima volta nel 1872 nella sua classica *Teoria dell'elasticità* (1), non è altro che un caso particolare di un più generale principio di meccanica; ma, anche limitatamente alla sola teoria dell'equilibrio dei solidi elastici, la reciprocità che esso stabilisce tra due diverse deformazioni di un medesimo corpo trova utile applicazione nei casi più svariati; si può anzi dire che non v'è problema in tutta la scienza delle costruzioni a cui questo elegantissimo tra i principii della fisica matematica non possa essere applicato con qualche vantaggio.

---

(1) *Il nuovo Cimento*, serie 2ª, tom. VII, VIII.

***

Consideriamo un solido elastico libero da ogni vincolo, per cui cioè si abbia identicamente

$$R_x = R_y = R_z = 0$$

e facciamo l'ipotesi che le componenti speciali di tensione relative alla seconda deformazione, che indicheremo con

$$\sigma_x', \ \sigma_y', \ \sigma_z', \ \tau_{yz}', \ \tau_{zx}', \ \tau_{xy}'$$

(supponendo che non esistano tensioni indipendenti dalle forze esterne) siano costanti in tutto il corpo, cioè indipendenti dalle coordinate. Le loro derivate parziali rispetto a queste coordinate saranno per conseguenza tutte nulle, epperò le equazioni indefinite per l'equilibrio richiedono che si abbia

$$F_x' = F_y' = F_z' = 0$$

cioè che manchino completamente le forze di massa.

Quanto alle forze superficiali esse potranno essere diverse a seconda dei valori che vogliamo attribuire alle componenti speciali di tensione.

Se per esempio noi imponiamo

$$\sigma_x' = \sigma_y' = \sigma_z' = 1 \qquad \tau_{yz}' = \tau_{zx}' = \tau_{xy}' = 0$$

le equazioni ai limiti risultano identicamente verificate per

$$P_x' = -\cos(n, x)$$
$$P_y' = -\cos(n, y)$$
$$P_z' = -\cos(n, z)$$

ciò che equivale a ritenere il solido sollecitato su tutta la sua superficie da una forza uniformemente distribuita, diretta in ogni punto secondo la normale alla superficie stessa, rivolta verso l'esterno del corpo e di intensità ovunque eguale all'unità.

Siccome le componenti della deformazione

$$\varepsilon_x', \ \varepsilon_y', \ \varepsilon_z', \ \gamma_{yz}', \ \gamma_{zx}', \ \gamma_{xy}'$$

sono funzioni lineari, a coefficienti dati, delle componenti speciali di tensione, esse possono in ogni caso considerarsi come note.

Se i coefficienti di elasticità sono costanti, cioè non variano da punto a punto del solido, anche le componenti di deformazione devono riuscir costanti. E le componenti di spostamento, da cui esse derivano secondo le (4) — moti rigidi a parte — non possono che essere della forma

$$u' = \varepsilon_x' x + \frac{1}{2}\gamma_{xy}' y + \frac{1}{2}\gamma_{zx}' z$$

$$v' = \frac{1}{2}\gamma_{xy}' x + \varepsilon_y' y + \frac{1}{2}\gamma_{yz}' z$$

$$w' = \frac{1}{2}\gamma_{zx}' x + \frac{1}{2}\gamma_{yz}' y + \varepsilon_z' z$$

In ogni caso la (110) diviene

$$\int_V (F_x u' + F_y v' + F_z w')\, dV + \int_S (P_x u' + P_y v' + P_z w')\, dS = \\ = -\int_S \left[u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z)\right] dS$$

Ma il secondo membro di questa eguaglianza si può immediatamente trasformare in

$$\int_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dV$$

epperò non è altro che la dilatazione cubica totale che il solido dato subisce sotto l'azione delle forze del primo sistema.

La relazione a cui si giunge

$$\left.\begin{aligned} &\int_V (F_x u' + F_y v' + F_z w')\, dV + \int_S (P_x u' + P_y v' + P_z w')\, dS = \\ &\qquad = \int_V \Theta\, dV \end{aligned}\right\} \quad (111)$$

non contiene le componenti di spostamento relative al primo sistema di forze, epperò, dato che sia questo primo sistema, permette di procedere alla determinazione diretta della dilatazione cubica totale senza passare per la risoluzione del problema generale dell'equilibrio.

Chè anzi non è neppur sempre necessario conoscere completamente la distribuzione di quelle forze.

Proponiamoci, per esempio, di determinare l'alterazione di volume che subisce un corpo elastico omogeneo (cioè di densità costante, e con coefficienti di elasticità pure costanti) sotto l'azione del proprio peso.

Posta l'origine nel baricentro, cioè supposto

$$\int_V x\,dV = \int_V y\,dV = \int_V z\,dV = 0$$

e diretto l'asse delle z in senso opposto a quello della gravità, dovremo ritenere

$$F_x = F_y = 0$$

$$F_z = \textit{costante negativa}$$

Supponiamo ancora che si abbia $P_x = P_y = 0$, cioè che l'equilibrio sia mantenuto mediante una conveniente distribuzione di forze superficiali dirette verticalmente.

Dovrà aversi

$$\int_S P_z\,dS = -F_z \int_V dV = -F_z V$$

$$\int_S P_z x\,dS = -F_z \int_V x\,dV = 0$$

$$\int_S P_z y\,dS = -F_z \int_V y\,dV = 0$$

In questa ipotesi la (111) diviene

$$\int_V \Theta\,dV = \int_V F_x \left(\frac{1}{2} \gamma_{zx}' x + \frac{1}{2} \gamma_{yz}' y + \varepsilon_z' z \right) dV +$$

$$+ \int_S P_z \left(\frac{1}{2} \gamma_{zx}' x + \frac{1}{2} \gamma_{yz}' y + \varepsilon_z' z \right) dS = \varepsilon_z' \int_S P_z z\,dS$$

È notevole che l'integrazione può farsi anche senza conoscere la effettiva distribuzione delle forze superficiali, se queste son diverse da zero, solo nei punti della superficie del corpo che appartengono ad un medesimo (e del resto arbitrario) piano orizzontale.

Sia infatti

$$z = h$$

l'equazione di tale piano: si trova subito

$$\int_V \Theta \, dV = -\varepsilon_z' \, h \, F_z V$$

Ma

$$-F_z V$$

non è altro che il peso del corpo.

Si può quindi concludere che, se un solido elastico omogeneo pesante viene sostenuto mediante un sistema di forze verticali comunque distribuite sui punti della sua superficie che appartengono ad un dato piano orizzontale, *la totale variazione di volume dal solido è proporzionale al suo peso ed alla distanza del suo centro di gravità dal piano in questione*, il coefficiente di proporzionalità dipendendo soltanto, per un dato corpo, dalla sua orientazione nello spazio.

In particolare si può osservare che, qualunque sia la sua orientazione, se il piano considerato contiene il centro di gravità, la parte superiore diminuisce o aumenta di volume precisamente tanto quanto aumenta o diminuisce la parte inferiore, dimodochè resta invariato il volume totale.

* * *

Supponiamo ora invece che le forze del secondo sistema si riducano ad un'unica forza concentrata P' applicata in un punto dato A del corpo secondo una certa direzione arbitraria che indicheremo con a.

Se si indica con p la componente secondo a dello spostamento che quel punto A subisce sotto l'azione del primo sistema di forze esterne, si può, in conformità a quanto si è già fatto in altre occasioni, scrivere il secondo membro della (110) sotto la forma semplicissima

$$P' . p$$

Per

$$P' = 1$$

si ottiene senz'altro la misura dello spostamento p in funzione delle componenti di spostamento dei varii punti del solido supposto sollecitato dalla sola suddetta forza concentrata unitaria: si trova infatti

$$\int_V (F_x u' + F_y v' + F_z w')\, dV + \int_S (P_x u' + P_y v' + P_z w')\, dS = p \quad (112)$$

Come caso particolare, se anche il primo sistema di forze si riducesse ad un'unica forza concentrata P, che supporremo applicata in un punto generico B nella direzione b, anche il primo membro della solita equazione si ridurrebbe al solo prodotto

$$P.\, p'$$

p' essendo lo spostamento che il punto B subirebbe nella direzione b per effetto della forza P' che rappresenta il secondo sistema. Per

$$P = P' = 1$$

si troverebbe allora

$$p' = p \quad (113)$$

Dati dunque in un sistema elastico due punti A e B, e per essi due direzioni a e b ad arbitrio, *lo spostamento che il punto A subisce nella direzione a sotto l'azione di una forza unitaria applicata al punto B nella direzione b, è eguale allo spostamento che subirebbe questo medesimo punto B in questa stessa direzione b per effetto di una forza pure unitaria la quale agisse sul punto A nella direzione a.*

Sotto questa forma particolarissima il principio di reciprocità era stato già enunciato da J. C. Maxwell fin dal 1864, e si presta alla immediata deduzione di alcune conseguenze interessantissime.

* * *

Immaginiamo, per esempio, di sapere individuare, in grandezza direzione e senso, lo spostamento BB' che il punto B del solido elastico dato subirebbe per effetto della forza unitaria che si è supposta agente sul punto A nella direzione a (fig. 42).

Il teorema sopra enunciato viene allora a stabilire l'eguaglianza tra lo spostamento di A nella direzione a, prodotto da una forza unitaria applicata in B secondo la direzione arbitraria b, e la proiezione del vettore BB' su questa direzione.

Se pertanto si suppone questa direzione variabile a volontà, se cioè si immagina che la forza applicata in B possa prendere

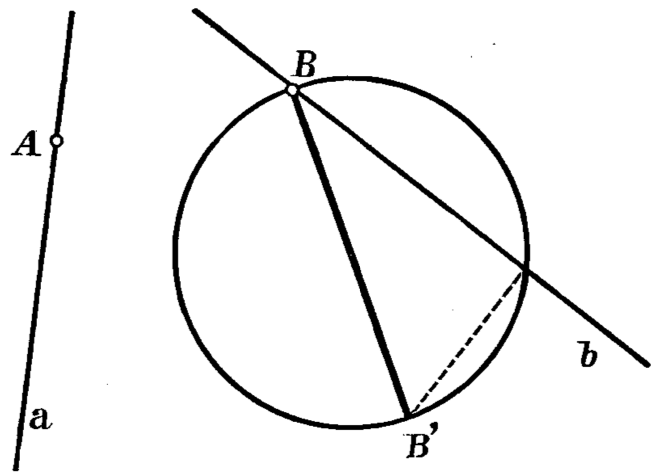

Fig. 42.

tutte le possibili direzioni senza per altro mutar di grandezza, lo spostamento di A nella direzione a deve a sua volta variare come la proiezione di BB' sulla direzione della forza, il che è quanto dire come il segmento che sulla linea d'azione di detta forza viene intercettato dalla sfera avente BB' per diametro.

* * *

Un altro esempio, dal quale anche più chiaramente appaiono i vantaggi che il principio di reciprocità permette di realizzare, trasportando a problemi nuovi anche molto complessi i risultati già conseguiti studiando problemi più semplici, si può trarre dall'esame di quei solidi cilindrici che furono oggetto delle ricerche di Saint-Venant.

Immaginiamo invero che un solido siffatto, incastrato al solito in corrispondenza di una delle sue basi, sia sollecitato da forze comunque ripartite sulla sua superficie laterale cilindrica, e sulla stessa sua massa.

Noi già sappiamo quali gravissime difficoltà si oppongano alla trattazione diretta di questo problema ed in qual modo si sia costretti, quando si deve affrontarlo, a sacrificare il rigore del ragionamento per giungere a qualche risultato pratico.

Vi è però un caso in cui si può andare a fondo della questione mediante la semplice applicazione del principio di reciprocità: e si presenta ogniqualvolta si ha soltanto per scopo di determinare gli spostamenti che la suddescritta condizione generalissima di carico produce nella base libera del cilindro.

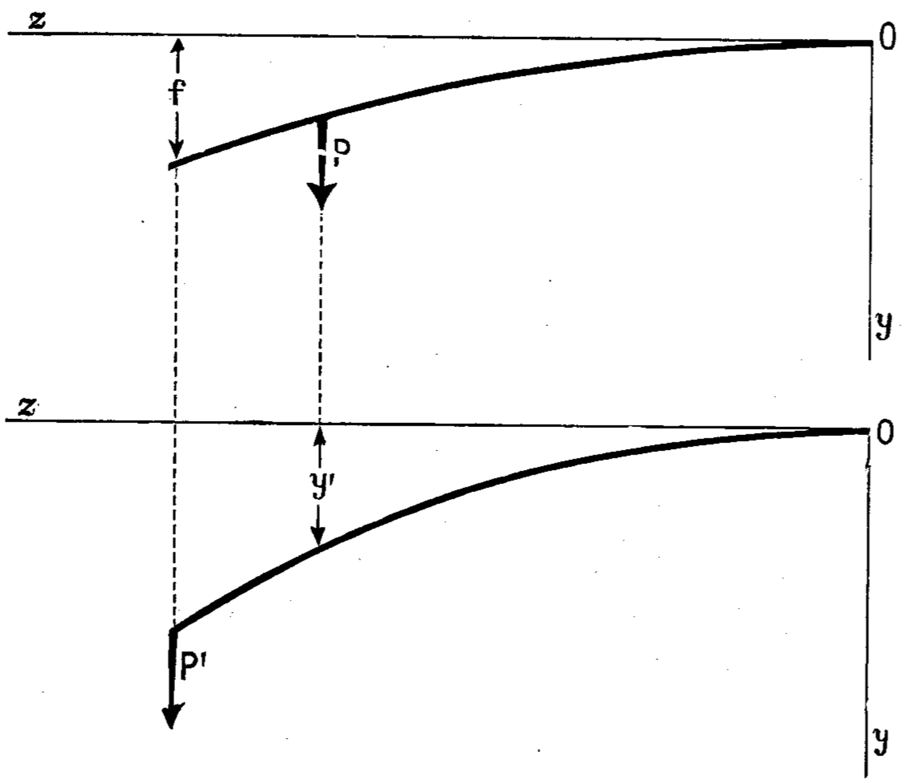

Fig. 43.

Basta allora applicare la (112) assumendo come primo sistema di forze quello dato, e come secondo sistema un'unica forza unitaria passante pel punto della base libera che si vuol prendere in considerazione ed avente la direzione secondo la quale gli spostamenti voglion esser misurati.

Supponiamo, tanto per fissar le idee su di un caso concreto molto semplice, che il solido cilindrico dato sia sollecitato da una sola forza P applicata normalmente al suo asse geometrico (e più precisamente parallela all'asse y), in corrispondenza di una sua sezione generica (fig. 43). E proponiamoci di determinare la freccia f del solido, cioè lo spostamento che l'estremità libera dell'asse geometrico subisce nella direzione dello stesso asse y.

Noi sappiamo individuare punto per punto la curva elastica del cilindro supposto sollecitato dalla forza $P' = 1$ applicata all'estremo libero dell'asse geometrico nella direzione dell'asse y.

Sia pertanto y' l'ordinata generica di tale linea, cioè lo spostamento del punto d'applicazione della forza data P nella direzione stessa di questa forza.

Si avrà immediatamente dalla (112)

$$f = P y' \tag{114}$$

La linea elastica costruita fornisce così la immediata soluzione del problema qualunque sia la posizione della forza P: possiamo anzi dire, qualunque sia il sistema di forze come P che si immaginano applicate lungo l'asse del cilindro.

Detta linea elastica è anzi suscettibile di una caratteristica interpretazione: y' è invero ovviamente il valore che la freccia f assumerebbe se fosse $P = 1$.

La linea elastica costruita per la sollecitazione $P' = 1$ *rappresenta dunque colle sue ordinate* y' *la legge di variazione della freccia* f *per una forza* $P = 1$ *che si sposti lungo l'asse geometrico del solido, mantenendosi parallela a se stessa.*

Così intesa quella linea elastica prende il nome di *linea di influenza della freccia* f.