

### III.

## Estensione semplice

(PRIMO CASO PARTICOLARE).

Indichiamo provvisoriamente con  $c$  una costante piccolissima e poniamo

$$u = -\frac{c}{m}x \quad v = -\frac{c}{m}y \quad w = cz$$

Si constata facilmente che riescono identicamente soddisfatte le (47) in tutti i punti del solido, la (51) sulla superficie laterale e le (53) nell'origine.

L'ipotesi fatta corrisponde dunque ad una deformazione che rientra nella classe da noi considerata nel capitolo precedente: lo stato di tensione è definito in ciascun punto dalle (48) le quali nel caso presente divengono

$$\sigma_z = Ec \quad \tau_{yz} = 0 \quad \tau_{zx} = 0$$

Questi valori sono indipendenti dalle coordinate del punto che si considera: valgono perciò invariati anche nei punti della base libera  $z = l$ , sulla quale per l'equilibrio dovranno pertanto, secondo le (52), ritenersi distribuite delle forze di componenti

$$P_x = 0 \quad P_y = 0 \quad P_z = Ec$$

I singoli elementi  $dA$  della base libera sono dunque soggetti a sole forze normali di intensità  $Ec \, dA$  la cui risultante

$$\mathcal{N} = EcA$$

dovendo essere a sua volta normale e passare pel baricentro di detta base, avrà per linea d'azione l'asse stesso delle  $z$ .

In pratica  $\mathcal{N}$  sarà il dato del problema: calcolato allora il valore della costante

$$c = \frac{\mathcal{N}}{EA}$$

si potranno scrivere le componenti di spostamento:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{m} \frac{\mathcal{N}}{EA} x \\ v &= -\frac{1}{m} \frac{\mathcal{N}}{EA} y \\ w &= \frac{\mathcal{N}}{EA} z \end{aligned} \right\} (57)$$

Il cilindro dato si trasforma in un altro cilindro, pure retto; le sezioni piane del primo si trasformano nelle sezioni piane del secondo: in particolare le sezioni rette si trasformano omoteticamente (ogni loro punto si sposta cioè lungo la retta che lo congiunge al baricentro di una quantità proporzionale alla sua distanza dal baricentro stesso) ed inoltre si spostano lungo l'asse del cilindro di una quantità proporzionale alla loro distanza dalla base incastrata.

Per  $m > 0$ ,  $w$  ha lo stesso segno di  $\mathcal{N}$ , ed  $u$  e  $v$  hanno segno contrario; il che vuol dire che, se il cilindro è sollecitato a trazione, si allunga longitudinalmente e si contrae trasversalmente: il contrario accade se il cilindro è sollecitato a compressione.

Quanto allo stato di tensione sappiamo già che tutte le sezioni rette sono sollecitate dal solo *sforzo normale* e che questo è costante:

$$\mathcal{N}_z = \mathcal{N}$$

Possiamo ora precisare le cose aggiungendo che l'unica componente speciale di tensione non nulla vale

$$\sigma_z = \frac{\mathcal{N}}{A} \quad (58)$$

Essa non dipende dalle coordinate: ciò è quanto dire che lo stato di tensione è lo stesso in tutti i punti del corpo.

\*\*

Facendo  $z = l$  nella terza delle (57) si ottiene la variazione di lunghezza del cilindro

$$\delta l = \frac{\mathcal{N}l}{EA} \quad (59)$$

Essa è direttamente proporzionale alla forza esterna ed alla lunghezza primitiva, ed inversamente all'area della sezione retta ed al modulo di elasticità normale del materiale.

Si ha inoltre

$$E = \frac{\mathcal{N}l}{A \delta l}$$

Il modulo di elasticità normale potrebbe adunque definirsi come il valore della forza esterna riferita all'unità di area della sezione retta, capace di produrre una variazione di lunghezza eguale alla lunghezza primitiva: occorre appena avvertire che si tratta però di un valore puramente ideale in quanto che le formole che siamo venuti e che verremo scrivendo sono suscettibili di essere applicate al problema fisico solo per  $\delta l$  piccolissimo a fronte di  $l$ .

A parte questa interpretazione, di importanza assai discutibile, la formola scritta merita di esser tenuta presente perchè si presta alla determinazione sperimentale del modulo  $E$ .

L'esperienza richiede la misura contemporanea di  $\mathcal{N}$  e di  $\delta l$  sopra un cilindro di cui sian note la lunghezza  $l$  e l'area  $A$  della sezione retta.

Nell'eseguirlo bisogna naturalmente aver cura di non oltrepassare il limite di proporzionalità: limite che d'altronde l'esperienza stessa mette assai bene in evidenza se si ha l'avvertenza di misurare i vari valori che  $\delta l$  assume per valori di  $\mathcal{N}$  gradatamente crescenti.

La misura è relativamente facile ad eseguirsi coi mezzi ordinari se  $A$  è assai piccolo ed  $l$  molto grande, perchè allora con valori di  $\mathcal{N}$  anche moderati si possono ottenere variazioni di lunghezza  $\delta l$  relativamente cospicue.

Così per esempio, quando si opera su un lungo filo, si può fissarne un estremo, e metterlo in tensione caricando l'altro

estremo mediante pesi: prese le debite precauzioni per tener conto delle influenze dovute a cedimenti dell'attacco o ad eventuali differenze di temperatura, gli allungamenti elastici del filo si misureranno osservando gli spostamenti dell'estremo caricato coll'aiuto di semplici dispositivi micrometrici.

Ma queste condizioni non sono naturalmente realizzabili quando si vuol sperimentare a compressione: inoltre sta il fatto che le proprietà elastiche dei fili, e in genere di ogni saggio di piccolissime dimensioni trasversali, sono quasi sempre influenzate dal processo di lavoro

subito: risultati di carattere più generale si ottengono se si opera su saggi di dimensioni trasversali non troppo piccole, nel qual caso però gli sforzi occorrenti divengono considerevoli e non possono più, in pratica, venir realizzati mediante l'applicazione diretta di pesi.

Si ricorre allora a macchine espressamente costruite per le prove di resistenza dei materiali: macchine che possono essere diversissime e anche molto complicate nelle loro particolarità costruttive, ma che, nella maggior parte dei casi, realizzano un unico e semplicissimo schema che le figg. 6 e 7 rappresentano rispettivamente nel caso di una prova a trazione e in quello di una prova a compressione.

Il saggio *a* viene nel primo caso stretto ai due estremi in apposite staffe: nell'altro caso viene invece collocato fra due piastre parallele.

Ad una delle staffe o piastre si può a volontà imprimere un movimento più o meno lento di traslazione nella direzione del-

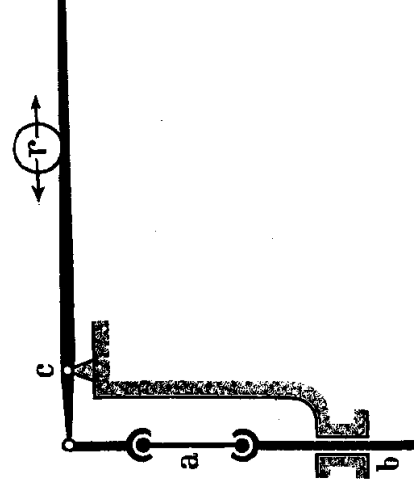


Fig. 6.

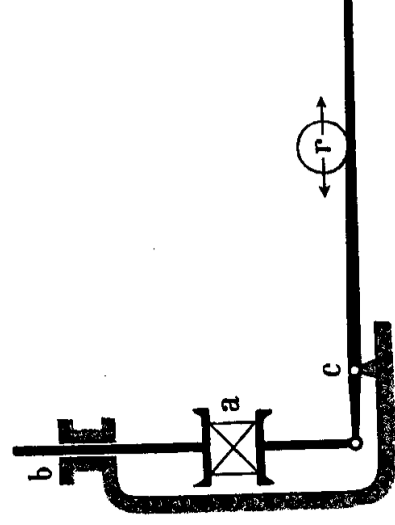


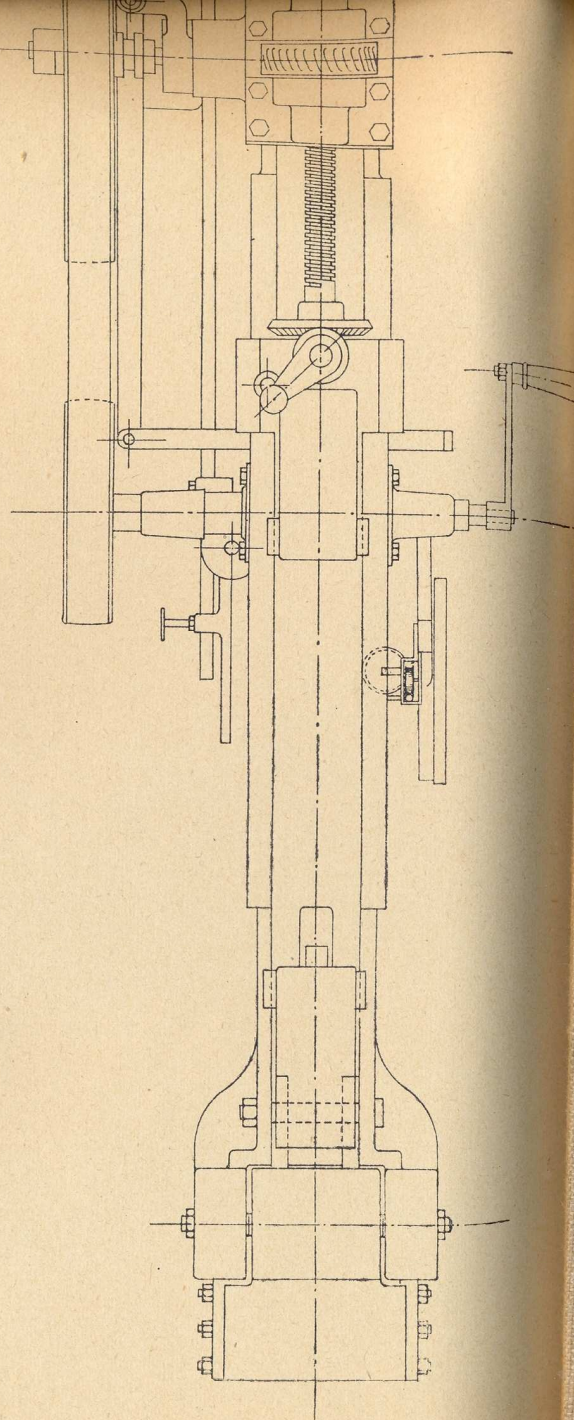
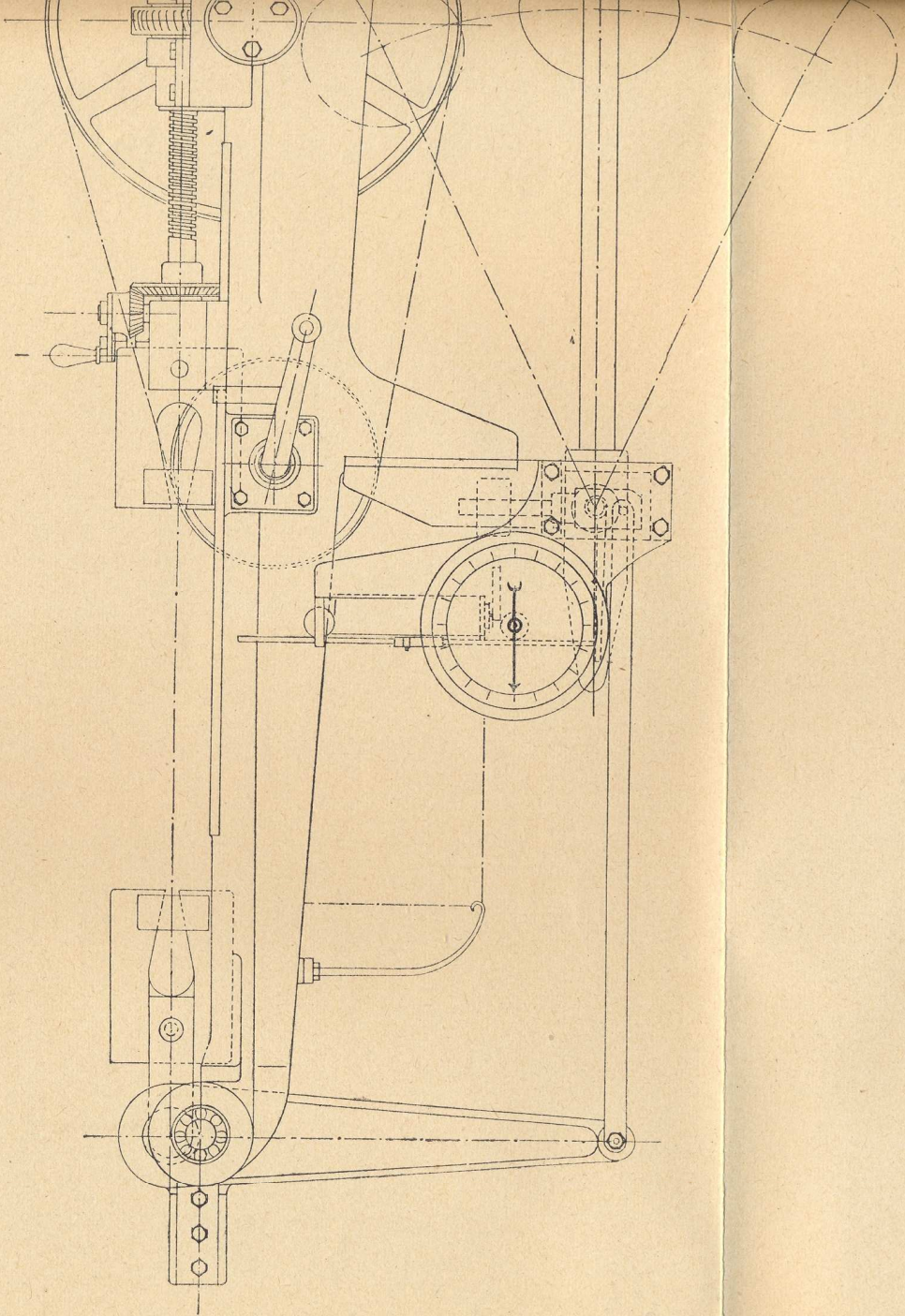
Fig. 7.

### TAVOLA III

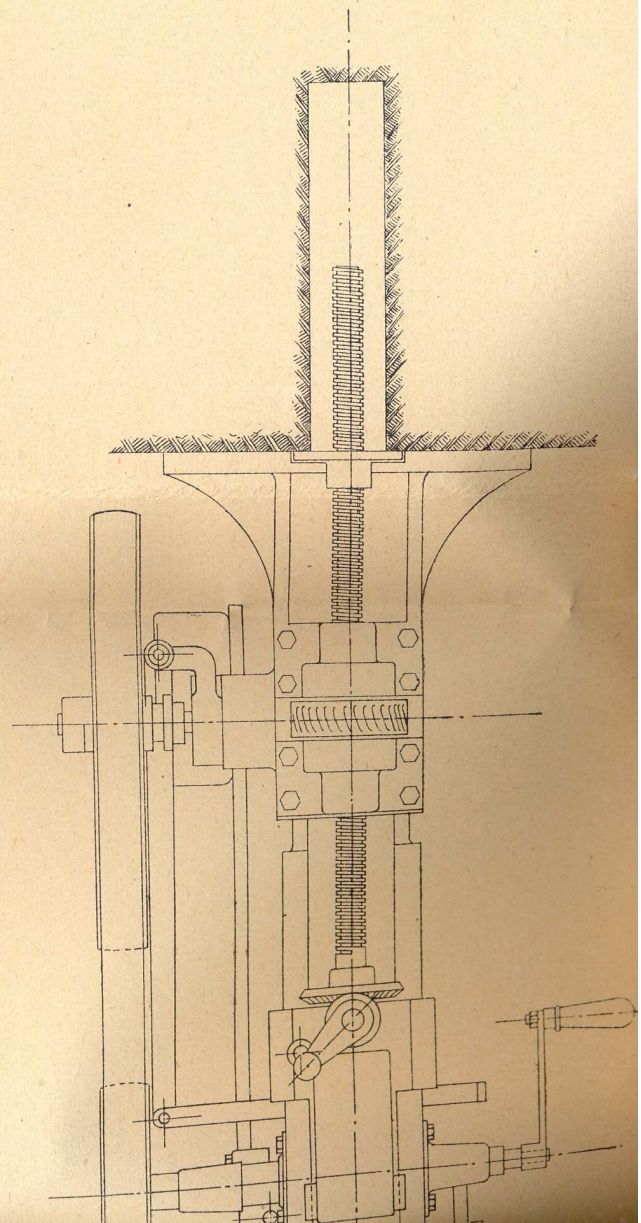
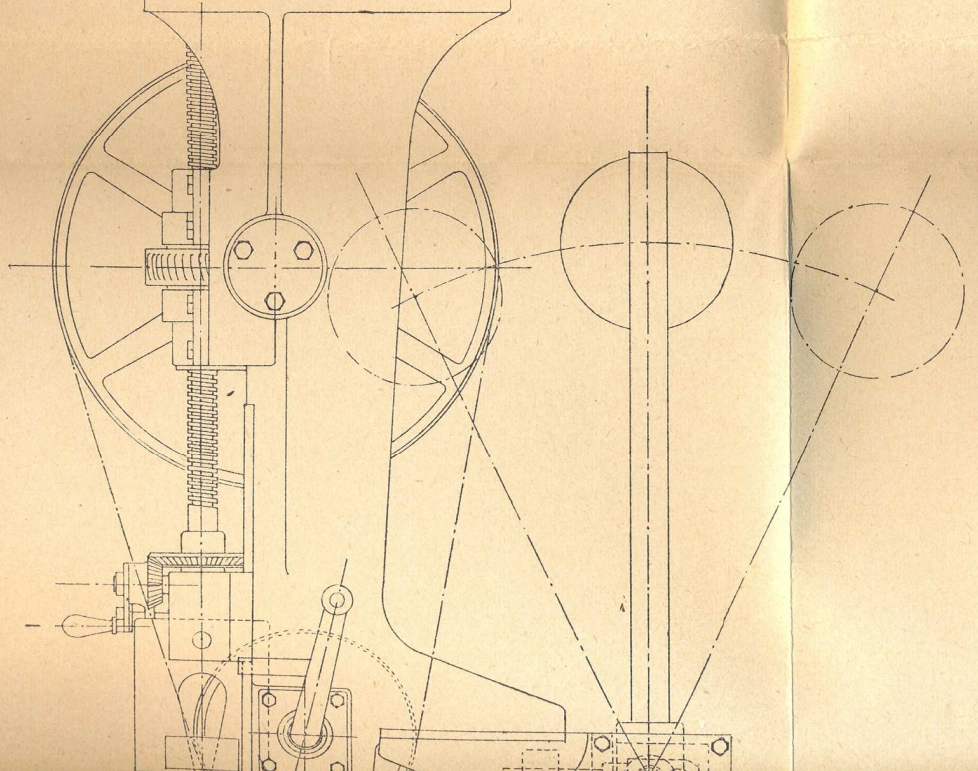
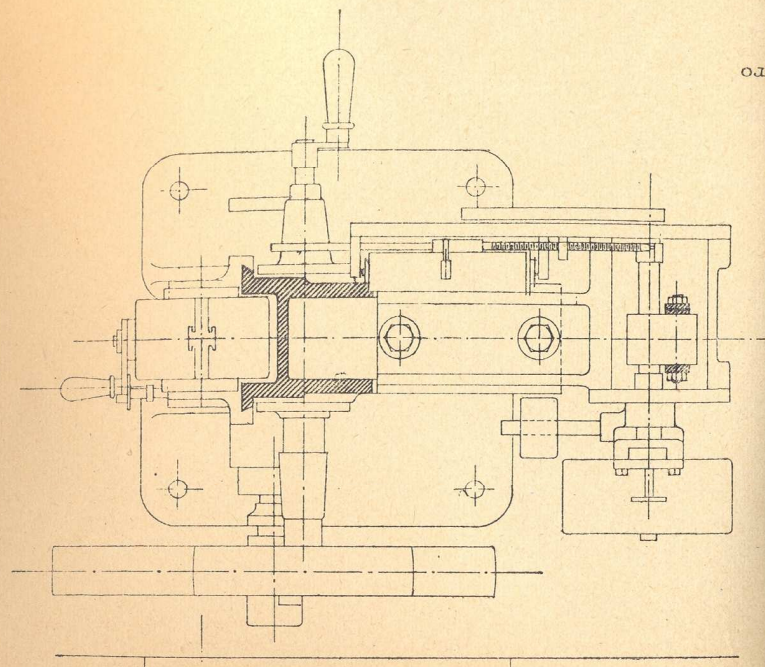
(pag. 116).

Disegni d'assieme di una macchina per prove a trazione, a compressione ed a flessione, della potenza di 5 tonnellate, studiata ed eseguita dal costruttore Amstler di Schaffhausen per il Laboratorio sperimentale di resistenza dei materiali della R. Scuola d'Ingegneria di Pisa.

Le due staffe, così come sono rappresentate nei disegni, si prestano come organi di presa del saggio nelle prove a trazione. Per le prove a compressione od a flessione esse vengono munite di piastre o di traverse adatte.



0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1 metro



l'asse della provetta mediante un dispositivo di manovra, situato in *b*, che può assumere forme diversissime.

L'altra staffa, o piastra, è invece collegata all'apparecchio di misura degli sforzi che, nella sua più semplice espressione, può anche ridursi ad una leva a fulcro fisso *c* da mantenersi orizzontale a mezzo di un romano scorrevole *r*.

L'apparato dinamometrico misura così lo sforzo che il saggio sopporta nello stato di deformazione in esso prodotto da un qualunque spostamento della staffa solidale al dispositivo di manovra.

\* \* \*

Il descrivere anche solo sommariamente i vari tipi di macchine per le prove di resistenza dei materiali, accennando ai diversi dispositivi, più o meno ingegnosi, adottati dai diversi costruttori tanto per produrre gli sforzi come per misurarne l'entità, ci porterebbe assolutamente fuori dei limiti del nostro programma.

Solo a titolo di esempio, e per dare al lettore qualche idea concreta sull'argomento, riproduciamo nella nostra tavola III i disegni di una macchina per prove a trazione, a compressione ed a flessione, della potenza di 5 tonnellate, che uno dei più rinomati costruttori, l'Amsler di Schaffhausen, ha studiata ed eseguita per il laboratorio sperimentale di resistenza dei materiali della R. Scuola d'Ingegneria di Pisa, e di cui chi scrive ha avuto occasione di sperimentare l'ottimo funzionamento (1).

In questa macchina lo sforzo viene prodotto a mano, e trasmesso coll'intermediario di una trasmissione per cingoli e di una vite senza fine operante sulla chiocciola della vite che porta la staffa inferiore.

La staffa superiore invece è semplicemente sospesa all'estremità del braccio minore di una robusta leva orizzontale (riduttrice degli sforzi) la quale, all'estremità del braccio maggiore, è collegata, per mezzo di una lunga asta verticale, ad una spe-

---

(1) Cfr. « *Una nuova macchina per prove alterne a trazione e pressione* », [Giornale del Genio Civile, 1915].



ciale bilancia di inclinazione <sup>(1)</sup> la quale si presta egualmente bene a misurare sforzi dell'uno o dell'altro segno.

Nella tavola IV la macchina è fotograficamente riprodotta in condizioni di funzionamento durante una prova a trazione.

\* \* \*

Quanto alla deformazione che lo sforzo determina nel saggio, è facile capire che essa non può essere direttamente indicata dalla macchina fino a che si mantiene dello stesso ordine di grandezza delle deformazioni contemporaneamente subite dai vari organi che la compongono. Si ricorre quindi, per apprezzarla colla necessaria precisione, ad appositi strumenti di misura detti estensimetri.

La fig. 8 rappresenta uno fra i più noti di questi estensimetri nella forma ad esso data da A. Martens.

Nella tavola V lo stesso estensimetro si vede in funzione sulla macchina testè descritta.

Lungo due generatrici opposte del saggio si dispongono due asticciuole leggermente flessibili *a, a*, le quali poggiano direttamente su di esso, in corrispondenza di una delle sezioni prescelte come basi del tronco cilindrico o prismatico su cui si vuol sperimentare, mediante appositi taglienti *b, b*; in corrispondenza dell'altra sezione vengono invece interposti, tra la superficie del saggio e quelle due asticciuole, due coltelli rombici *c, c*.

Quando la distanza delle due sezioni varia, ciascuno dei due coltelli subisce una certa rotazione la cui ampiezza può facilmente misurarsi rilevando, su di un'apposita scala graduata, le deviazioni di un raggio luminoso proveniente da un punto fisso

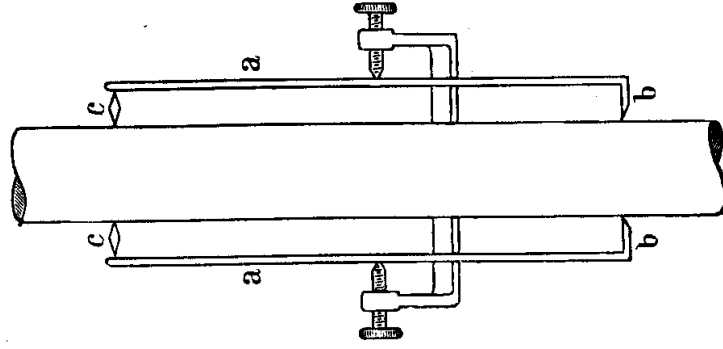
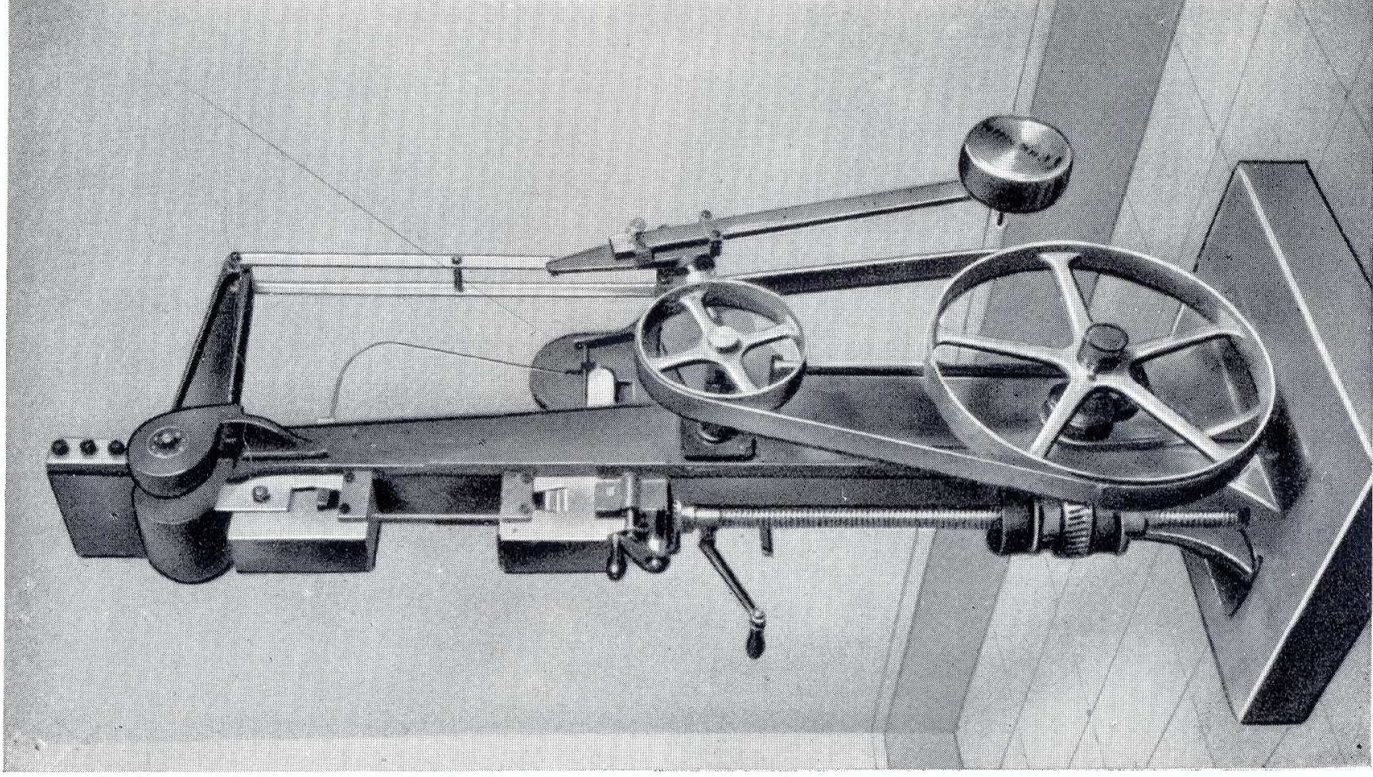
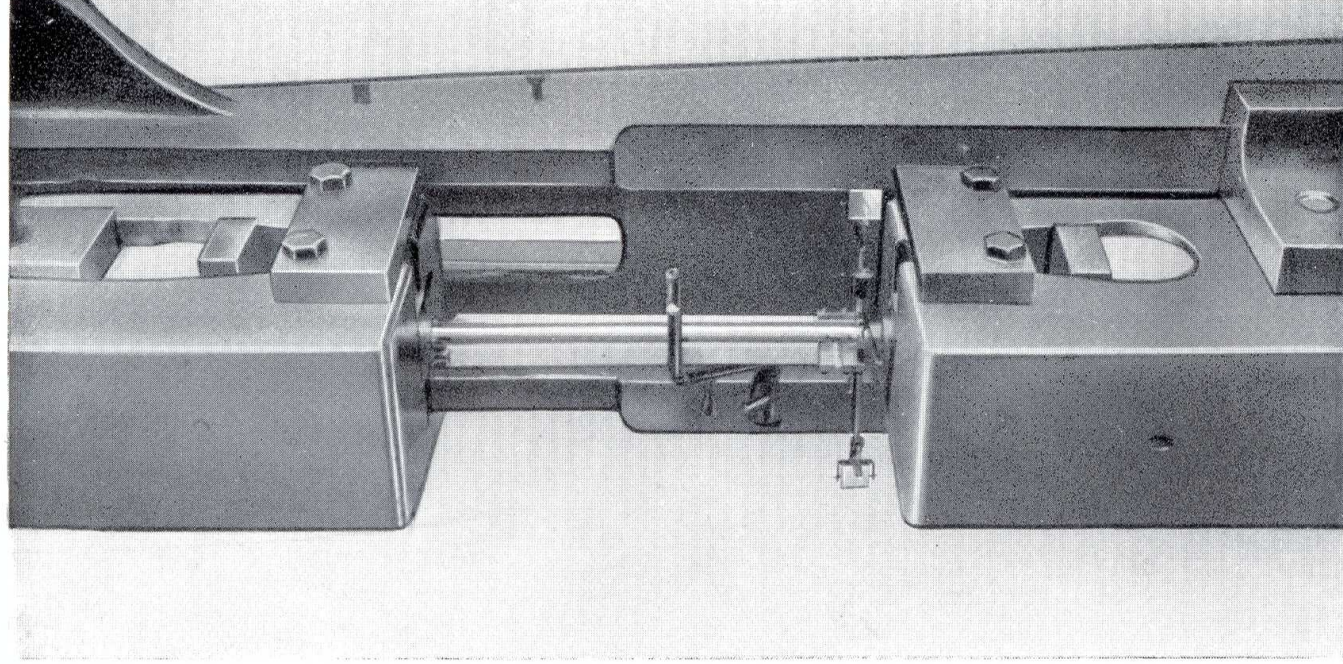


Fig. 8.

<sup>(1)</sup> Cfr. « I fondamenti della statica », a pag. 182.





dello spazio e riflesso da uno specchietto solidale al coltello e parallelo al suo asse istantaneo.

Si può con questa disposizione, o con altre ad essa equivalenti, rendere apprezzabili variazioni di lunghezza dell'ordine di grandezza di  $\frac{1}{5000}$  di millimetro.

S'intende che le due misure eseguite utilizzando i due coltelli di cui l'apparecchio è provvisto dovrebbero riuscire eguali se le condizioni supposte nella teoria fossero rigorosamente realizzate.

In pratica però ciò avverrà raramente: anche prescindendo dalle inevitabili piccole imperfezioni di forma del saggio, e dalla non assoluta omogeneità del materiale, bisogna tener conto che lo sforzo di trazione o di compressione esercitato dalla macchina, anche se coll'intermediario di apposite snodature sferiche, risulterà difficilmente centrato.

Le due differenti deformazioni che si rileveranno a volte sulle due generatrici opposte del saggio non soltanto ci avvertiranno della esistente eccentricità di carico, ma ci permetteranno di evitare l'errore a cui quella eccentricità potrebbe dar luogo qualora ci si limitasse ad operare su di una sola generatrice.

Come dimostreremo infatti a suo tempo, la formola trovata nel paragrafo precedente resta perfettamente valida anche nel caso dello sforzo normale eccentrico se per  $\delta l$  si introduce la media aritmetica delle variazioni di lunghezza misurate su due generatrici situate in posizione simmetrica rispetto all'asse geometrico del saggio.

\* \* \*

Passiamo ora alla ricerca del coefficiente di Poisson: a tal fine indichiamo con  $h$  una qualunque delle dimensioni trasversali del saggio, per esempio il diametro se si tratta di un saggio a sezione circolare, o uno dei lati se si tratta di un saggio a sezione rettangolare.

Dalle prime due delle (57) si ricava che, durante la deformazione, la dimensione  $h$  subisce una variazione

$$\delta h = - \frac{1}{m} \frac{\mathcal{N}h}{EA}$$

Confrontando questo risultato con quello trovato per le variazioni delle dimensioni longitudinali (59), si trova che

$$\frac{\delta h}{h} = -\frac{1}{m} \frac{\delta l}{l}$$

Le dimensioni trasversali di un cilindro (o prisma) sollecitato da semplice sforzo normale subiscono dunque una variazione che (per  $m > 0$ ) è di segno contrario e di grandezza eguale ad  $\frac{1}{m}$  di quella che contemporaneamente si verifica nelle dimensioni longitudinali.

Di qui il nome di rapporto di contrazione laterale dato al coefficiente di Poisson.

Il suo valore è

$$\frac{1}{m} = -E \frac{A}{\mathcal{N}} \frac{\delta h}{h}$$

e si può quindi ricavare insieme con  $E$  se nell'esperienza dianzi descritta si dispone di mezzi adatti alla misura di  $\delta h$ .

Questa misura presenta per verità difficoltà anche maggiori di quelle che si incontrano nella misura di  $\delta l$ , perchè si tratta di grandezze ancora più piccole e che quindi, a parità di altre circostanze, non possono essere apprezzate se non con istrumenti di approssimazione ancor maggiore di quello descritto nel precedente paragrafo.

Per dare un'idea del modo con cui queste difficoltà possono superarsi descriveremo brevemente il dispositivo adottato per queste misure da Stromeyer.

In un telaio rigido  $ab$  (fig. 9) una traversa  $c$  è costretta, da un sistema di molle di richiamo non visibili in figura, a spostarsi parallelamente a se stessa accompagnando le variazioni delle dimensioni trasversali del saggio la cui sezione è rappresentata nell'area punteggiata  $F$ .

La traversa  $c$  porta in  $v$  un vetrino nero la cui superficie è vicinissima e quasi parallela ad una delle faccie di un prisma triangolare  $p$  fisso al telaio.

Se si fa attraversare il prisma da un fascio di raggi luminosi che segua presso a poco il cammino indicato in figura dalla

punteggiata, si producono dei fenomeni ben noti di interferenza, grazie ai quali il campo luminoso si presenta all'osservatore tutto solcato da flangie iridescenti.

E se invece di operare con luce bianca si usa una luce monocromatica si ottengono delle fascie alternativamente chiare ed oscure.

Ogniquale volta il vetrino nero si sposterà, insieme colla traversa, parallelamente a se stesso, l'osservatore vedrà le fascie spostarsi, esse pure parallelamente a se stesse, inseguendosi senza che si alterino le loro mutue distanze.

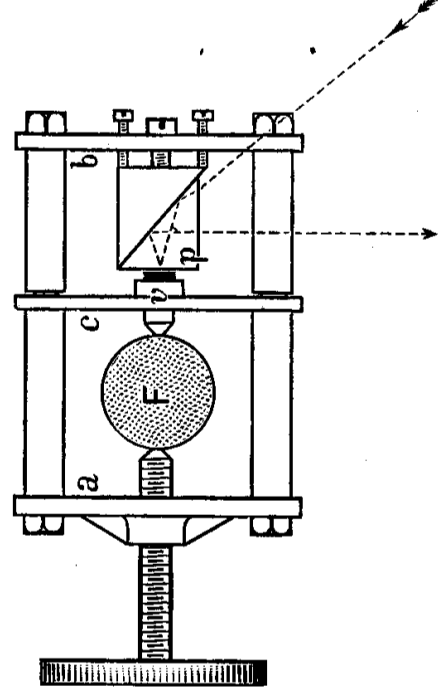


Fig. 9.

Scelto nel campo un qualsiasi punto fisso di riferimento, ciascun passaggio di flangia denoterà uno spostamento del vetrino rispetto al prisma eguale ad una semilunghezza d'onda.

Si possono adunque valutare le variazioni delle dimensioni trasversali della provetta contando le fascie nere che passano pel traguardo prescelto.

Per la luce gialla del sodio la semilunghezza d'onda equivale a 0,2944 millesimi di millimetro. Con un po' di pratica si riesce ad apprezzare con sicurezza un quarto di flangia, cioè  $\frac{1}{13587}$  di millimetro.

Furono d'altronde già usati (laboratorio Cavendish) dispositivi atti a misurare spostamenti anche assai piccoli delle flangie di interferenza. Shakespear è giunto così ad apprezzare lunghezze dell'ordine di grandezza del centomillesimo di millimetro.

\* \* \*

Un altro metodo per la determinazione del rapporto di contrazione laterale si presenta a chi prende in considerazione il coefficiente di dilatazione cubica.

Si ha infatti, applicando al caso presente la (49),

$$\theta = \frac{m-2}{m} \frac{\mathcal{N}}{EA}$$

Notiamo di passaggio che, comunque varii  $m$  entro i limiti imposti dalle (44) e (45), il rapporto  $\frac{m-2}{m}$  si mantiene sempre positivo: la dilatazione cubica si mantiene per conseguenza sempre dello stesso segno di  $\mathcal{N}$ : è una vera e propria dilatazione se il cilindro è teso; diventa invece una dilatazione negativa, cioè una contrazione di volume, se il cilindro è compresso.

Essa è costante in tutto il corpo: detto pertanto al solito  $V = Al$  il volume iniziale del cilindro la sua variazione totale risulta espressa da

$$\delta V = \frac{m-2}{m} \frac{\mathcal{N}V}{EA}$$

ovvero, per la (59), da

$$\delta V = \frac{m-2}{m} A \delta l$$

Di qui si ricava facilmente

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\delta V}{A \delta l} \right)$$

In questa formola lo sforzo  $\mathcal{N}$  non compare più esplicitamente: per tradurla in cifre basta, sopra un saggio di sezione nota, produrre una data variazione di lunghezza e misurare la corrispondente variazione di volume.

Ciò si può fare assai facilmente osservando la variazione di livello di un liquido nel quale il saggio si trovi immerso. A questo

procedimento aveva già ricorso il Cagniard de Latour nell'esperienza di cui noi abbiamo a suo tempo parlato [pag. 91], ma il dispositivo da lui adottato era affetto da una gravissima causa di errore: il filo su cui egli operava veniva infatti, allungandosi, ad emergere dal pelo libero del liquido e trascinava con sè, aderente alla sua superficie, una piccola porzione di liquido il cui volume non era affatto trascurabile a fronte della variazione di volume che si trattava di misurare.

Questo inconveniente si può eliminare facendo in modo che il filo sottoposto all'esperienza sia tutto contenuto nell'interno di un tubo il quale, durante l'esperienza stessa, resti completamente riempito dal liquido.

La fig. 10 rappresenta schematicamente la disposizione adottata a questo fine, or sono pochi anni, dal Cardani.

Un tubo verticale, che era lungo più di venti metri, portava all'estremità superiore una campana mobile *a*, ed entro ad essa una vite micrometrica *b* a cui veniva sospeso per un estremo il filo da sperimentare.

Questo, all'altro estremo, era teso da un nucleo di ferro dolce il quale poteva a volontà venir attratto da un altro nucleo dello stesso metallo incastrato nel fondo del tubo e magnetizzabile per influenza mediante un elettromagnete *c*.

Il Cardani incominciava col regolare la vite micrometrica in modo che i due nuclei di ferro dolce affacciati fossero separati da un dato intervallo, accuratamente misurato; collocata poi al suo posto la campana di chiusura e riempito il tutto di liquido, fino a che questo venisse ad affiorare in un apposito tubetto capillare *d*, egli, eccitando l'elettromagnete, costringeva il nucleo mobile a portarsi a contatto col nucleo fisso.

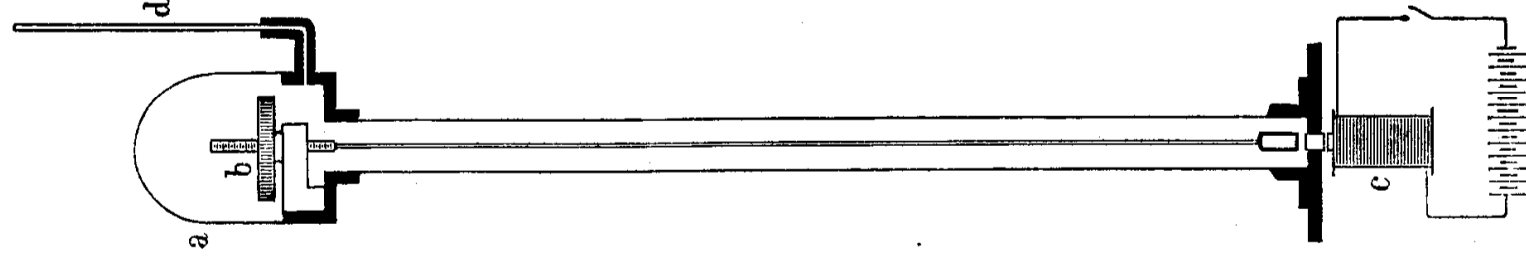


Fig. 10.



L'allungamento che a questo modo si veniva ad imprimere al filo era così perfettamente noto: tutto si riduceva pertanto a leggere, all'apertura o alla chiusura del circuito elettrico, lo spostamento del pelo libero del liquido nel tubetto  $d$ .

\* \* \*

Termineremo questi brevi cenni sulla più semplice di tutte le sollecitazioni calcolando il valore dell'energia potenziale elastica.

Si ha, dalla (50),

$$\varphi = \frac{E}{2} \left( \frac{\mathcal{N}}{EA} \right)^2 = \frac{\mathcal{N}^2}{2EA^2}$$

Questo valore è costante in tutto lo spazio occupato dal corpo: perciò

$$\Phi = \int_V \varphi dV = \varphi A l = \frac{\mathcal{N}^2 l}{2EA}$$

Osserviamo che questo valore dell'energia elastica del cilindro deformato coincide identicamente col valore

$$\frac{1}{2} \mathcal{N} \delta l$$

voluto dal teorema di Clapeyron [form. (20) e (21)].

---