

L'eventuale singolarità del sistema — vale a dire la sua suscettibilità di subire spostamenti rigidi delle sue varie parti malgrado l'esistenza del numero dovuto di vincoli — verrebbe in questo caso segnalata dall'annullarsi dell'anzidetta componente verticale, vale a dire dal cadere il punto W sulla verticale condotta per D''' .

* * *

E veniamo finalmente alla terza domanda, a quella cioè relativa al calcolo delle reazioni di vincolo.

Nessun dubbio che queste reazioni si posson trovare mediante l'applicazione pura e semplice delle leggi dell'equilibrio dei sistemi rigidi, tutte le volte che la risposta favorevole alla seconda domanda ci assicura che il problema statico ammette una soluzione unica e ben determinata.

È bensì vero che l'applicazione di quelle leggi — sia che la si voglia far graficamente attraverso ripetute composizioni e decomposizioni di forze, sia che si preferisca effettuarla analiticamente colla risoluzione di opportuni sistemi di equazioni, esprimenti l'annullarsi delle somme di certe componenti o di certi momenti delle forze stesse — non tarda a divenir praticamente complicata, ed a richiedere l'uso di particolari accorgimenti, diversi da caso a caso, non appena il sistema dato è composto di più che due travi.

Per rendersene conto, il lettore non ha che da ritornar col pensiero al caso rappresentato nella figura 99, e proporsi la ricerca delle reazioni, non nel caso semplice in cui le forze esterne son tutte applicate ad una sola delle travi (fig. 101) o a due travi attigue, per esempio alle due centrali — nella quale ipotesi la soluzione del problema si troverebbe ancora facilmente, applicando il procedimento del poligono funicolare passante per tre punti dati, come già si è fatto in figura 95 — ma nel caso generale in cui tutte e quattro le travi sono caricate.

Complicazioni anche maggiori il lettore troverà se tenterà, coi soliti procedimenti elementari, lo studio delle condizioni statiche di sistemi di travi del tipo di quello già considerato in figura 100, per condizioni generiche di carico.

Ma ogni complicazione scompare se si ricorre al teorema dei lavori virtuali: se si immagina cioè soppresso idealmente uno dei vincoli, introdotta in sua vece la corrispondente reazione incognita, e si scrive poi che, per qualunque spostamento compatibile coi vincoli conservati, deve essere nullo il lavoro compiuto dalle forze applicate e dalla reazione del vincolo soppresso ⁽¹⁾.

Ora è facile riconoscere l'identità sostanziale tra questo procedimento e quello a cui si arriverebbe applicando le regole generali che per tutti i sistemi elastici indistintamente abbiamo stabilito nella Parte Terza di questo nostro volume.

In virtù, infatti, del secondo principio di reciprocità la linea di influenza della reazione di un vincolo si può sempre ottenere immaginando praticato un taglio in corrispondenza della superficie di contatto tra il sistema vincolato ed il corpo od i corpi che ad esso creano il vincolo, ed impressa alle due faccie del taglio una traslazione relativa di grandezza unitaria nella direzione secondo cui si intende misurar la reazione [cfr. pag. 307].

Nel caso particolare di cui ci stiamo occupando, dei sistemi cioè staticamente determinati, una semplificazione importantissima è da prevedersi.

Operare infatti un taglio come quello descritto equivale evidentemente a liberare il sistema dal vincolo di cui si cerca la reazione.

Ora, se inizialmente il sistema era staticamente determinato, cioè possedeva quel numero di vincoli che è strettamente indispensabile per definire la sua posizione, operato il taglio esso deve necessariamente venire a trovarsi con un numero di vincoli insufficiente.

Si rendono così possibili quei certi moti rigidi delle varie sue parti che noi abbiamo anche già imparato a studiare.

Attraverso questi moti rigidi la voluta traslazione relativa unitaria delle due faccie del taglio dovrà, in generale, potersi realizzare senza che ne nasca una distorsione elastica propriamente detta: dovrà cioè potersi realizzare restando nell'ambito delle distorsioni degeneri di cui abbiamo incidentalmente avvertita la possibilità a pag. 303.

⁽¹⁾ Cfr. *I fondamenti della Statica*, a pag. 234.

In ogni caso, assumere la solita espressione del tipo

$$P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 \eta_3 + \dots$$

come misura del valore della reazione (o della componente della reazione) determinata da una generica condizione di carico, equivale evidentemente a calcolare il lavoro che le forze

$$P_1, P_2, P_3, \dots$$

applicate al sistema dato, farebbero allorquando i loro punti di applicazione subissero nelle lor direzioni gli spostamenti

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots$$

caratteristici della considerata variazione di configurazione compatibile coi vincoli conservati, e ad eguagliare tale lavoro al contemporaneo lavoro della reazione (o della componente della reazione) il cui punto di applicazione si sposta per ipotesi proprio dell'unità di lunghezza nella sua stessa direzione.

Sia dunque che si applichino le regole generali per la costruzione delle linee d'influenza, sia che si ragioni in base al

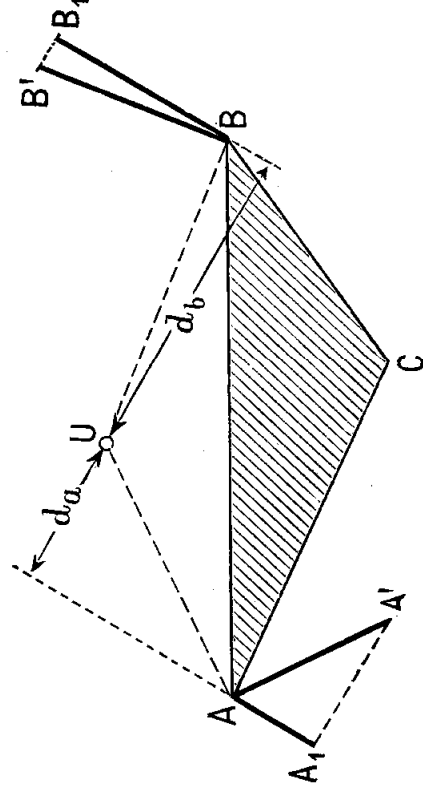


Fig. 105.

principio dei lavori virtuali, il problema della determinazione del valore di una reazione per una qualsiasi condizione di carico si viene, in generale, a ridurre alla determinazione degli spostamenti piccolissimi che i punti di applicazione delle varie forze

esterne subirebbero, nelle direzioni delle forze stesse, in un sistema di moti rigidi elementari reso possibile dalla soppressione di un vincolo.

Ora è facile dimostrare che il diagramma degli spostamenti piccolissimi dei vari punti di un sistema rigido in una direzione data, e del resto qualunque, è sempre un diagramma lineare.

Consideriamo infatti un sistema rigido piano ABC (fig. 105); dire che esso subisce una rotazione elementare attorno ad un centro istantaneo U equivale a dire che i singoli suoi punti A, B, \dots subiscono degli spostamenti AA', BB', \dots diretti normalmente ai raggi $UA, UB \dots$ e di grandezze proporzionali alle lunghezze di quei raggi

$$\frac{AA'}{UA} = \frac{BB'}{UB} = \dots$$

Ma dette AA_1, BB_1, \dots le proiezioni degli spostamenti $AA', BB' \dots$ su di una direzione arbitraria, e d_A, d_B, \dots le proiezioni dei raggi UA, UB, \dots sulla normale alla detta direzione — vale a dire le distanze misurate normalmente ad essa — si ha dalla figura

$$\frac{AA'}{UA} = \frac{AA_1}{d_A}$$

$$\frac{BB'}{UB} = \frac{BB_1}{d_B}$$

• • • • •

Per conseguenza

$$\frac{AA_1}{d_A} = \frac{BB_1}{d_B} = \dots$$

In pratica, noi non rappresenteremo mai gli spostamenti con dei vettori applicati ai punti cui essi si riferiscono, ma con dei vettori equipollenti uscenti tutti da una medesima origine O (fig. 106); quando poi si tratterà di rappresentare soltanto le componenti di detti spostamenti secondo una data direzione, ci serviremo di un diagramma le cui ordinate altro non saranno che le proiezioni di quei vettori sulle parallele alla direzione prescelta condotte per i punti cui essi si riferiscono.

Orbene, da ciò che si è testè dimostrato, discende che, noti gli spostamenti A_0A_1 e B_0B_1 che secondo tal direzione subiscono due punti qualsiasi A e B , la componente C_0C_1 dello spostamento di un altro punto qualunque C secondo la parallela condotta per C stesso alla detta direzione è data dal segmento che su tale parallela viene intercetto dalle due congiungenti A_0B_0 ed A_1B_1 .

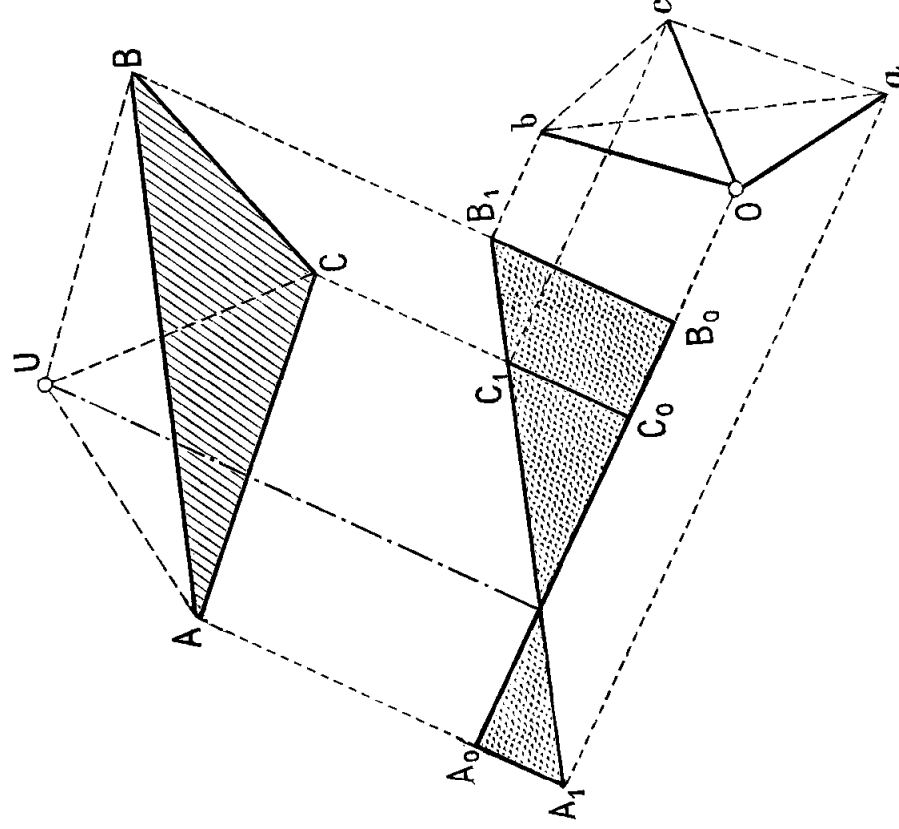


Fig. 106.

Il diagramma ha ordinata nulla sulla parallela condotta alla solita direzione per il centro di istantanea rotazione U ; i punti che si trovano su tale parallela subiscono infatti, nel moto rigido considerato, degli spostamenti che possono essere più o meno grandi a seconda della loro distanza da U , ma che sono certamente tutti diretti perpendicolarmente alla direzione considerata.

Ne concluderemo pertanto che *le linee d'influenza delle reazioni dei vincoli in un sistema staticamente determinato sono delle*

spezzate, composte di tanti segmenti rettilinei quante sono le travi di cui il sistema è costituito; ciascuno dei quali segmenti interseca la fondamentale di riferimento nel punto stesso in cui su di essa si proietta il relativo centro istantaneo di rotazione.

* * *

Veniamo ora alle applicazioni, incominciando dal caso più semplice, cioè dalla trave vincolata in A da una cerniera ed in C da un semplice appoggio, nel modo già descritto a proposito delle figure 82 ed 83. E chiediamoci per esempio la linea d'influenza della reazione V_C per forze aventi una direzione data, e del resto qualunque, per esempio la direzione stessa della R di figura 85.

Praticato il solito taglio in corrispondenza dell'appoggio C , per esempio attraverso l'asta di collegamento che nella figura 83 realizza questo appoggio, il sistema diviene, come ben sappiamo, libero di ruotare attorno ad A .

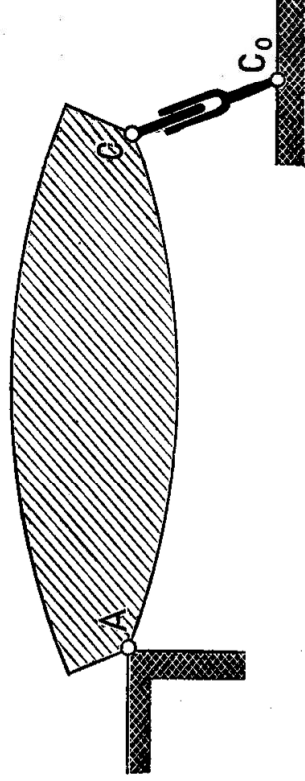


Fig. 107.

In realtà noi vogliamo approfittare di questa libertà di movimento solo per imprimere alle due faccie del taglio uno spostamento relativo nella direzione CC_0 .

Si può, in certo qual modo, materializzare il nostro concetto, e tradurre meccanicamente l'operazione che intendiamo fare, coll'interporre tra le due faccie del taglio un apparecchio come quello schematicamente rappresentato tra C e C_0 nella figura 107.

Il lettore immagini che una delle parti dell'asta CC_0 , per esempio quella che fa capo a C , finisca con uno stantuffo mobile entro un corpo cilindrico portato dall'altra porzione di asta che fa capo al punto fisso C_0 .

Oppure immagini, se meglio gli piace, che la prima parte dell'asta termini con un gambo filettato, impegnato entro una madrevite girevole portata dall'altra porzione di asta.

In realtà gli artifici meccanici con cui si può pensar di imporre, e nel tempo stesso di misurare, lo spostamento relativo

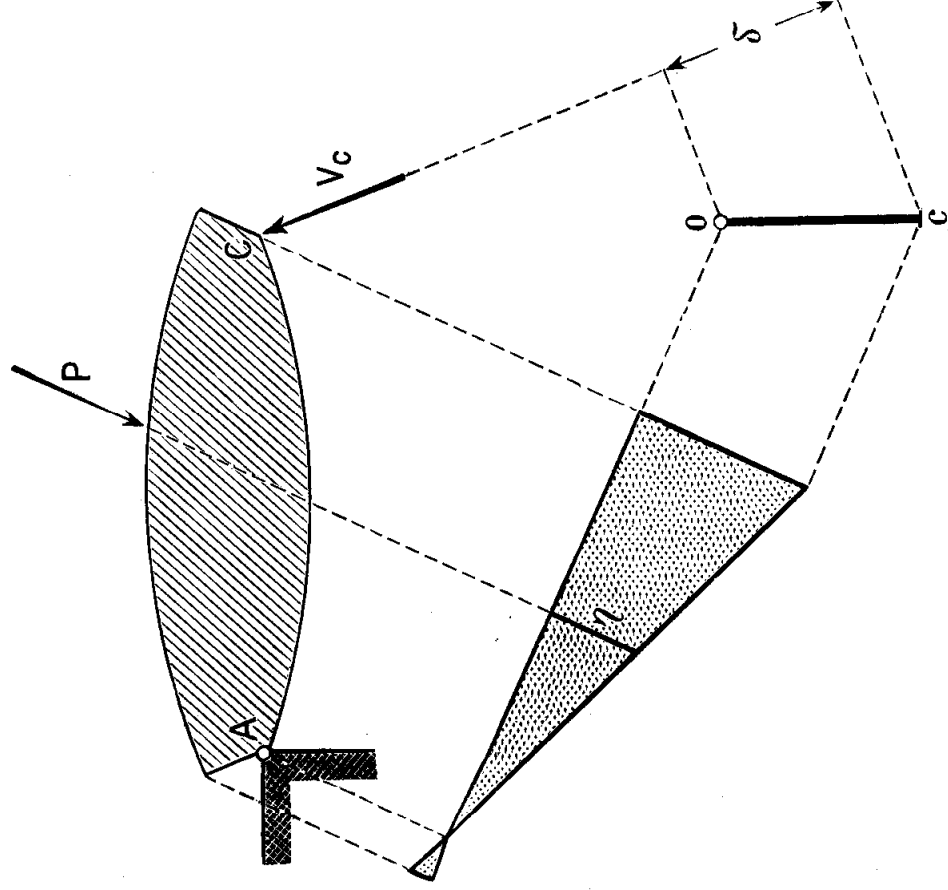


Fig. 108.

delle due faccie del taglio, possono, come si vede, esser diversissimi: a noi non importa affatto di precisarne qui la natura, visto che non hanno altro scopo che quello di fissar le nostre idee su di un modello meccanico, rendendo più intuitivo il nostro ragionamento.

Sia OC , perpendicolare ad AC (fig. 108), il segmento che in una certa scala rappresenta lo spostamento elementare di C .

Basta proiettarlo sulla stessa scala, rappresenta lo spostamento δ che, nella stessa scala, rappresenta lo spostamento

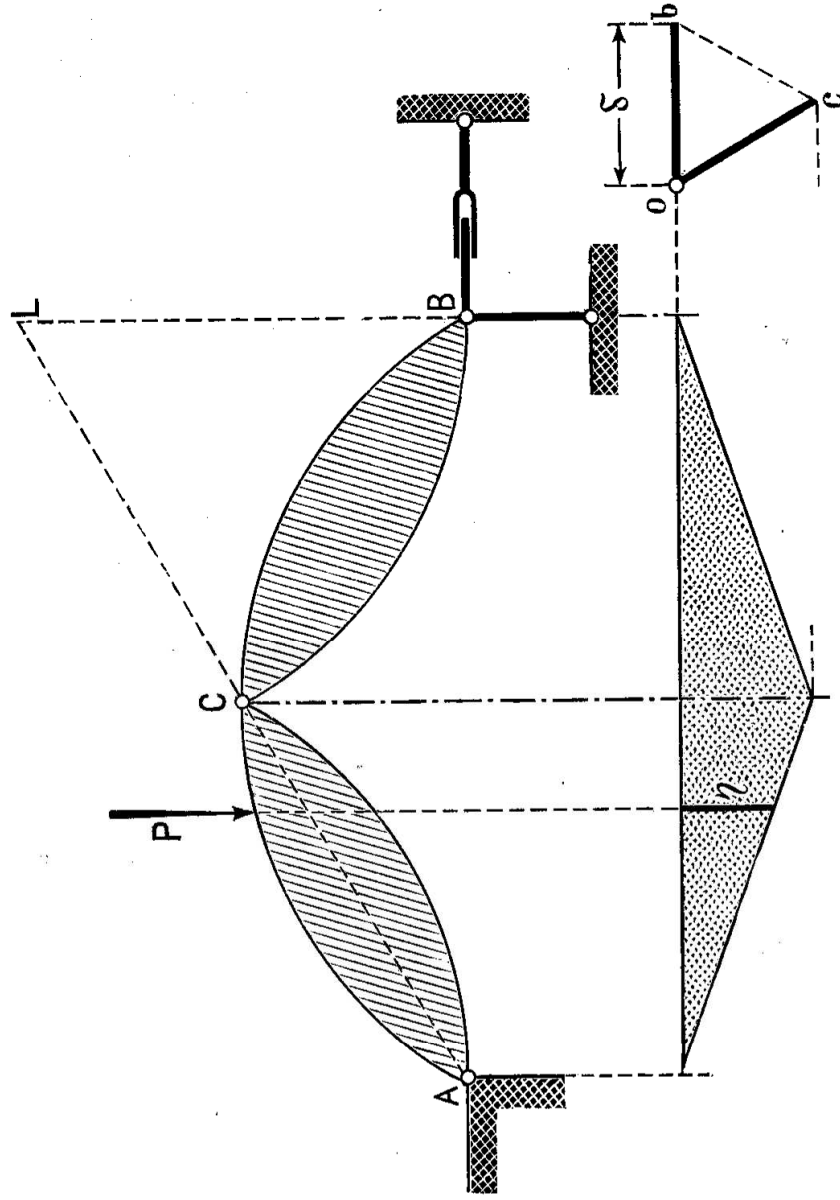


Fig. 109.

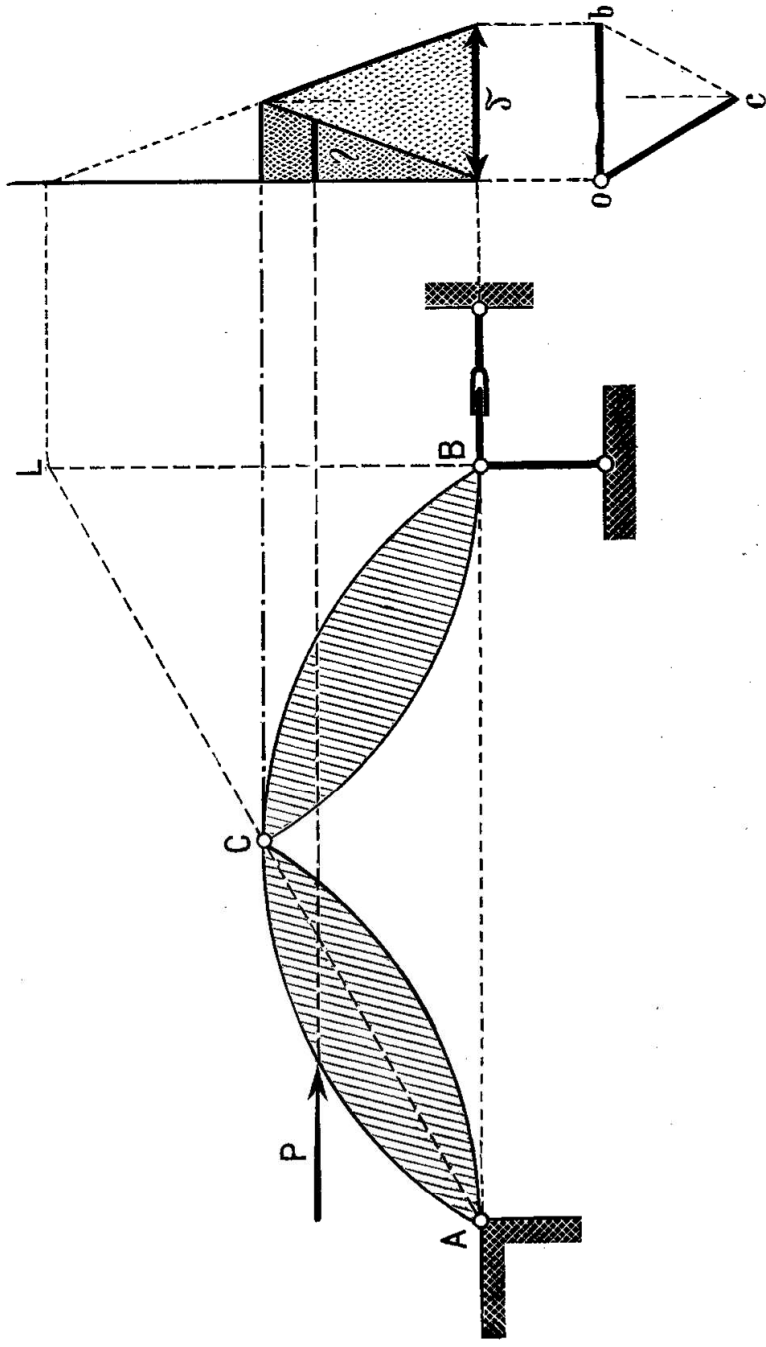


Fig. 110.

relativo delle due faccie del taglio: quello cioè che noi conveniamo di assumere come unità di misura.

Se invece si proietta lo stesso Oc sulla parallela condotta per C alla direzione delle forze applicate, si ottiene un'ordinata della linea d'influenza cercata.

Con ciò essa è già completamente determinata. Basta tener conto che essa dev'essere costituita da un unico segmento di retta (poichè il sistema considerato consta di un'unica trave), e che la sua ordinata deve annullarsi sulla parallela alla solita direzione condotta per A .

L'ordinata generica η di una tal linea d'influenza, letta assumendo δ come unità di misura, ci darà il valore della reazione V_c dovuta ad una forza P di grandezza unitaria.

Per P qualunque, e supposto che si trovi preferibile leggere tanto η che δ in una scala arbitraria, per esempio in vera grandezza quali appaiono in disegno, si avrà

$$V_c = P \frac{\eta}{\delta}$$

Passiamo ora al caso dell'arco a tre cerniere, e chiediamoci per esempio la linea d'influenza, per forze verticali, della componente orizzontale della reazione in B .

Immaginiamo, per ottenerla, sostituita la cerniera B con due appoggi semplici, l'uno orizzontale, l'altro verticale; e, praticato il solito taglio in corrispondenza del primo, pensiamovi applicato il solito apparecchio.

Indicato con Ob lo spostamento orizzontale di B , e dedotte, colle regole note, lo spostamento Oc della cerniera C (fig. 109) si proietterà questo sulla verticale per C e si otterrà così un'ordinata della linea d'influenza cercata.

Ma essa deve avere ordinata nulla tanto sulla verticale per A (che non si muove) come su quella per B (che per ipotesi si muove soltanto orizzontalmente). Inoltre deve essere composta di due segmenti rettilinei. Essa è dunque completamente determinata.

Il procedimento indicato è assolutamente generale.

Nello stesso modo con cui si è ricavata la linea d'influenza

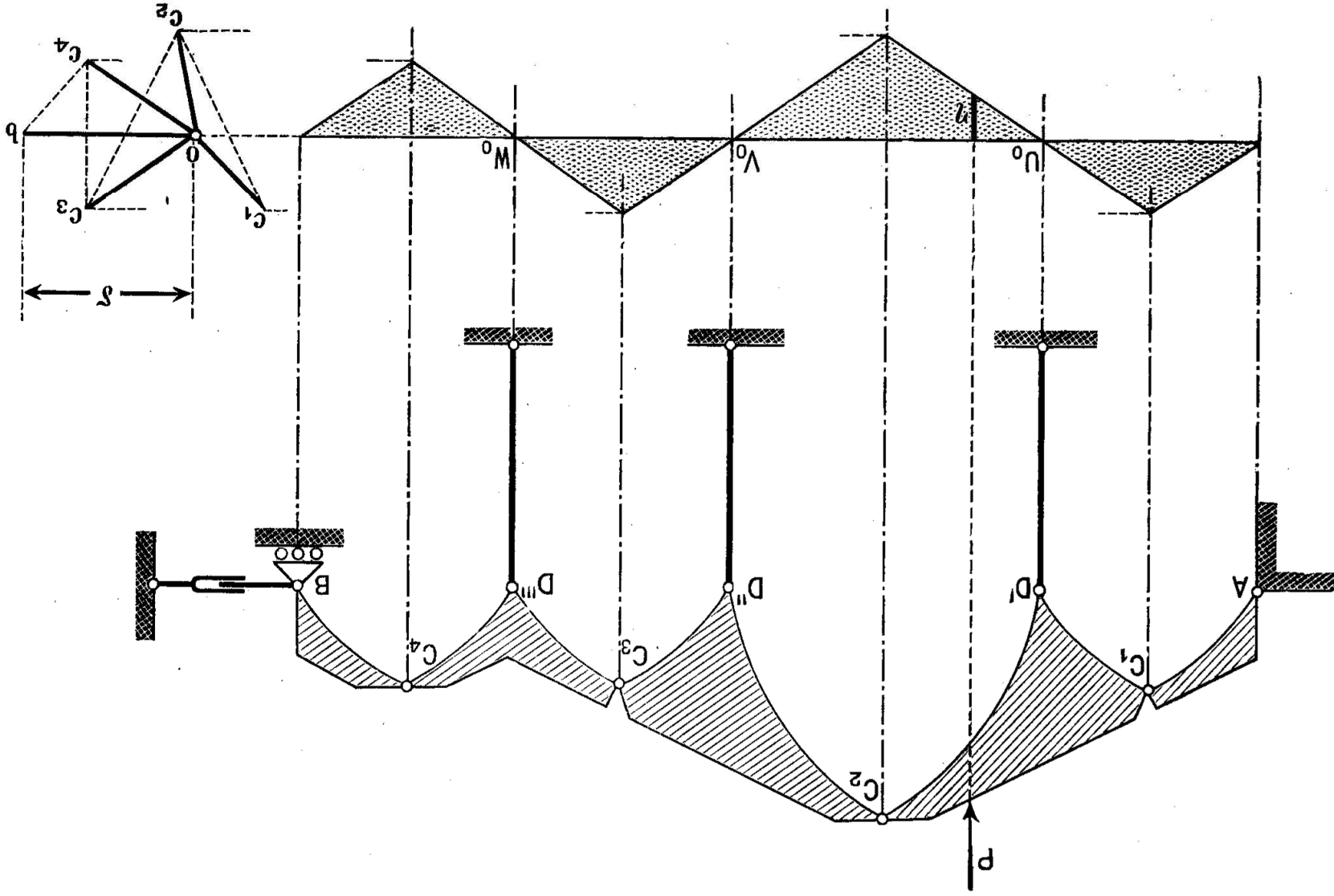


Fig. 111.

per carichi verticali si sarebbe potuta ricavare quella per carichi aventi un'altra direzione qualunque.

Volendo, per esempio, la linea d'influenza per forze orizzontali, si proietteranno i punti O , c , b rispettivamente sulle orizzontali di A , di C e di B (fig. 110). La bilatera così determinata, riferita alla verticale per O , sarà la linea d'influenza cercata.

È poi chiaro che essa, insieme colla linea d'influenza precedentemente trovata per i carichi verticali, risolve appieno il problema della determinazione della componente orizzontale della reazione della cerniera situata in B per carichi comunque disposti e comunque diretti.

Data infatti una forza qualunque, la si potrà evidentemente sempre considerare come la risultante di una forza verticale e di una orizzontale. E moltiplicando le intensità di queste due componenti per le rispettive ordinate delle due linee d'influenza, riferite alla solita unità di misura, e sommando i risultati, si avrà la grandezza della reazione orizzontale cercata.

* * *

Per venire al caso più generale, per esempio al caso del sistema rappresentato nella figura 100, ben poco ci resta a dire di nuovo.

I diagrammi degli spostamenti occorrenti per il tracciamento delle linee d'influenza sono infatti quelli stessi che ci hanno servito per l'accertamento della efficienza dei vincoli.

Dal primo di questi diagrammi (fig. 102) si è nella figura 111 dedotta la linea d'influenza per carichi verticali della componente orizzontale della reazione della cerniera B .

Dall'altro (fig. 104) si è dedotta nella figura 112 la linea d'influenza, sempre per carichi verticali, della reazione dell'appoggio D ".

In entrambe le figure è stata indicata colla solita lettera δ l'unità di misura.

Vale pertanto sempre la formola

$$V = P \frac{\eta}{\delta}$$

APPLICAZIONE — TAVOLA XXI.

Studio di una travata metallica, tipo Gerber, per ponte ferroviario a tre luci.

Si chiamano col nome del costruttore Gerber di Norimberga certe combinazioni, da lui adottate, di travi, fra loro collegate mediante cerniere, per modo che alcune di esse funzionano agli effetti statici come semplicemente appoggiate agli estremi, altre come mensole: il tutto essendo in ogni caso staticamente determinato.

Per quanto questo tipo di costruzione abbia trovato le sue migliori applicazioni nel caso di travate reticolari di grande portata — basta accennare al colossale ponte di Forth ad Edimburgo, ed a quello, notissimo, di Cernavoda sul Danubio — noi ne faremo qui cenno riferendoci ad un esempio di modeste proporzioni.

Si tratta di una travata a parete piena della complessiva lunghezza di metri 64 ma costituita in realtà da tre travi distinte: ciascuna delle due travi laterali ha 24 metri di lunghezza, ed appoggia su di una spalla e sulla pila adiacente, distante dalla spalla di soli 18 metri: essa si protende perciò per ben 6 metri a mensola sulla campata intermedia di 28 metri di luce: sulle due mensole affacciate poggia colle sue estremità la trave centrale di soli 16 metri di lunghezza.

Nella nostra figura, immediatamente sotto il disegno della trave eseguito in scala 1 : 400, il lettore troverà, prima di tutto, le due linee d'influenza delle reazioni della spalla e della pila sinistra: la simmetria della costruzione rende superfluo il tracciamento delle altre due.

Abbiamo poi voluto approfittar dell'occasione per procedere al tracciamento anche di alcune linee d'influenza di deformazioni, e per indicarne l'impiego.

A tal fine abbiamo immaginato applicato un carico concentrato, prima nel punto di mezzo della prima campata, poi nel punto di mezzo della seconda: abbiamo rilevati, sulle linee d'influenza già costruite, i valori delle diverse reazioni: abbiamo tracciati i relativi diagrammi dei momenti flettenti: e finalmente

ne abbiamo dedotte le deformate dell'asse geometrico della trave (ordinate al vero per 100 tonnellate di carico).

Nella prima ipotesi di carico la sola prima campata viene deformata: nella seconda campata si verificano soltanto dei moti rigidi: la trave laterale di destra resta immobile.

Nella seconda ipotesi di carico invece tutte e tre le travi vengono inflesse.

Nell'un caso come nell'altro le deformate costruite si possono interpretare come linee d'influenza degli spostamenti verticali di punti determinati: e precisamente, la prima deformata ci darà la misura dell'abbassamento del punto di mezzo della campata laterale sinistra per un carico di 100 tonnellate, agente secondo una verticale qualunque; la seconda deformata ci darà colle sue ordinate l'analogo abbassamento del punto di mezzo della campata centrale.

Si supponga ora che, in occasione per esempio di una prova di collaudo del ponte, una locomotiva si venga a trovare sulla trave centrale nella posizione indicata nell'ultima figura della Tavola, vale a dire col suo primo asse in corrispondenza della cerniera sinistra.

Supposto, per fissare le idee, che la locomotiva adottata corrisponda alle norme del regolamento italiano del 1909 — il quale prevede 5 assi da 15 tonnellate ciascuno ad intervalli di metri 1,40 seguiti a 4 metri di distanza da altri 3 assi da 13 tonnellate ad intervalli di metri 1,80 — non si avrà che da leggere sull'una e sull'altra linea d'influenza le ordinate sulle verticali dei 5 assi della locomotiva e dei 3 assi del tender, e sommare le prime moltiplicate per $\frac{15}{100}$ colle seconde moltiplicate per $\frac{13}{100}$: si otterrà la misura dell'abbassamento che quella locomotiva deve determinare in mezzeria della campata centrale (nel caso concreto cm. 2,69), nonchè quella dell'innalzamento che deve simultaneamente verificarsi in mezzeria della campata laterale sinistra (cm. 1,08).

La concordanza o meno di questi risultati cogli elementi sperimentali che il collaudo ci darà occasione di rilevare direttamente, costituirà un elemento essenziale di giudizio per apprezzare la bontà della costruzione e più che tutto la corrispondenza del suo comportamento effettivo coi calcoli eseguiti nel progettaria.

TAVOLA XXI

(pag. 398).

Studio di una travata metallica tipo Gerber per ponte ferroviario
a tre luci.

