

Sistemi staticamente determinati.

Nel precedente capitolo noi abbiamo definito col nome di *incastro* quel particolare tipo di vincolo che, applicato ad una trave, o più precisamente ad una sua sezione retta, impedisce ogni qualsiasi movimento della sezione stessa, sviluppando una reazione capace di equilibrare in ogni caso la sollecitazione esterna.

La sezione incastrata è dunque da considerarsi come resa, per effetto del vincolo ad essa imposto, assolutamente fissa nello spazio.

Quanto alle altre sezioni della trave è chiaro che potranno subire tutti quegli spostamenti e tutte quelle deformazioni — per ipotesi piccolissime — che possono derivare dalla deformabilità elastica del materiale di cui la trave è costituita. Ma nessuno spostamento d'assieme, cioè nessun moto rigido, è più consentito alla trave quando sussiste un tale vincolo.

In questo senso diremo che l'esistenza di un incastro determina, a meno delle deformazioni elastiche, la posizione della trave nello spazio.

* * *

Gli altri due tipi di vincolo, invece, da noi definiti e descritti sotto i nomi di *cerniera* e di *appoggio semplice*, ammettono per definizione che la sezione cui sono applicati (e per conseguenza anche la trave cui la sezione appartiene) possano compatibilmente col vincolo subire delle rotazioni, o delle rotazioni e delle traslazioni insieme.

Ne segue che, per rendere fissa una trave — fissa, s'intende, sempre nel senso sopra indicato, vale a dire a meno delle deformazioni elastiche — di tali vincoli ne occorre più d'uno.

Fermiamoci al caso dei sistemi piani. Noi dimostreremo subito che l'incastro può, agli effetti sopra indicati, essere

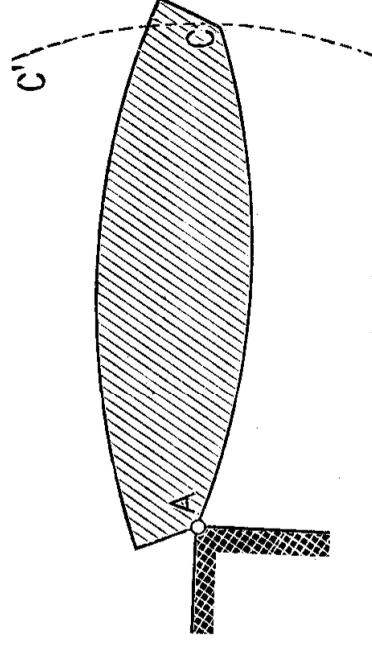


Fig. 81.

sostituito tanto da una combinazione di una cerniera con un appoggio semplice, come dalla combinazione di tre semplici appoggi.

Consideriamo infatti in un piano una trave AC (fig. 81) vincolata in A da una cerniera.

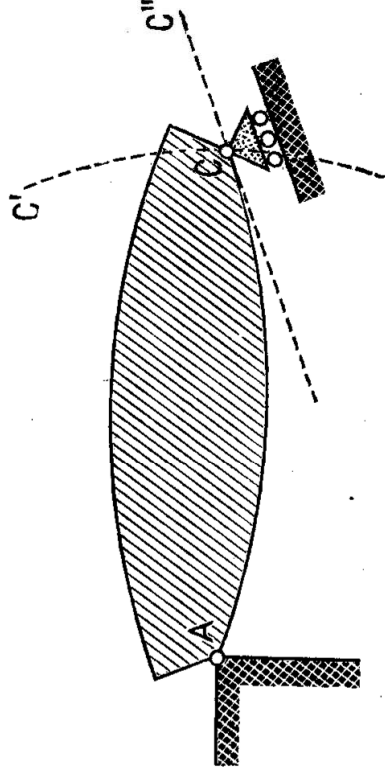


Fig. 82.

Ogni punto come C descriverà nel moto rigido di rotazione che la cerniera consente, un arco di circonferenza CC'' avente in A il suo centro e per raggio la distanza AC .

Tale moto di rotazione si può evidentemente impedire vincolando ulteriormente la trave in C mediante un appoggio semplice: questo potrà realizzarsi mediante un carrello (fig. 82) che a C consenta soltanto di muoversi lungo una retta CC'' ,

ovvero mediante un'asta CC_0 articolata a cerniera agli estremi (fig. 83) la quale impegni C a mantenersi sopra una circonferenza CC''' .

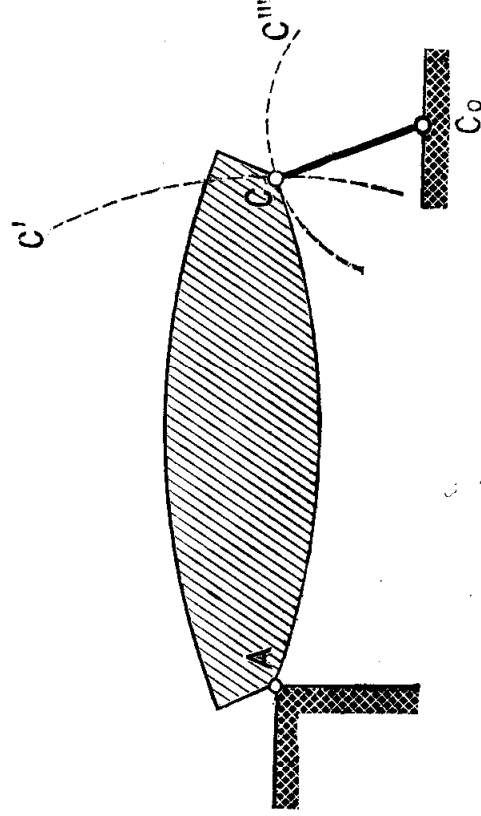


Fig. 83.

Basta che la nuova traiettoria, retta o curva che sia, cui C viene vincolato, non abbia in comune colla CC' che il solo

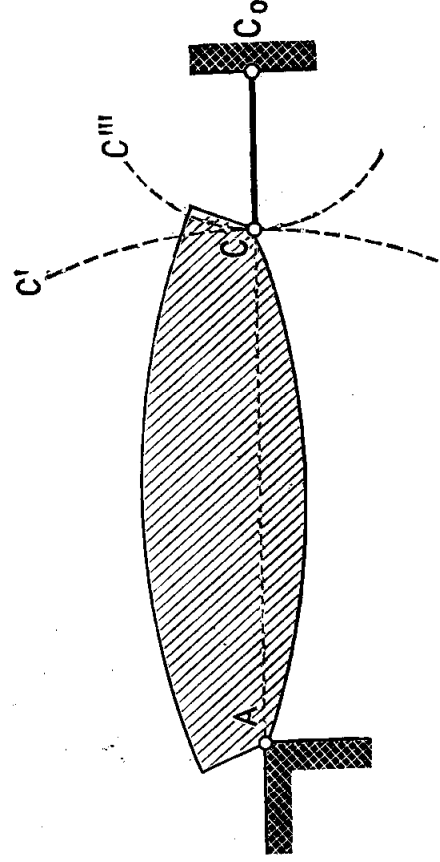


Fig. 84.

punto C (almeno nelle immediate vicinanze di C): basta in altre parole che essa non sia tangente a CC' , poichè se così fosse (fig. 84) un movimento, sia pur piccolissimo, di C in direzione perpendicolare alla congiungente ACC_0 con conseguente rotazione, sia pur piccolissima, della trave AC attorno ad A , continuerebbe ad essere possibile.

Ogni ulteriore vincolo sarebbe evidentemente sovrabbondante. Lasciamo infatti per un momento da parte le considerazioni cinematiche di cui ci siamo serviti fin qui, e riferiamoci alla statica dei sistemi rigidi, visto che delle eventuali deformazioni elastiche abbiamo esplicitamente convenuto di non occuparci per ora.

Ne trarremo subito conferma del fatto che i due vincoli imposti alla trave in A ed in C (figg. 82 e 83) sono atti a sviluppare delle reazioni capaci di fare in ogni caso equilibrio a qualunque sistema di forze esterne applicate alla trave.

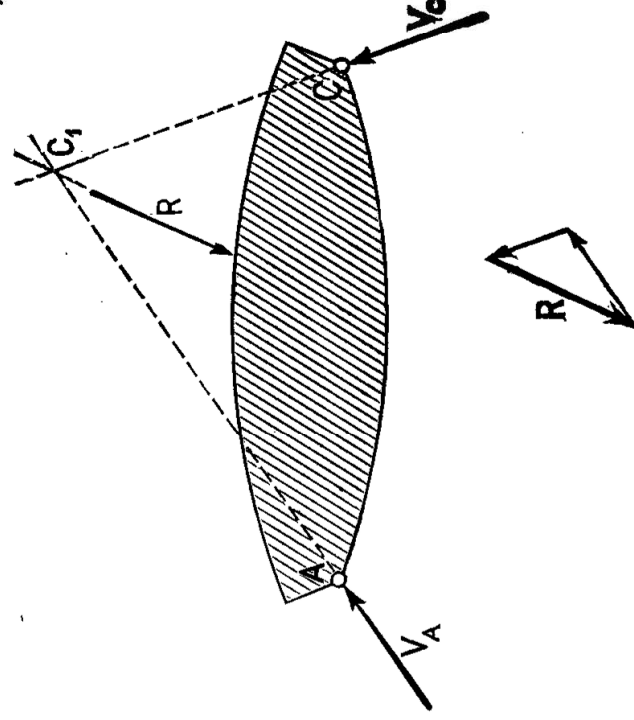


Fig. 85.

La reazione della cerniera può infatti assumere grandezza e direzione arbitrarie: di essa si sa solo che deve passare per A .

Quanto alla reazione dell'appoggio, è noto che essa deve non solo passare per C ma essere normale alla traiettoria che l'appoggio consente; la sua linea d'azione è dunque data: resta indeterminata solo la sua grandezza.

D'altra parte, tenuto conto della supposta rigidità della trave, il sistema delle forze esterne si può sempre a tutti gli effetti immaginar sostituito dalla sua risultante che indichiamo con R .

Basta pertanto scomporre questa R in due componenti, di cui una avente per linea d'azione la linea d'azione nota della reazione dell'appoggio, l'altra passante per il punto d'applicazione pure noto della reazione della cerniera, e mutar poi di segno queste due componenti, per avere senz'altro in grandezza e posizione le due reazioni V_C e V_A (fig. 85).

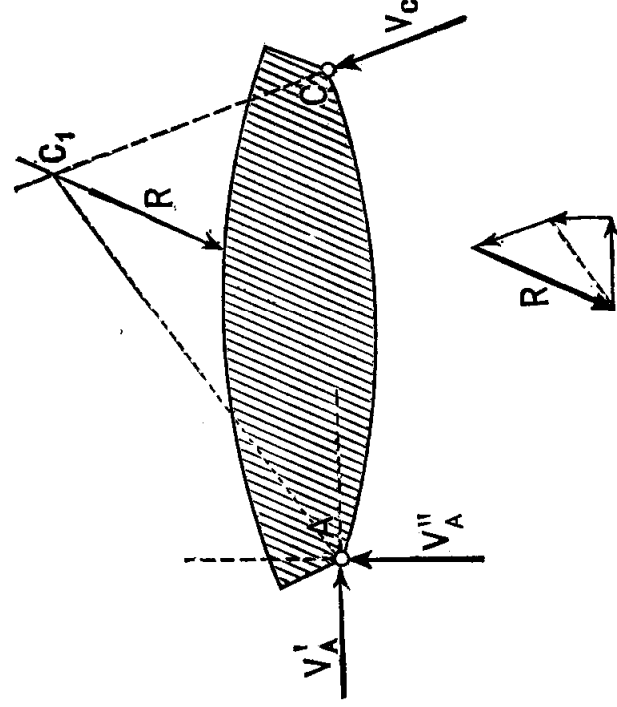


Fig. 86.

Ed è noto che la soluzione del problema è unica e ben determinata, e che i valori delle reazioni che così si ottengono sono finiti, eccezion fatta soltanto per caso già contemplato nella figura 84, nel quale caso il fatto stesso che la soluzione cade in difetto ci avverte della inettitudine dei vincoli prescelti a compiere il loro ufficio.

Occorre appena avvertire che invece di assumere come incognite del problema statico le grandezze delle due reazioni V_A e V_C e la direzione di una di queste, V_A , si può, se lo si preferisce, adottare come incognite le tre grandezze di tre reazioni le cui linee d'azione siano tutte note.

Basta sostituire idealmente alla V_A le sue due componenti V_A' e V_A'' secondo due direzioni arbitrariamente scelte (fig. 86).

Il problema si riduce allora alla decomposizione della R in tre componenti agenti secondo tre linee d'azione date, complanari e non concorrenti in un punto.

La costruzione grafica da adottarsi non differirà neppure dalla precedente. Nell'un caso come nell'altro si deve sempre incominciare col determinare il punto C_1 in cui la linea d'azione della risultante R è incontrata dalla linea d'azione di una delle reazioni, per esempio della V_C ; poi si decompone la R secondo

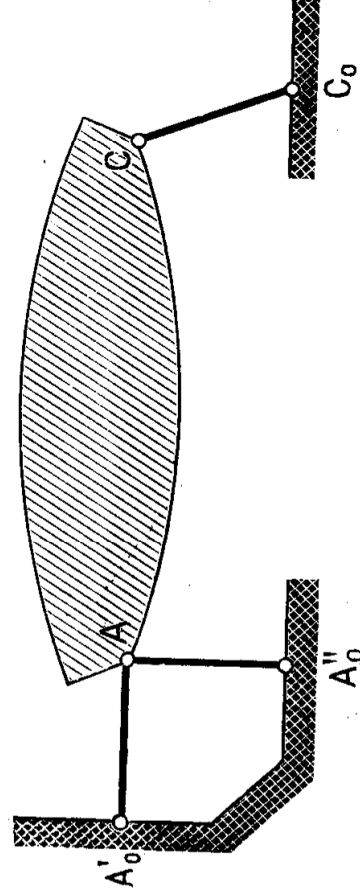


Fig. 87.

questa linea d'azione e secondo la congiungente di C_1 col punto A per cui deve passare la reazione V_A ed in cui quindi conviene supporre concorrano le sue due componenti V_A' e V_A'' : le quali si potranno quindi sempre ottenere, segno a parte, mediante una ulteriore decomposizione della componente passante per A .

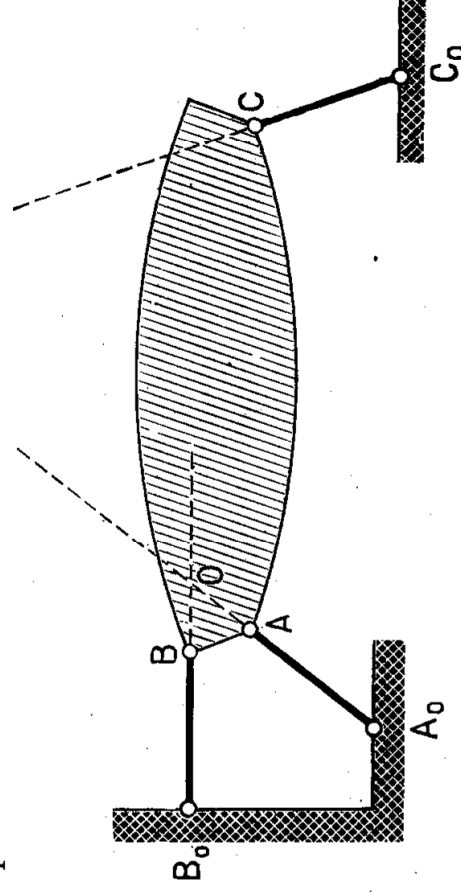


Fig. 88.

Non avremmo neppure insistito sulla variante, per se stessa insignificante, se non ci fosse parso questo un modo singolarmente intuitivo di mettere in evidenza la sostituibilità della cerniera con due appoggi semplici.

Le due forze V_A' e V_A'' non sono infatti soltanto le componenti della reazione V_A secondo le due direzioni prescelte, ma sono alla loro volta delle vere e proprie reazioni le quali assumerebbero una reale esistenza qualora alla cerniera A si sostituisse una combinazione di due appoggi semplici opportunamente orientati (fig. 87).

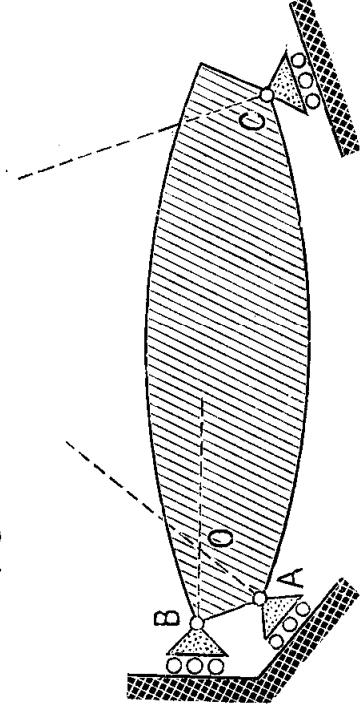


Fig. 89.

Si è così condotti ad ammettere che la posizione della solita trave nel piano possa venir definita anche mediante tre semplici appoggi disposti in posizione generica come nelle figure 88 e 89.

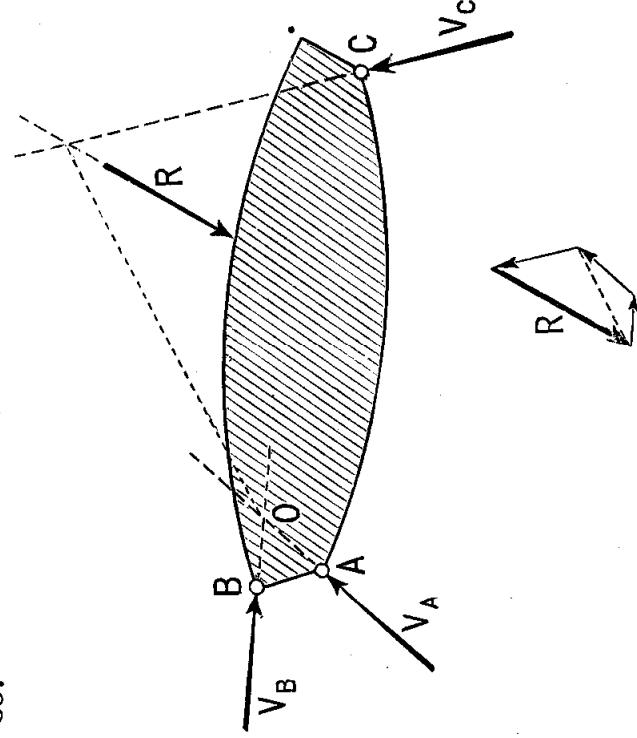


Fig. 90.

E, in verità, se si applica in questi casi il procedimento sopra indicato, le tre reazioni V_A , V_B , V_C risultano completamente determinate (fig. 90), due qualunque di esse, per esempio V_A

e V_B , potendosi sempre considerare come le componenti secondo direzioni date della reazione di una *cerniera ideale* situata nel punto d'incontro O delle lor linee d'azione.

Basta d'altronde ritornar collo sguardo alle due figure precedenti (88 ed 89) ed immaginar la trave momentaneamente liberata dal terzo appoggio C , e considerare il movimento di cui in questa ipotesi essa diviene suscettibile, ed osservare che

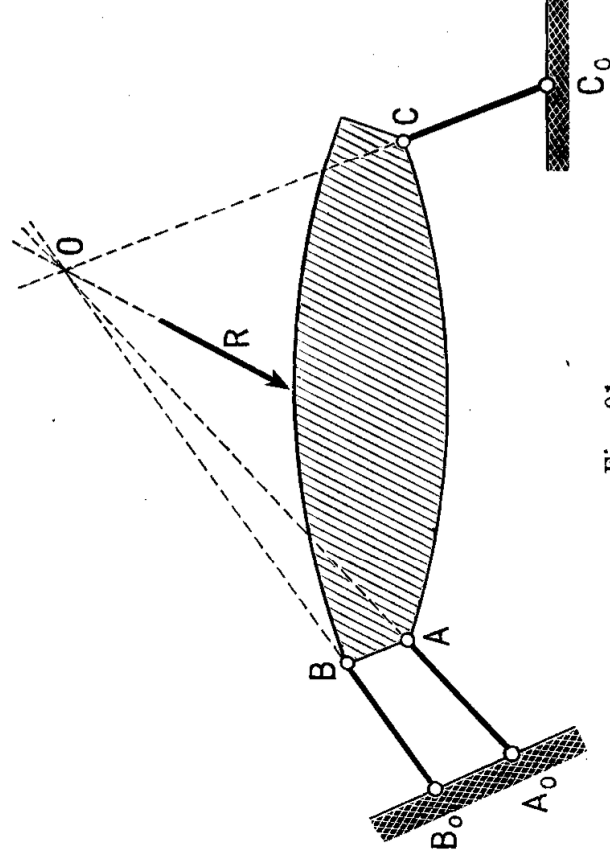


Fig. 91.

gli spostamenti elementari dei punti A e B devono necessariamente esser diretti normalmente alle linee d'azione delle reazioni dei due vincoli conservati, per concludere che il punto O in cui quelle due linee d'azione si incontrano funziona in tale movimento da centro d'istantanea rotazione.

Anche sotto il punto di vista cinematico è dunque ben giustificato considerare O come una cerniera ideale equivalente ai due appoggi semplici imposti ad A ed a B .

Naturalmente bisogna anche qui scartare il caso in cui il terzo vincolo applicato in C consente la predetta rotazione elementare attorno ad O , come accadrebbe se la linea d'azione della reazione V_C passasse per O .

Bisogna, in altre parole, che le tre linee d'azione delle tre reazioni di vincolo non siano concorrenti in un medesimo punto O .

Ed in verità, se un tal caso particolare si verificasse, due eventualità potrebbero prospettarsi dal punto di vista statico.

La risultante R delle forze esterne applicate alla trave potrebbe infatti passare (fig. 91) o non passare (fig. 92) per il punto O .

Nel primo caso la decomposizione di R in tre componenti aventi per linee d'azione le tre rette OA , OB , OC si potrebbe fare in infiniti modi diversi: perciò le tre reazioni sarebbero staticamente indeterminate.

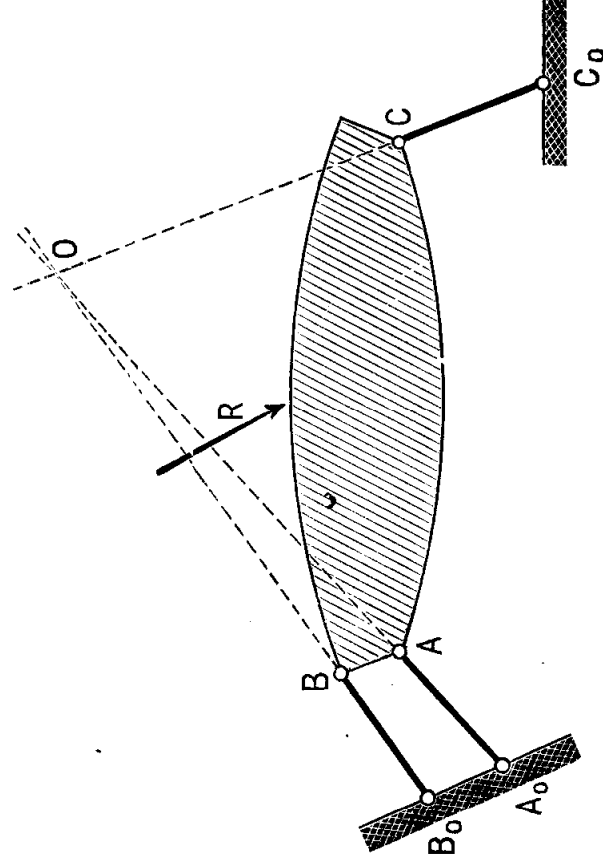


Fig. 92.

Nel secondo caso quella decomposizione non si potrebbe fare in alcun modo (poichè qualunque terna di forze agenti secondo OA , OB , OC dovrebbe sempre avere una risultante passante per O , epperò diversa da R) e l'equilibrio risulterebbe impossibile.

Nell'un caso come nell'altro la impossibilità di risolvere staticamente il problema ci fa avvertiti della esistenza di una singolarità nella sua impostazione.

* * *

Dal caso fin qui studiato di un'unica trave, al caso di due o più travi vincolate fra loro, oltrechè al solito sistema fisso di riferimento, il passo è breve.

Già nelle figure 83, 87, e 88 le aste di collegamento AA_0 , BB_0 , CC_0 da noi allora considerate soltanto sotto il punto

di vista dei vincoli che la loro presenza veniva a creare alla trave AC , non erano in ultima analisi che delle altre travi articolate a cerniera alla prima nei punti A, B, C , ed al sistema fisso di riferimento nei punti A_0, B_0, C_0 .

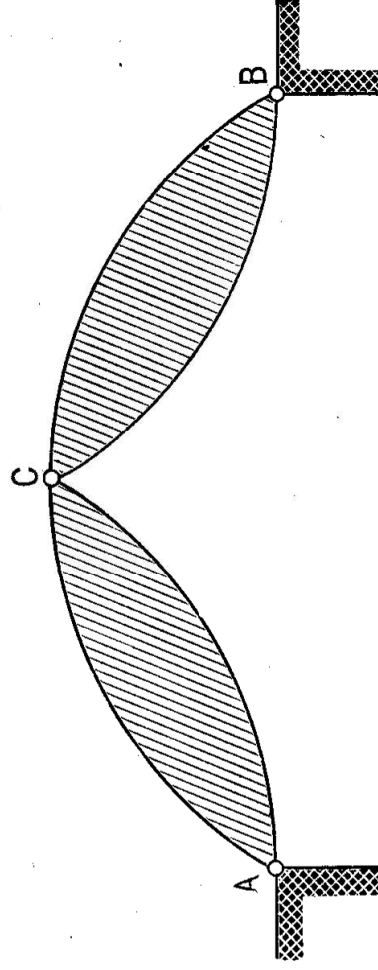


Fig. 93.

Il lettore non stenterà quindi a riconoscere l'identità sostanziale che sussiste tra la trave raffigurata in fig. 83 ed il sistema di due travi noto sotto il nome di *arco a tre cerniere*, rappresentato nella figura 93.

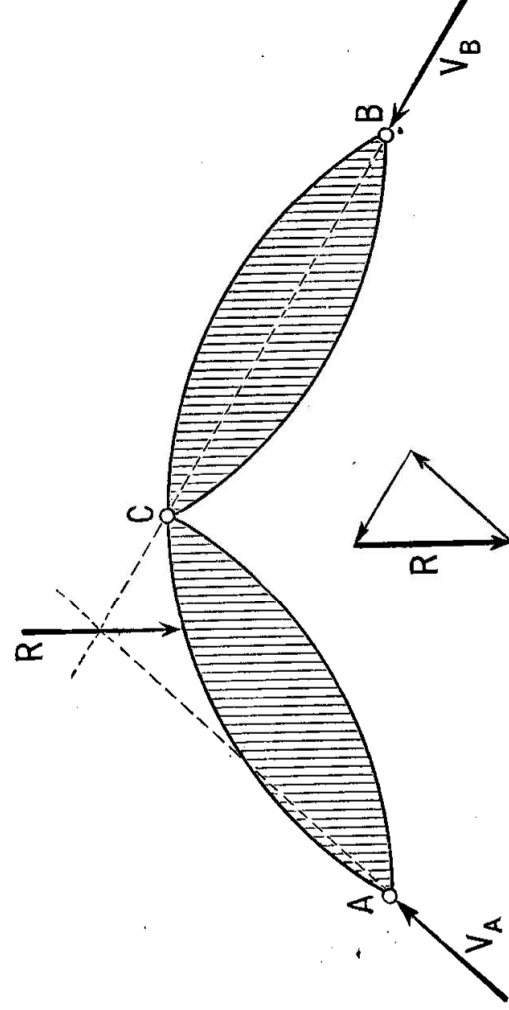


Fig. 94.

Da questa identità discende subito l'applicabilità al caso dell'arco a tre cerniere del procedimento adottato in figura 85 per la determinazione delle reazioni di vincolo.

S'intende bene che nella figura 94, nella quale questo procedimento si vede riprodotto, R rappresenta la risultante di

un sistema qualunque di forze esterne agenti però tutte sulla trave AC ; la possibilità di sostituire un sistema di forze colla sua risultante, essendo un corollario della supposta rigidità della trave, non può invero estendersi all'intero complesso delle due travi AC e CB , perchè queste essendo collegate tra loro solo dalla cerniera C (la quale non esclude un'eventuale rotazione relativa dell'una trave rispetto all'altra) non costituiscono un tutto unico trattabile come sistema rigido.

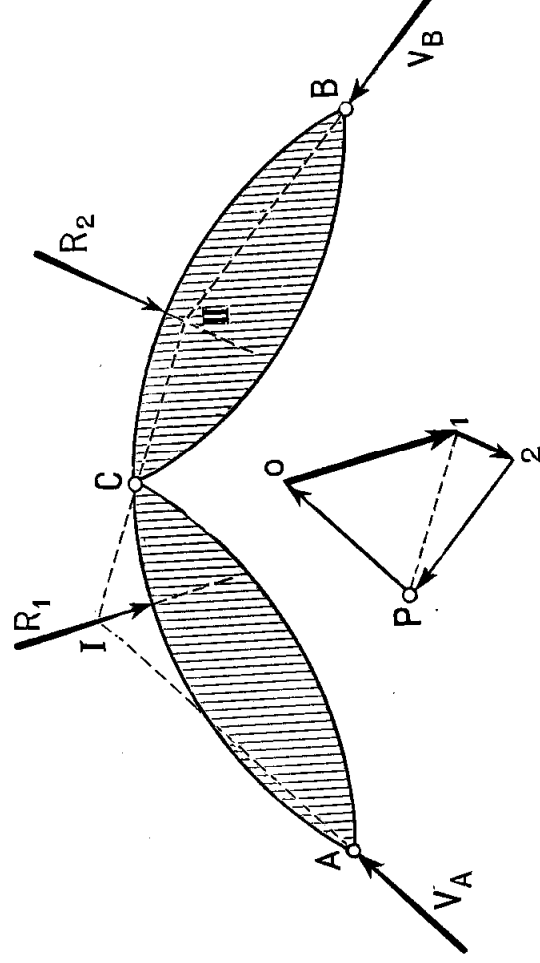


Fig. 95.

Quando alcune forze esterne sono applicate alla trave AC , altre alla trave CB , si potranno tutt'al più ridurre le prime ad una risultante R_1 , le altre ad una risultante R_2 (fig. 95); e le reazioni si determineranno coll'aiuto del poligono funicolare A, I, C, II, B che collega le due forze e passa coi suoi tre lati ordinatamente pei tre punti dati A, C, B ⁽¹⁾.

* * *

Va da sè che alla posizione delle tre cerniere A, C, B devono essere imposte quelle medesime riserve che avevano per fine di impedire al sistema rappresentato in figura 83 di degenere nel caso singolare della figura 84.

⁽¹⁾ Cfr. *I fondamenti della Statica*, a pagg. 148 e 149.

Le tre cerniere cioè non devono mai essere allineate.

E nel dir ciò non intendiamo escludere soltanto il caso banale in cui si riprodurrebbe tal quale la figura 84, ma anche quelli, meno evidenti, ma sostanzialmente equivalenti, rappresentati nelle figure 96 e 97.

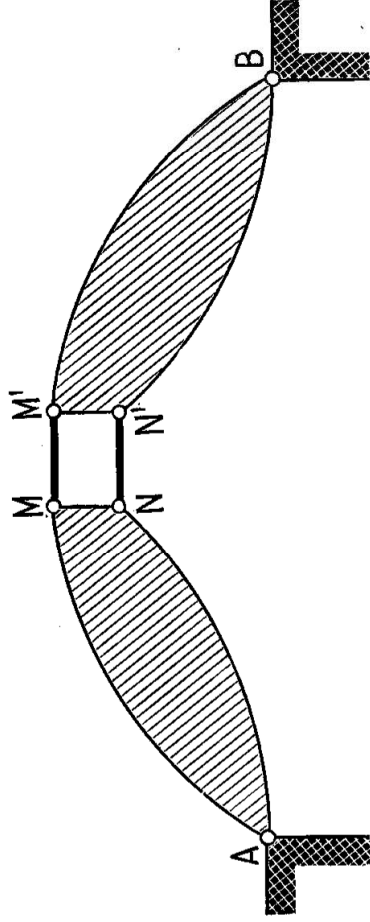


Fig. 96.

Nella prima delle quali la cerniera C , sostituita da due aste articolate di collegamento MM' ed NN' , va a cadere proprio nel punto all'infinito della congiungente AB . Mentre

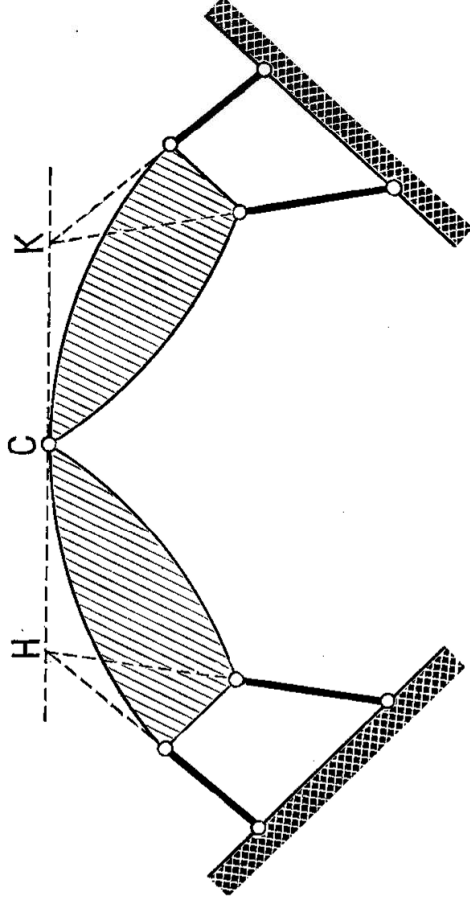


Fig. 97.

nell'altra sono le due cerniere A e B che sono state sostituite da due cerniere ideali H e K , e la singolarità dipende dal fatto che C si trova proprio sulla congiungente HK .

Similmente bisognerà sempre evitare che si riproduca, nei sistemi di travi fra loro articolate di cui ci andiamo occupando,

il caso illustrato e discusso nelle figure 91 e 92, la cui singolarità caratteristica il lettore ritroverà facilmente nella fig. 98.

La trave ACB ivi rappresentata può infatti, malgrado i vincoli, anzi compatibilmente con essi, subire un moto elementare di rotazione attorno al centro istantaneo O in cui

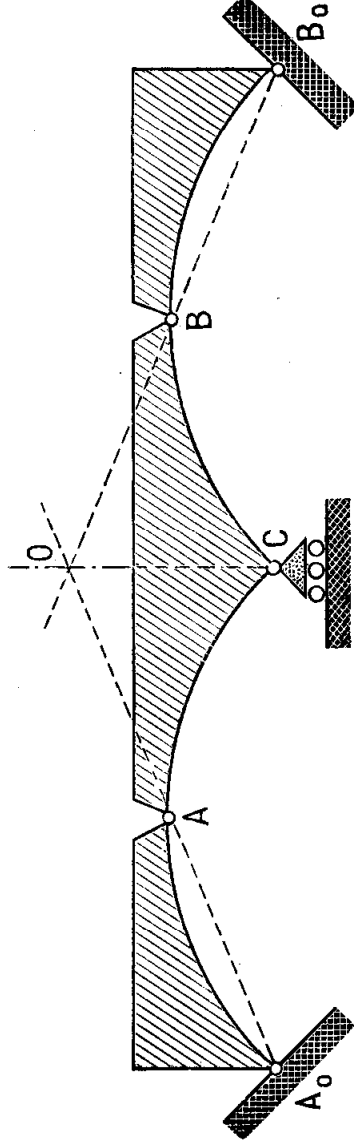


Fig. 98.

concorrono la linea d'azione della reazione del carrello C e le congiungenti AA_0 e BB_0 . E gli stessi ragionamenti già fatti a proposito delle citate figure 91 e 92 potrebbero essere qui ripetuti parola per parola a dimostrare come l'equilibrio di detta trave, sotto l'azione di un sistema qualunque di forze esterne, sia destinato a riescire, a seconda dei casi, indeterminato oppure impossibile.

È invece perfettamente accettabile il sistema di travi raffigurato nella figura 99 che può con vantaggio paragonarsi ad un arco a tre cerniere HCK e come tale risolversi staticamente. Nella figura 101 sono chiaramente indicate le operazioni grafiche che conducono alla determinazione delle reazioni per un carico od un sistema di carichi applicati alla trave intermedia sinistra ed aventi la risultante R .

* * *

È però ben chiaro che, una volta messi per questa via, le complicazioni si possono variare e moltiplicare all'infinito. E può divenire praticamente difficile ritrovare in una costruzione, del tipo di quella rappresentata nella figura 100, lo schema semplice sul quale verificare la esistenza dei vincoli indispensabili e la loro posizione non singolare, condizioni l'una e

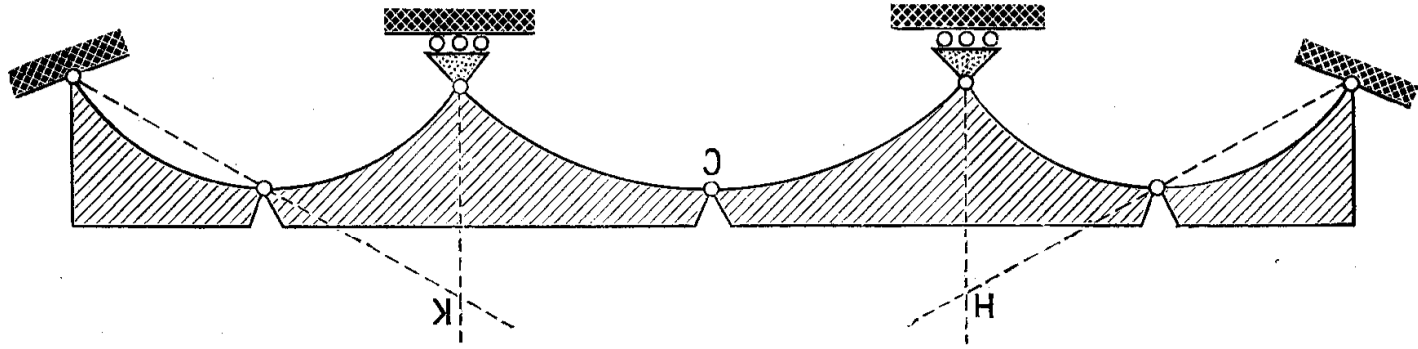


Fig. 99.

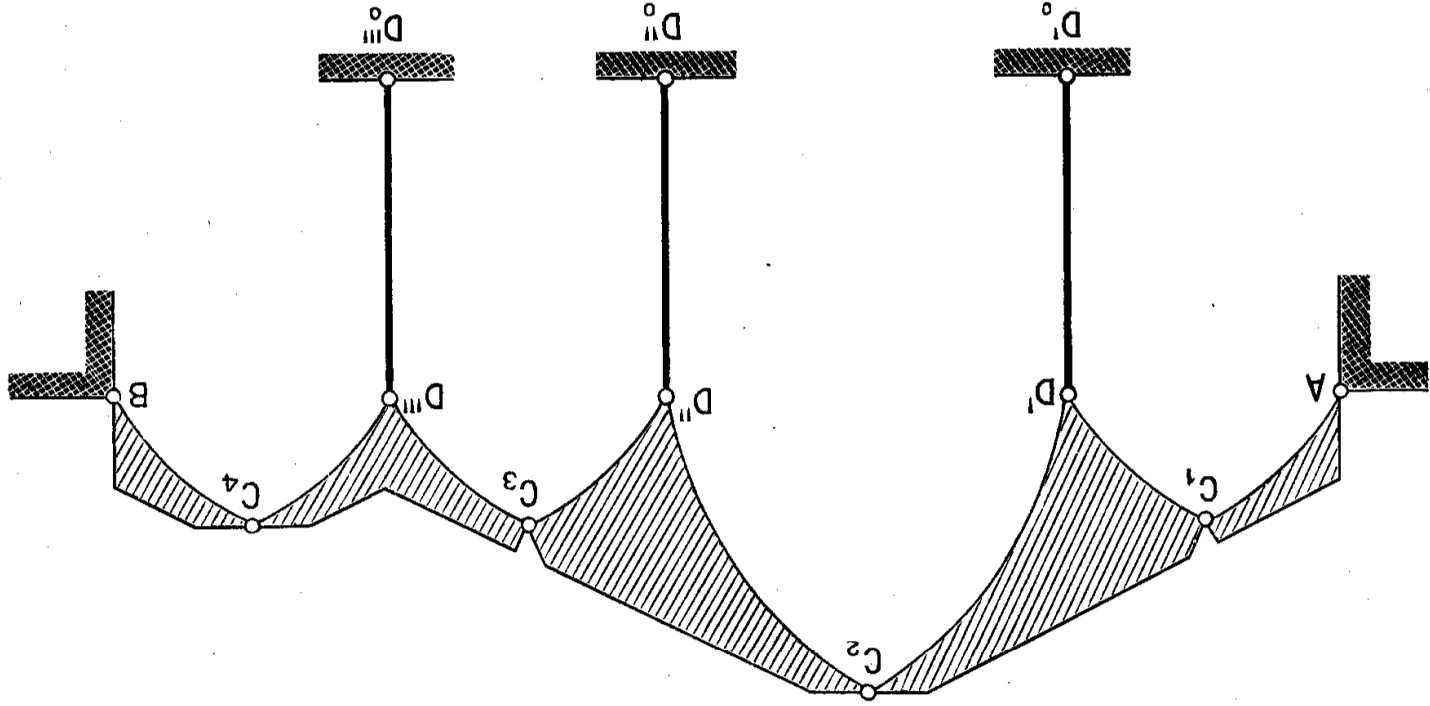


Fig. 100.

l'altra essenziali perchè il problema dell'equilibrio statico ammetta una soluzione unica e ben determinata.

Convienne quindi che, prescindendo dalle considerazioni relative ai casi più semplici, noi ci decidiamo ad affrontare direttamente il problema generale dell'equilibrio di un numero qualunque n di corpi rigidi — o quanto meno trattabili in prima approssimazione come tali — i quali siano connessi fra loro e collegati ad un sistema fisso di riferimento da vincoli dei vari tipi descritti, ed inoltre siano sollecitati da forze affatto qualunque.

In ordine a questo problema ci chiederemo:

1) qual'è il numero dei vincoli indispensabili per assicurare l'equilibrio;

2) come ci si può assicurare che quei vincoli siano atti a compiere effettivamente la loro funzione: che cioè non si trovino in una di quelle posizioni singolari in cui, malgrado la presenza loro, qualche movimento finito, od anche soltanto infinitesimo, resta ancor possibile;

3) con quali metodi — una volta accertata l'esistenza di una soluzione unica e ben determinata del problema dell'equilibrio — si potrà identificare questa soluzione; o, per esser più precisi: con quali metodi si potrà procedere al calcolo dei valori delle singole reazioni per una qualunque condizione di carico.

Alla prima domanda si risponde subito ricordando che, per definire la posizione nel piano di uno qualunque degli n corpi rigidi dati, occorre e basta, secondo quanto abbiamo detto sopra, che esso sia collegato al sistema fisso di riferimento, od agli altri $n-1$ corpi, supposti già per loro conto fissati, in uno dei tre modi seguenti:

a) mediante un incastro;

b) coll'azione combinata di una cerniera e di un appoggio semplice;

c) coll'azione combinata di tre appoggi semplici.

Nel computo del numero dei vincoli occorrenti per definire le posizioni di tutti gli n corpi rigidi costituenti il sistema, ogni cerniera può quindi sostituire una coppia di appoggi semplici, ogni incastro può sostituire una terna di appoggi semplici.

Se pertanto il sistema fosse vincolato esclusivamente con degli appoggi semplici il numero n_a di essi dovrebbe evidentemente essere eguale a $3n$.

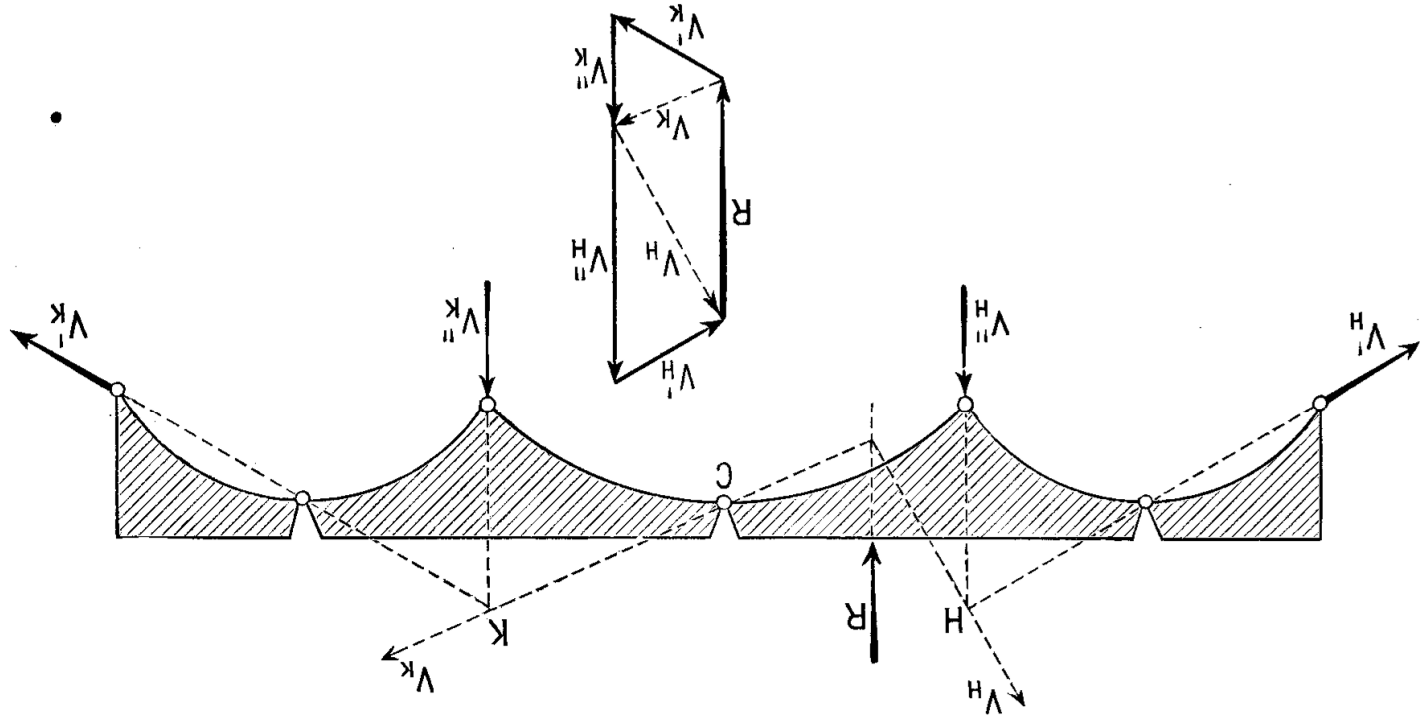


Fig. 101.

Se invece vi son anche, tra i vincoli imposti al sistema, n_c cerniere ed n_i incastri, ciascuna di quelle contribuirà per due unità, ciascuno di questi per tre unità al raggiungimento della medesima somma.

Dovrà cioè aversi

$$3 n_i + 2 n_c + n_a = 3 n \quad (129)$$

* * *

Per rispondere alla seconda domanda basterà immaginar sopra un vincolo semplice (appoggio), ovvero ridotto un vincolo multiplo (cioè sostituita una cerniera con un appoggio semplice, ovvero rimpiazzato un incastro con una cerniera) per modo che la somma al primo membro dell'equazione (129) si riduca ad essere eguale a

$$3 n - 1$$

Il sistema godrà allora di un grado di libertà e si potrà sempre trovare un insieme di spostamenti rigidi delle varie sue parti nel piano dato, che sia compatibile coi vincoli conservati.

Ora è chiaro che, se questo insieme di spostamenti rigidi risulterà incompatibile col vincolo soppresso, il semplice ripristino di questo vincolo basta ad impedirlo, epperò ad assicurare l'immobilità e quindi l'equilibrio del sistema dato.

Che se invece l'insieme degli spostamenti rigidi sopra considerato risultasse compatibile col vincolo soppresso, sicchè il ripristino di esso non bastasse ad impedirlo, questo vincolo sarebbe da riguardarsi come inefficiente ed il sistema dato da scartarsi come non avente una configurazione definita nel suo piano.

Fermiamoci per fissar le idee sul caso della figura 100 ed immaginiamo ridotto il numero dei vincoli — che il lettore constaterà senza difficoltà essere, nelle condizioni iniziali, perfettamente conforme alla (129) — mediante la sostituzione di una delle cerniere, per esempio di quella esistente in B , con un vincolo semplice (appoggio scorrevole) come è indicato nella figura 102.

Il sistema di travi diviene così suscettibile di spostamenti che, caso per caso, si identificano sempre molto facilmente.

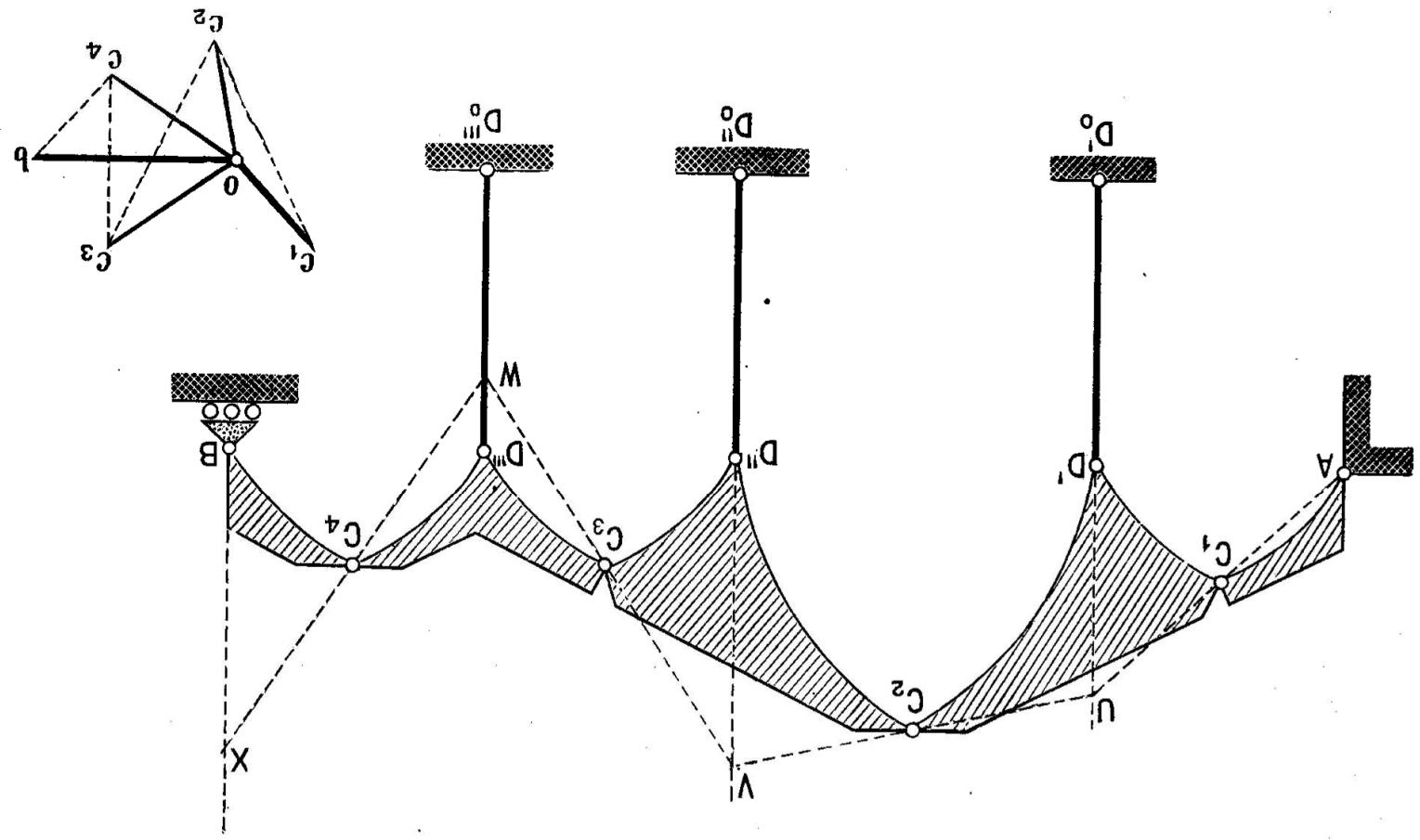


Fig. 102.

Basterà esaminare se tra le varie travi del sistema non ve n'è alcuna per cui i vincoli conservati permettano di caratterizzare un unico moto possibile. Nell'esempio che abbiamo sott'occhio ciò accade per la trave AC_1 , la quale, vincolata a cerniera in A al sistema fisso di riferimento, non può evidentemente far altro che ruotare attorno ad A .

Immaginiamo che essa ruoti effettivamente di un angolo *piccolissimo* e del resto affatto arbitrario. Il punto C_1 subirà uno spostamento che, per la supposta piccolezza del moto, si potrà considerare come diretto secondo la normale alla congiungente AC_1 .

Viene così ad esser nota la direzione dello spostamento di un punto della seconda trave C_1C_2 . Questa è d'altronde soggetta in D' ad un vincolo che costringe questo punto a muoversi sopra una circonferenza di centro D'_0 : sempre in vista della piccolezza degli spostamenti che consideriamo, riteremo lo spostamento di D' diretto normalmente alla congiungente $D'D'_0$. Il centro d'istantanea rotazione per la trave C_1C_2 si troverà dunque nel punto d'incontro U delle due rette AC_1 e $D'D'_0$. Ne segue immediatamente che C_2 dovrà spostarsi normalmente al raggio UC_2 .

Così proseguendo, il lettore non tarderà a riconoscere in V (punto di incontro del predetto raggio UC_2 colla congiungente $D''D''_0$) il centro di istantanea rotazione per la trave C_2C_3 ; in W (punto d'incontro di VC_3 con $D'''D'''_0$) il centro di istantanea rotazione per la trave C_3C_4 ; e finalmente in X (punto di incontro di WC_4 con la linea d'azione dell'appoggio semplice cui si è supposta ridotta la cerniera B) il centro di istantanea rotazione dell'ultima trave C_4B .

Ora, fin che X risulta distinto da B , la rotazione attorno ad X , resa possibile dal fatto che in B c'è ora per ipotesi un semplice appoggio, cessa di esser possibile quando in B si ripristini la cerniera.

Il ripristino della cerniera sarebbe invece inefficiente — nel senso che i supposti moti rigidi delle varie travi continuerebbero ad essere possibili — se il punto X coincidesse con B , come avverrebbe sicuramente se, per esempio, il sistema di cinque travi considerato fosse stato concepito simmetrico rispetto alla sua verticale di mezzo.

Può essere interessante completare l'analisi cinematica del problema aggiungendo alla determinazione dei centri di istantanea rotazione quella degli spostamenti effettivi dei singoli punti.

Valgono a tal fine le considerazioni seguenti.

Sia $C_2D''C_3$ (fig. 103) uno qualunque dei corpi rigidi di cui il sistema dato si compone, e supponiamo che si conoscano le direzioni degli spostamenti elementari che i vincoli ad esso imposti consentono a due punti di esso, per es. a C_2 ed a D'' .

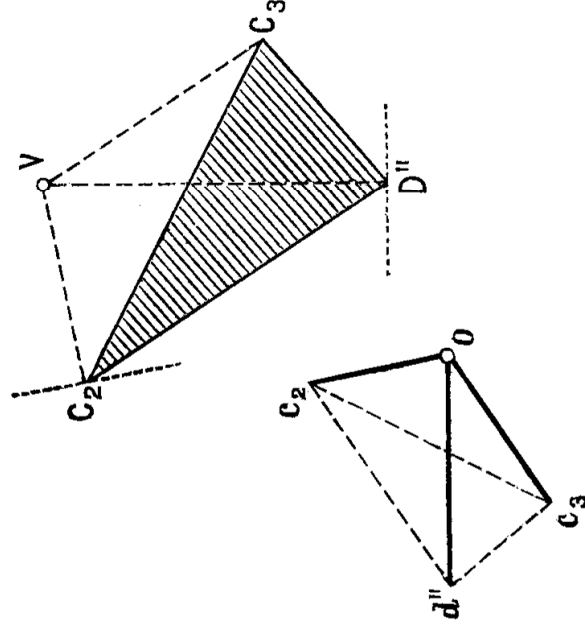


Fig. 103.

Il punto V del piano in cui si intersecano le normali a tali due direzioni, condotte per i punti cui esse si riferiscono, sarà, come già sappiamo, il centro di istantanea rotazione.

Dati, od assunti ad arbitrio, a seconda dei casi, la grandezza ed il senso di uno di quegli spostamenti, grandezza e senso dell'altro restano completamente determinati in conseguenza.

Gli spostamenti devono infatti essere proporzionali alla distanza dei singoli punti dal centro V di rotazione, e diretti in modo da apparir rivolti dalla medesima parte ad un osservatore che si trovi in tale centro.

Per quanto tali spostamenti siano per ipotesi piccolissimi, nulla ci vieta di rappresentarli in disegno: basta evidentemente adottare per la rappresentazione una scala sufficientemente grande.

Assunta un'origine O ad arbitrio, indichiamo dunque con Oc_2 lo spostamento noto di C_2 . Allora lo spostamento Od'' del punto D'' si otterrà conducendo da O la normale al raggio VD'' e da c_2 la normale alla congiungente C_2D'' .

Similmente lo spostamento di un terzo punto qualunque C_3 , rigidamente connesso ai primi due, si potrà sempre ottenere sotto forma di vettore intersecato sulla normale condotta per O al raggio C_3V dalla normale condotta per c_2 alla congiungente C_2C_3 ovvero dalla normale condotta per d'' alla congiungente $D''C_3$.

Si avrà infatti così

$$\frac{Oc_2}{C_2V} = \frac{Od''}{D''V} = \frac{Oc_3}{C_3V}$$

La figura costituita dagli estremi $c_2 d'' c_3 \dots$ dei vettori rappresentanti gli spostamenti, è simile alla figura data $C_2 D'' C_3 \dots$ e ruotata rispetto ad essa di un angolo retto nel senso della rotazione considerata.

Coll'applicazione ripetuta di questa regola si è, nella fig. 102, costruito lo spostamento Ob del punto B corrispondente ad uno spostamento Oc_1 della cerniera C_1 .

* * *

Se invece di sostituire la cerniera B con un appoggio scorrevole, si fosse operata la riduzione del numero dei vincoli per soppressione di un appoggio semplice, le costruzioni grafiche avrebbero bensì potuto mutare nei loro dettagli, non sarebbero però in nulla mutate le conclusioni.

La figura 104 rappresenta il solito sistema di travi nell'ipotesi che esso sia stato privato dell'appoggio in D''' .

Mutano allora i centri di istantanea rotazione delle ultime due travi verso destra. Per l'ultima tale centro coincide evidentemente colla cerniera B ; per la penultima esso va a portarsi nel punto W in cui si incontrano il raggio VC_3 ed il raggio BC_4 .

L'efficienza del vincolo momentaneamente soppresso viene provata dal fatto che lo spostamento Od''' che al punto D''' può attribuirsi compatibilmente con tutti gli altri vincoli conservati, ha una componente verticale (incompatibile col vincolo soppresso) che non è nulla.

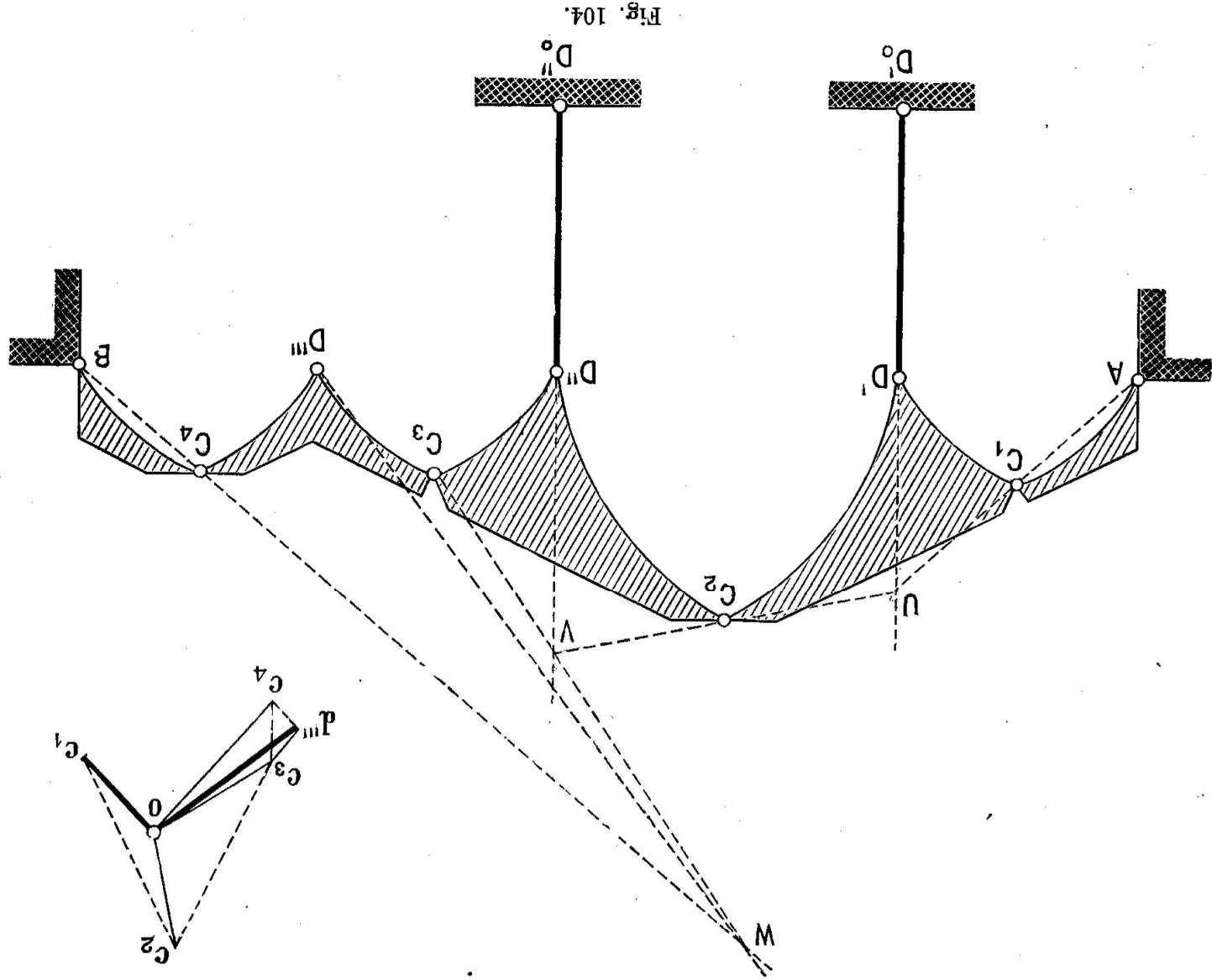


Fig. 104.