II.

Il teorema di Castigliano.

Veniamo ora all'analisi delle deformazioni, e proponiamoci senz'altro la ricerca della componente, secondo una data direzione, dello spostamento che subisce un punto generico di un solido elastico, quando questo, deformandosi sotto l'azione di date forze esterne, passa dallo stato naturale alla sua configurazione di equilibrio.

Al solito riterremo affatto qualunque il sistema preso in esame: in particolare ci asterremo da ogni ipotesi sulla natura dei vincoli ad esso imposti, fermo restando che tali vincoli devono sempre essere sufficienti a definire in ogni caso la posizione del solido nello spazio.

Ciò premesso, immaginiamo di vincolare ulteriormente il sistema in corrispondenza del punto da studiarsi, collegando questo ad un punto fissso dello spazio mediante un'asta elastica (munita alle estremità di articolazioni girevoli senza attrito) la quale abbia la direzione stessa secondo cui si intende eseguire la misura dello spostamento.

Deformandosi il sistema dato, ove avvenga qualche spostamento del punto considerato nella data direzione, dovrà deformarsi anche l'asta: al lavoro di deformazione Φ_1 proprio del solido elastico dato andrà allora aggiunto quello dell'asta.

Se per fissar le idee supponiamo che questa sia cilindrica, di lunghezza l abbastanza grande a fronte delle sue dimensioni trasversali, e se indichiamo con A l'area della sua sezione retta, e con E il modulo di elasticità normale del materiale di cui è costituita, il lavoro di deformazione dell'asta si potrà, come sappiamo, sempre scrivere sotto la forma

$$\frac{X^2 l}{2EA}$$

X essendo lo sforzo con cui l'asta reagisce allo spostamento sopra accennato.

Ora, nelle ipotesi fatte, il nuovo vincolo che noi abbiamo immaginato di aggiungere al sistema dato è certamente sovrabbondante; perciò la reazione X da esso sviluppata è da considerarsi come staticamente indeterminata.

Per determinarla basta prendere in considerazione le configurazioni che si ottengono mantenendo immutati tutti gli elementi *dati* del sistema e facendo variare comunque la X; tali configurazioni saranno invero tutte certamente equilibrate e tra esse non potrà non esser compresa la configurazione risolvente, cioè compatibile col nuovo vincolo da noi aggiunto.

Applicando il teorema di Menabrea si giunge così all'equazione

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\Phi_1 + \frac{X^2 l}{2EA}\right) = 0 \tag{107}$$

che si può anche scrivere

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial X} = -\frac{X l}{EA} \tag{108}$$

Ma il secondo membro misura precisamente l'accorciamento che l'asta di vincolo da noi introdotta subisce sotto l'azione dello sforzo X che in essa ha origine; e questo accorciamento, nella configurazione risolvente, non può differire dallo spostamento che il punto considerato viene contemporaneamente a subire nella direzione dell'asta.

Possiamo pertanto concludere che tale spostamento è eguale alla derivata del lavoro di deformazione Φ_1 presa rispetto alla reazione X sviluppata dal vincolo fittizio.

***

In questo risultato Φ_1 rappresenta il lavoro di deformazione del solido dato supposto naturalmente soggetto, oltre che alle forze esterne ad esso realmente applicate, anche alla reazione X del vincolo idealmente impostogli.

E analogamente lo spostamento che così si viene a calcolare è quello che il dato sistema di forze esterne produrrebbe in quel dato punto e in quella data direzione ove tale vincolo sussistesse effettivamente.

Però si può osservare che nel ragionamento da noi fatto, non abbiamo avuto bisogno di introdurre alcuna ipotesi speciale sulla natura dell'asta adottata per vincolare il sistema.

La formula a cui siamo giunti sta dunque senza dubbio qualunque sia il valore del modulo E del materiale di cui quell'asta si intende costituita; sta in particolare anche se si suppone, come caso limite,

$$E=0.$$

L'asta si dice allora infinitamente cedevole e si rivela subito incapace di sviluppare reazione di sorta: il solido dato si comporta esattamente come se l'asta non ci fosse, e la derivata di Φ_1 per rapporto ad X viene allora a fornire la misura dello spostamento reale che noi ci eravamo proposti di determinare.

Con ciò non si deve credere che le considerazioni che precedono rappresentino un giro vizioso che noi abbiamo fatto senza ragione: vi è bensì, nelle modificazioni che noi abbiamo supposto di apportare al sistema elastico dato, qualche cosa di arbitrario che serve soltanto a fissar le nostre idee ed a dare un significato fisico, sia pure fittizio, al ragionamento: più precisamente è assolutamente arbitraria l'interpretazione della forza variabile X come reazione di un vincolo ideale: ma la considerazione di questa forza è, dal punto di vista dell'analisi, assolutamente indispensabile per poter eseguire la derivata.

In pratica noi potremo prescindere da ogni ipotesi relativa alla sua origine e annoverarla senz'altro fra le forze esterne; la indicheremo anzi addirittura con P_i come se fosse una qualunque forza concentrata effettivamente applicata al punto considerato, secondo la data direzione, senza preoccuparci di precisare se essa esista realmente o no; e ne lascieremo soltanto indeterminata la grandezza.

Il lavoro di deformazione Φ_1 risulterà allora naturalmente espresso in funzione di tutte le forze deformatrici, non esclusa la P_i, e il teorema dimostrato si enuncierà così:

Lo spostamento p_i che il punto di applicazione della forza P_i subisce, nella direzione di questa, durante la deformazione elastica del sistema, è eguale alla derivata parziale del lavoro di deformazione Φ_1 presa rispetto alla forza stessa

$$p_i=\frac{\partial \Phi_1}{\partial P_i} \tag{109}$$

Questo spostamento riesce naturalmente una funzione lineare delle forze date: in essa si dovrà intendere attribuito a ciascuna di dette forze il relativo valore.

In particolare se P_i fosse una forza realmente applicata al solido, si dovrebbe, in luogo di P_i, introdurre nell'espressione testè trovata la sua grandezza; se invece P_i è una forza fittizia aggiunta da noi, ma in realtà non esistente, si deve porre nella (109)

$$P_i = 0$$

* * *

La regola testè esposta pel calcolo degli spostamenti dei punti di un sistema elastico può venire direttamente verificata in modo molto semplice ed intuitivo se le forze deformatrici sono tutte concentrate.

In tal caso infatti la funzione Φ_1 si può notoriamente esprimere sotto la forma (21)

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \Sigma P p$$

E se immaginiamo di far variare una qualunque delle forze date, attribuendole un incremento piccolissimo, per modo che la sua intensità passi dal valore P_i al nuovo valore, vicinissimo, $P_i + d P_i$, la stessa funzione subirà un corrispondente incremento e potrà denotarsi con

$$\Phi_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial P_i} d P_i$$

Questo nuovo valore del lavoro di deformazione del sistema elastico dato si può calcolare assai facilmente: in realtà alla stessa configurazione finale di equilibrio si potrebbe giungere immaginando il solido inizialmente sollecitato dalla sola forza piccolissima $d P_i$ ed applicando poi ad esso le forze date P con intensità gradatamente crescenti da zero ai loro valori finali.

Il lavoro di deformazione iniziale, dell'ordine di grandezza del quadrato di $d P_i$, potrebbe allora venir trascurato a fronte del lavoro di deformazione prodotto dall'applicazione del sistema di forze P. Questo è infatti misurato dalla somma

$$\frac{1}{2} \Sigma P p + p_i d P_i$$

in cui compare necessariamente quello stesso lavoro di deformazione che si aveva quando le forze P agivano da sole in quanto che gli spostamenti p da esse causati non possono per la presenza della forza $d P_i$ esser mutati; ma si ha in più un nuovo termine il quale misura il lavoro che questa forza $d P_i$ eseguisce quando il suo punto di applicazione sotto l'azione delle forze P subisce lo spostamento p_i.

Si ha dunque, a meno di infinitesimi di ordine superiore, l'eguaglianza

$$\Phi_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial P_i} d P_i = \frac{1}{2} \Sigma P p + p_i d P_i$$

dalla quale si ricava immediatamente la (109) ed il teorema che la esprime quale noi l'abbiamo enunciato nel precedente paragrafo.

Questo teorema è dovuto al Castigliano, il quale ne ha anche indicate le più interessanti applicazioni.

In fatto di dimostrazioni dirette, il breve ragionamento che noi abbiamo esposto in questo paragrafo, rappresenta tuttora ciò che di meglio sia stato proposto dai varii autori.

Ma, come abbiamo detto, esso vale solo nel caso limite di forze concentrate.

Il Donati, che ha cercato di rendere rigorosa la dimostrazione diretta anche nel caso di forze comunque ripartite [1], è stato costretto ad introdurre alcune estensioni nel concetto di funzione, e conseguentemente nel concetto di derivata, che, allo stato attuale delle cose, riescono poco famigliari agli ingegneri.

Si può però, come si è visto, evitare tali difficoltà rinunciando a stabilire il teorema di Castigliano per via diretta e facendolo dipendere da quello di Menabrea, la cui dimostrazione non lascia nulla a desiderare nè sotto il punto di vista della generalità, nè sotto quello del rigore.

---

[1] L. Donati, *Introduzione teorica al corso di fisica tecnica* (litogr.), Bologna, 1900-1901.