

Il problema di Saint-Venant.

Consideriamo un solido cilindrico (o prismatico) cioè generato da un'area A , piana, di forma qualunque, che si muova nello spazio descrivendo con ogni suo punto una linea retta, a cui l'area generatrice si conservi sempre normale: la lunghezza l del cilindro sia in ogni caso assai grande a fronte delle sue dimensioni trasversali.

Supporremo nulle le forze di massa, e libera così da ogni forza come da ogni vincolo la superficie laterale cilindrica. Il solido non potrà pertanto venir sollecitato nè vincolato se non in corrispondenza delle basi.

Riferiamo un tale sistema ad una terna di assi cartesiani ortogonali aventi l'origine nel baricentro di una delle basi, assumendo per assi delle x e delle y gli assi principali centrali di inerzia di questa. L'asse delle z coinciderà coll'asse geometrico del cilindro: su di esso si assumerà come positiva la direzione rivolta verso l'interno del solido.

Spetta a Barré de Saint-Venant il merito di avere impostato e risolto rigorosamente il problema dell'equilibrio elastico di questa categoria di solidi in un certo numero di casi particolari, opportunamente scelti per modo che da essi si possano dedurre le soluzioni, almeno approssimate, di tutti gli altri casi, anche i più complicati.

I casi particolari per cui la soluzione di Saint-Venant è rigorosa sono quelli in cui ogni elemento superficiale parallelo all'asse del cilindro è soggetto soltanto ad una tensione tan-

genziale nella direzione dell'asse stesso. Ciò equivale a dire che si ha in ogni punto

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (46)$$

Vediamo brevemente a quali conseguenze porti questa limitazione nel caso dei solidi isotropi.

Facendo $\sigma_x = \sigma_y = 0$ nelle (37) si trova

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{1}{m} \frac{\sigma_z}{E} = -\frac{1}{m} \varepsilon_z$$

mentre dalla condizione $\tau_{xy} = 0$, per l'ultima delle (38), si ricava subito

$$\gamma_{xy} = 0$$

D'altra parte le componenti non nulle di tensione σ_z , τ_{yz} , τ_{zx} dovranno in tutto lo spazio occupato dal corpo verificare le equazioni indefinite (35), le quali, in assenza di forze di massa, divengono

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

Le prime due, tenute presenti le (41), si possono anche scrivere

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} = 0$$

mentre la terza, tenuto anche conto dell'ultima tra le (40), diviene

$$\frac{mE}{2(m+1)} \left[\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} \right] + \frac{mE}{m^2 - m - 2} \left[(m-1) \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} \right] = 0$$

Sostituendo alle varie componenti della deformazione le loro ben note espressioni nelle derivate parziali delle componenti u , v , w degli spostamenti, e semplificando, si ottengono le seguenti sei equazioni alle quali ogni sistema di componenti di

spostamento dovrà identicamente soddisfare in tutti i punti del dato cilindro:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{m} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \end{aligned} \right\} (47)$$

Quando queste sei equazioni sono soddisfatte le componenti non nulle di tensione risultano espresse dalle seguenti semplicissime formole

$$\sigma_z = E \varepsilon_z \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = G \gamma_{zx}$$

ovvero, introducendo anche qui le derivate parziali delle u, v, w rispetto alle coordinate,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z = E \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{yz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \tau_{zx} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} (48)$$

In queste condizioni la dilatazione cubica e l'energia elastica elementare vengono rispettivamente ad assumere le forme seguenti

$$\Theta = \frac{m-2}{m} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (49)$$

$$\varphi = \frac{E}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{G}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (50)$$

Restano da precisarsi le equazioni ai limiti (36), le quali, nelle ipotesi (46), divengono

$$P_x + \tau_{zx} \cos(n, z) + R_x = 0$$

$$P_y + \tau_{yz} \cos(n, z) + R_y = 0$$

$$P_z + \tau_{zx} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z) + R_z = 0$$

Sulla superficie laterale cilindrica per ipotesi non vi sono nè vincoli nè forze applicate: e siccome in ogni punto di essa la normale riesce parallela al piano xy , epperò

$$\cos(n, z) = 0$$

l'unica equazione che su di essa deve verificarsi resta

$$\tau_{zx} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) = 0$$

o, ciò che fa lo stesso,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos(n, y) = 0 \quad (51)$$

ed esprime la condizione che la tensione tangenziale che si sviluppa su una sezione retta del cilindro sia, nei punti del contorno, tangente a questo.

Sulle due basi invece la normale è parallela all'asse delle z , quindi

$$\cos(n, x) = \cos(n, y) = 0 \quad \cos(n, z) = \pm 1$$

Si ottengono così le condizioni

$$\left. \begin{aligned} P_x + R_x &= \mp \tau_{zx} \\ P_y + R_y &= \mp \tau_{yz} \\ P_z + R_z &= \mp \sigma_z \end{aligned} \right\} (52)$$

dove il segno superiore vale per la base $z=0$, l'inferiore per la base $z=l$.

La distinzione delle forze esplicitamente date dalle reazioni di vincolo non è essenziale pel nostro studio. Una volta precisata la distribuzione delle azioni esterne di componenti

$$P_x + R_x \quad P_y + R_y \quad P_z + R_z$$

poco importa il sapere se queste derivino in tutto o in parte da forze propriamente dette o da reazioni di vincolo. Ciò non pertanto, e per fissar meglio le nostre idee, e per escludere una volta per tutte e nel modo più semplice ogni possibile moto rigido dell'intero sistema, noi supporremo che le condizioni di vincolo siano limitate a quelle strettamente necessarie, per modo che le relative reazioni restino in ogni caso completamente definite dalle equazioni della statica in funzione delle forze esterne arbitrariamente date.

A tal fine riterremo il cilindro libero da vincoli alla base $z=l$ dove pertanto si avrà

$$R_x = R_y = R_z = 0$$

e rigidamente incastrato in corrispondenza della base $z=0$: con che intendiamo di affermare:

- 1° che il baricentro O della base $z=0$ è fisso;
- 2° che l'elemento lineare uscente da O nella direzione dell'asse x mantiene immutata questa sua direzione;
- 3° che l'elemento superficiale determinato in O dalle direzioni degli assi x e y mantiene invariata la sua giacitura.

La prima condizione si esprime evidentemente dicendo che nell'origine devon essere nulle le tre componenti u , v , w dello spostamento; la seconda implica che siano nulle le componenti secondo y e z dello spostamento di un punto dell'asse x infinitamente prossimo all'origine, per il che si richiede che nell'origine si annullino anche $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial x}$; infine perchè sia soddisfatta la terza condizione occorre e basta che sia nulla la componente secondo l'asse z dello spostamento di un punto dell'asse y infinitamente prossimo all'origine, cioè che nell'origine si annulli ancora $\frac{\partial w}{\partial y}$.

Si può pertanto concludere che le condizioni di vincolo sopra espresse si traducono analiticamente imponendo che per

$$x = y = z = 0$$

si abbia

$$u = v = w = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (53)$$

* * *

Ciò premesso procederemo nel modo seguente: fisseremo *a priori* la deformazione assegnando le funzioni u, v, w ; verificheremo che esse soddisfino in tutto lo spazio occupato dal cilindro alle (47), sulla superficie laterale alla (51) e nell'origine alle (53). Calcoleremo poi per mezzo delle (48) le tre componenti speciali di tensione che non sono identicamente nulle, e dai valori che queste componenti assumeranno sulle basi risaliremo, secondo le (52), alle azioni esterne che ivi dovranno agire perchè, nello stato di deformazione considerato, sussista l'equilibrio.

Il metodo, come si vede, è indiretto e non può condurre che a giustificare quelle soluzioni che sono già note o a controllare quelle che per qualsiasi ragione si ritengono vere. Esso ha però il vantaggio non indifferente di evitare le difficoltà analitiche ed i lunghi calcoli, dal nostro punto di vista assai poco interessanti, che occorrerebbero per l'integrazione diretta delle (47). Si presta quindi assai bene, tanto più che come abbiamo già detto si tratta qui soltanto di risolvere un certo numero di casi particolari.

La generalizzazione poi di questi casi, e la loro applicazione approssimata ai problemi più complessi, deriva da ciò che la sostituzione di un dato sistema di forze applicato ad una delle basi con un altro staticamente equivalente, cioè avente la medesima forza e la medesima coppia risultanti, per quanto differente nel modo di applicazione e nella legge di distribuzione, è senza influenza sensibile sui punti del cilindro che sono situati ad una sufficiente distanza dalla base stessa.

Ecco in qual modo si può intuitivamente rendersi conto della verità, o almeno della verosimiglianza, di questo asserto.

La sostituzione in discorso può idealmente realizzarsi immaginando aggiunto, sulla base stessa del cilindro già deformato sotto l'azione della data sollecitazione, un nuovo sistema di forze *in equilibrio* ottenuto sovrapponendo in ciascun punto le azioni relative alla seconda sollecitazione a quelle relative alla prima, prese però queste ultime col segno cambiato.

A questo nuovo complesso di forze, supposto agente da solo, sono da attribuirsi le differenze dei due stati di deformazione sopra considerati: ma esso trovasi tutto riunito sopra una delle basi del cilindro, il quale in ogni altra sua parte resta libero da ogni azione esterna: è adunque assai naturale ritenere che la sua influenza, che localmente potrebbe anche essere molto notevole, non si estenda che ad una piccola porzione del cilindro; cessi cioè assai rapidamente di farsi sentire se si considerano punti del corpo di più in più lontani da quella base.

Resta ben inteso che questa non è affatto una dimostrazione: la vera e più convincente dimostrazione di quanto siamo venuti affermando ci vien fornita dall'esperienza ogniqualvolta sperimentiamo con una delle nostre macchine per prove di elasticità e di resistenza dei materiali.

Il saggio ha infatti sempre una forma che più o meno da vicino ricorda quella di cui stiamo occupandoci, e viene assicurato alle staffe della macchina in corrispondenza dei suoi due estremi.

Ciò si effettua però in pratica nei modi più svariati: ben di rado l'applicazione delle azioni esterne si limita alle sole basi del saggio: la maggior parte delle volte si deve per necessità di cose afferrare il saggio in corrispondenza della porzione di superficie laterale prossima alle basi: in ogni caso sarebbe ben difficile precisare la distribuzione degli sforzi che le due staffe trasmettono al saggio: si può anzi dire che la legge di ripartizione di questi sforzi varia non solo da macchina a macchina, ma, per una stessa macchina, da esperienza ad esperienza.

Malgrado ciò, ad una distanza eguale al triplo o tutto al più al quadruplo della più grande dimensione trasversale del saggio, le deformazioni appaiono dipendere esclusivamente dalla risultante degli sforzi applicati: nessuno dei nostri strumenti di misura, non esclusi i più sensibili e delicati, riesce ad avvertire l'influenza del particolare modo con cui la sollecitazione viene, nei singoli casi, trasmessa.

* * *

Una elegantissima conferma sperimentale di quanto siamo venuti dicendo nel precedente paragrafo si può ottenere cimentando nei modi più vari un prisma rettangolare di vetro ed analizzandone la distribuzione delle tensioni interne per mezzo della doppia rifrazione accidentale.

La doppia rifrazione, che si produce nel vetro, nella gelatina, nella xilonite, ed in altri simili materiali trasparenti, quando in essi per qualsiasi ragione si sviluppano delle tensioni interne, è stata segnalata per la prima volta da Brewster nel 1815 e studiata a fondo da Wertheim nel 1851.

Carus Wilson (1891) propose di utilizzare questa proprietà nello studio sperimentale dell'equilibrio delle travi: e la sua proposta ebbe seguito favorevole dopo che il Mesnager (1913) ebbe dimostrata la possibilità di eseguire l'esperienza in condizioni tali da rendersi indipendenti dai particolari valori delle costanti elastiche del vetro.

L'immediata applicabilità dei risultati così ottenuti a tutti i materiali isotropi in genere, conferisce invero a queste ricerche un interesse di prim'ordine.

Accenneremo perciò brevemente ai principii su cui esse si basano ed ai risultati a cui conducono.

Quando un fascio di raggi luminosi paralleli, attraverso un nicol polarizzatore ed un nicol analizzatore incrociati (cioè orientati coi loro due assi ad angolo retto) tra i quali si trova una lastra di vetro piana, perpendicolare al fascio e sollecitata da sforzi giacenti nel suo piano e ripartiti uniformemente su tutto il suo spessore, si manifestano sotto forma di regioni oscure tutte quelle in corrispondenza delle quali la distribuzione delle tensioni interne nel vetro ammette due piani di simmetria paralleli al fascio e rispettivamente agli assi dell'analizzatore e del polarizzatore.

Le regioni invece in corrispondenza delle quali le tensioni principali (supposte naturalmente differenti fra loro) non sono parallele a quegli assi appariranno all'osservatore più o meno intensamente illuminate.

Ciò premesso prendiamo un prisma di vetro a base rettangolare ed assoggettiamolo per esempio ad una compressione parallela al suo asse geometrico.

Di un tale caso di sollecitazione la teoria di Saint-Venant fornisce come vedremo una semplicissima soluzione secondo la quale le tensioni interne riescono tutte ed ovunque parallele a quello stesso asse.

In queste condizioni osservando il prisma quando uno dei nicols (polarizzatore od analizzatore, poco importa) ha l'asse parallelo all'asse del prisma, e l'altro ha l'asse perpendicolare, il campo dovrebbe presentarsi completamente oscurato.

Senonchè la soluzione è rigorosa soltanto quando le azioni elementari esterne distribuite sulle due basi sono alla lor volta parallele e variano da punto a punto con legge lineare.

In ogni altro caso la distribuzione e l'orientazione delle tensioni interne riusciranno, almeno in vicinanza delle basi, certamente alterate in dipendenza del diverso modo di applicazione delle pressioni esterne: e le regioni in cui la perturbazione dello stato di tensione ha luogo, si renderanno manifeste all'osservatore presentandosi a seconda dei casi più o meno intensamente illuminate.

Nella tavola II si può osservare l'aspetto che assume una delle estremità del prisma nel caso in cui la pressione sia concentrata in corrispondenza di una sottile striscia della base, parallela al fascio di raggi.

La regione illuminata si estende per una lunghezza presso a poco eguale alla larghezza del prisma. Oltrepassata questa regione l'uniforme oscuramento del campo sta a provare la coincidenza dello stato reale di tensione con quello previsto dalla teoria di Saint-Venant.

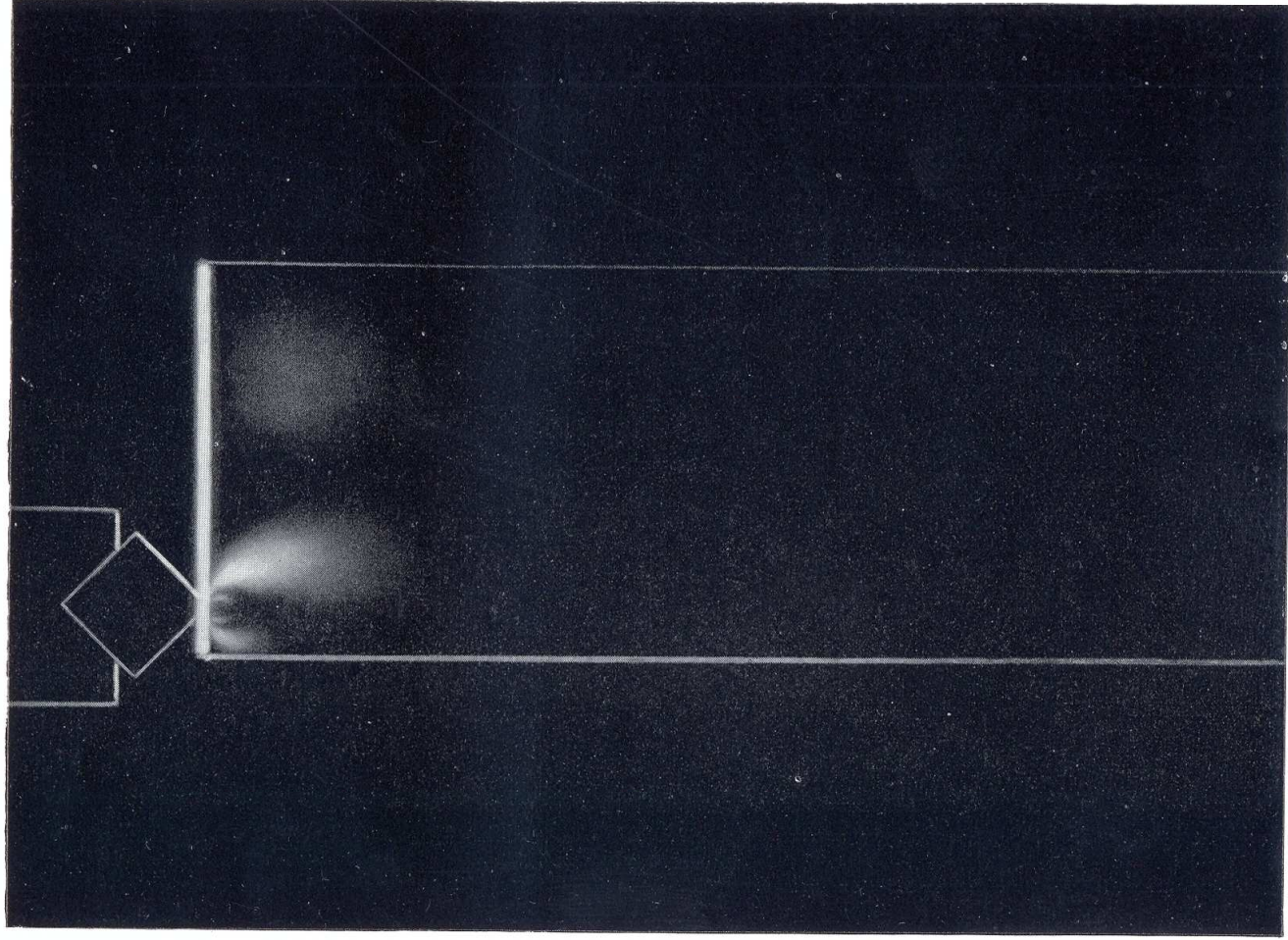
E che la coincidenza sia veramente completa ci riserviamo di provarlo ritornando a suo tempo su questa esperienza.

* * *

È facile ora rendersi ragione della importanza delle semplificazioni che le considerazioni testè svolte apportano nella risoluzione del problema.

Consideriamo invero una qualunque sezione retta del cilindro di quota z : in ogni punto di essa le tre componenti speciali di tensione non identicamente nulle

$$\sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}$$



coincidono colle componenti secondo i tre assi z, y, x della tensione unitaria relativa ad un elemento superficiale della sezione attiguo ad esso punto.

Se pertanto si immagina in corrispondenza di quella sezione tagliato in due il cilindro, le $\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ definiscono completamente il sistema di tensioni interne che, nello stato di equilibrio, una delle due porzioni di cilindro trasmette all'altra.

Come caratteristiche di questo sistema di tensioni o, come si dice più brevemente, della *sollecitazione relativa a quella sezione*, assumiamo i sei integrali

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_z &= \int \sigma_z dA \\ \mathcal{N}_z &= \int \sigma_{zy} dA & \mathcal{N}_z' &= \int \sigma_z x dA \\ Q_z &= \int (\tau_{yz}x - \tau_{zx}y) dA \\ \mathcal{T}_z &= \int \tau_{yz} dA & \mathcal{T}_z' &= \int \tau_{zx} dA \end{aligned} \quad (54)$$

estesi tutti, s'intende, alla intiera sezione A .

La prima di queste caratteristiche \mathcal{N}_z misura la componente del dato sistema di tensioni interne diretta secondo l'asse del cilindro, cioè normalmente alla sezione: essa prende perciò il nome di *sforzo normale*.

La seconda \mathcal{N}_z misura invece il momento dello stesso sistema di tensioni rispetto all'asse principale centrale d'inerzia della sezione che è parallelo all'asse x : mentre la terza \mathcal{N}_z' misura l'analogo momento (preso però con segno contrario a quello che ad esso attribuirebbero le solite convenzioni), rispetto all'altro asse principale centrale d'inerzia, parallelo ad y ; questi momenti tendono evidentemente a far ruotare la sezione attorno ad assi giacenti nel suo piano, cioè ad inflettere il cilindro: essi prendono perciò il nome di *momenti flettenti*.

La quarta caratteristica Q_z misura il momento del dato sistema di tensioni interne rispetto all'asse del cilindro: esso tende a far ruotare la sezione nel suo piano: tende cioè a produrre una torsione del cilindro; per questo esso viene designato col nome di *momento torcente*.

Finalmente le ultime due caratteristiche \mathcal{T}_z e \mathcal{T}'_z , cioè le componenti dirette secondo i due già ricordati assi principali centrali d'inerzia sono note sotto il nome di *sforzi taglianti* per la tendenza che esse rappresentano a far scorrere la sezione nel suo piano, vale a dire a tagliare, in corrispondenza di essa, il cilindro in due parti.

*
*
*

Coll'indice z che abbiamo apposto a ciascuna di quelle sei caratteristiche, si è voluto far presente che esse sono proprie della sezione di quota z , epperò sono generalmente da considerarsi come funzioni di questa quota.

È assai facile precisare fin d'ora la forma di tali funzioni. Uno infatti dei due tronchi in cui il cilindro risulta dalla sezione stessa diviso, e precisamente quello a cui appartiene la base libera $z=l$, è per ipotesi libero da ogni vincolo; deve dunque sussistere equilibrio fra il sistema di tensioni di componenti unitarie

$$-\tau_{xx}, \quad -\tau_{yz}, \quad -\sigma_z$$

che ad esso si trasmettono attraverso la sezione, ed il sistema di forze esterne applicato a quella base, le cui analoghe componenti abbiamo già indicate rispettivamente con

$$P_x, \quad P_y, \quad P_z.$$

Se pertanto noi immaginiamo caratterizzato questo sistema di forze esterne nel modo istesso con cui abbiamo convenuto di caratterizzare quel sistema di tensioni interne, se cioè poniamo

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{N} &= \int P_z dA \\ \mathcal{M} &= \int P_{zy} dA & \mathcal{N}' &= \int P_z x dA \\ \mathcal{Q} &= \int (P_{yx} - P_{xy}) dA \\ \mathcal{T} &= \int P_y dA & \mathcal{T}' &= \int P_x dA \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

gli integrali intendendosi tutti estesi alla intiera base libera, le sei equazioni della statica dei corpi rigidi ci forniscono immediatamente le relazioni semplicissime

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{N} &= \mathcal{N}_z \\ \mathcal{N} - \mathcal{T}(l-z) &= \mathcal{N}_z & \mathcal{N} - \mathcal{T}'(l-z) &= \mathcal{N}'_z \\ Q &= Q_z & \mathcal{T} &= \mathcal{T}_z \\ & & \mathcal{T}' &= \mathcal{T}'_z \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Di qui si rileva subito che in un cilindro sollecitato soltanto alle basi lo sforzo normale, il momento torcente e gli sforzi taglianti sono costanti per tutte le sezioni, mentre i momenti flettenti variano linearmente.

In ogni caso, *date le sei caratteristiche del sistema di forze esterne applicate alla base libera, restano determinate le sei caratteristiche del sistema di tensioni interne relative ad una sezione retta qualunque, e viceversa.*

Il che, messo in relazione con quanto sapevamo già in precedenza, ci conduce a concludere che, *prescindendo da due regioni limitate alle immediate vicinanze delle due basi, lo stato di tensione in corrispondenza di una sezione retta qualunque riesce completamente determinato se son date le sei caratteristiche della sollecitazione ad essa relativa.*

* * *

È proprio nell'aver intuita l'alta importanza pratica di questo risultato e la sua suscettibilità di venire applicato, almeno in via di approssimazione, anche a problemi assai più complessi di quelli di cui finora abbiamo parlato, che consiste il principale merito di Barré de Saint-Venant.

Il problema dell'equilibrio elastico dei solidi prismatici o cilindrici era stato invero già tentato nella sua forma più generale da Navier, da Poisson, da Clapeyron e da Lamé.

Quest'ultimo anzi si era di proposito dedicato allo studio dell'equilibrio di un prisma rettangolare le cui sei faccie erano cimentate da forze date in modo arbitrario. Ma Lamé non si contentava che delle soluzioni rigorose e le sue ricerche furono

lunghe quanto infruttuose. Pure egli continuò sempre ad annettere a questo problema una grandissima importanza e volle ripetutamente richiamare su di esso l'attenzione degli studiosi di tutto il mondo inducendo l'Académie des Sciences a proporlo come argomento dei suoi premi maggiori (1846-1858).

Barré de Saint-Venant fu il primo a rendersi conto della poca utilità che il problema di Lamé, anche se rigorosamente risolto, avrebbe avuto in pratica.

Egli osserva giustamente in una nota della sua già ricordata traduzione del trattato di Clebsch che, se si eccettua il solo caso della pressione uniforme prodotta da un fluido, i dati stessi di quel problema, cioè le forze distribuite punto per punto sulle sei faccìe del prisma, non sono mai conosciuti: tali forze nascono infatti sempre dal contatto del corpo dato con altri corpi, contatto il quale dipende dallo stato delle lor superfici come dalla natura dei materiali di cui son costituiti.

Le condizioni ai limiti nel problema di Lamé non potranno quindi mai essere assegnate col dovuto rigore, poichè delle azioni esterne applicate alle sei faccìe del prisma noi non conosceremo mai la legge di distribuzione vera, ma sibbene soltanto le forze e le coppie risultanti.

Il che è sufficiente se, e soltanto se, il problema viene limitato nel modo ideato da Saint-Venant e da noi esposto nei precedenti paragrafi.

Da ciò si conclude che la soluzione a cui si giunge col procedimento che qui abbiamo indicato nelle sue linee generali, e che nei capitoli che seguono svilupperemo in tutte le sue conseguenze, è non soltanto tale da bastare alle esigenze della pratica, ma è anche, nella maggior parte dei casi, tutto ciò che in pratica si potrebbe legittimamente desiderare di meglio.