II.

Analisi della deformazione.

Diremo che un corpo ha subìta una semplice *deformazione*, senza cambiamento alcuno di stato fisico o chimico, se per definirne il suo *stato attuale* basta conoscerne lo *stato iniziale* e gli spostamenti che occorre attribuire ai diversi punti materiali che lo compongono per farli passare dalla posizione che essi avevano inizialmente alla posizione che essi occupano attualmente.

Supponiamo che per effetto di una tale deformazione un punto generico del corpo sia passato dalla posizione M di coordinate x, y, z alla posizione M' di coordinate x', y', z'.

Lo spostamento MM' è individuato in grandezza, direzione e senso dalle sue tre proiezioni sui tre assi coordinati (ortogonali) a cui il corpo si immagina riferito.

Queste proiezioni

$$u = x' - x \qquad v = y' - y \qquad w = z' - z$$

le quali prendono il nome di *componenti dello spostamento* del punto M, sono funzioni delle coordinate x, y, z di M.

Noi supporremo che esse siano continue, uniformi e piccolissime rispetto alle dimensioni del corpo, e dotate di derivate parziali prime alla lor volta continue, uniformi e piccolissime a fronte dell'unità.

Consideriamo un intorno piccolissimo del punto M, e supponiamo ad esso appartenente un punto A di coordinate $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$; siano cioè ξ, η, ζ le coordinate di A rispetto alla terna di assi condotti per M parallelamente agli assi coordinati.

Avvenuta la deformazione e passati i punti M ed A rispettivamente nelle posizioni M' ed A', il luogo dei punti A' costituirà il nuovo intorno del punto M' che diremo deformato dell'intorno di M.

Diremo $x' + \xi'$, $y' + \eta'$, $z' + \zeta'$ le coordinate assolute di A' indicando con ξ', η', ζ' le coordinate del medesimo punto rispetto alla terna di assi condotti per M' parallelamente agli assi coordinati.

Indicando con du, dv, dw gli incrementi che subiscono le tre funzioni u, v, w, quando si attribuiscono alle tre variabili x, y, z rispettivamente gli incrementi ξ, η, ζ, si ha

$$x' + \xi' = x + \xi + u + du$$
$$y' + \eta' = y + \eta + v + dv$$
$$z' + \zeta' = z + \zeta + w + dw$$

epperò, a meno di infinitesimi di ordine superiore,

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \xi + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta \\ \eta' &= \eta + \frac{\partial v}{\partial x}\xi + \frac{\partial v}{\partial y}\eta + \frac{\partial v}{\partial z}\zeta \\ \zeta' &= \zeta + \frac{\partial w}{\partial x}\xi + \frac{\partial w}{\partial y}\eta + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Da queste formole, le quali esprimono le ξ', η', ζ' come funzioni lineari delle ξ, η, ζ, risulta subito che:

1° nella deformazione i piani si trasformano in piani, e le rette in rette;

2° piani e rette parallele si trasformano rispettivamente in piani e rette pure parallele.

Potremo avere un'idea ben chiara della deformazione dell'intorno di M se conosceremo in qual modo si deformerà un parallelipipedo rettangolo infinitesimo avente inizialmente un vertice in M e gli spigoli paralleli agli assi coordinati.

E poichè esso deve mantenersi, dopo la deformazione, ancora parallelipipedo, pur non essendo più in generale rettangolo, basterà trovare il modo di assegnare, oltre alla posizione del punto M', la lunghezza e la orientazione dei nuovi spigoli.

In altri termini, l'analisi della deformazione si deve poter tutta ridurre allo studio delle *alterazioni delle distanze* dei punti vicinissimi, e delle *alterazioni degli angoli* degli elementi lineari aventi un estremo in comune.

***

Detta a la distanza, piccolissima, MA e scritta la distanza $M'A'$, trasformata della prima dopo la deformazione, sotto la forma $a' = a(1+\varepsilon_a)$, il rapporto ε_a fra l'incremento di a e lo stesso a, dicesi coefficiente di allungamento o *coefficiente di dilatazione lineare* nella direzione MA.

Detto poi θ_{ab} l'angolo che fanno fra loro, prima della deformazione, due elementi MA ed MB uscenti da M, se $\theta_{ab} - \gamma_{ab}$ è l'angolo formato dagli elementi stessi dopo la deformazione, cioè dopo che essi si sono trasferiti rispettivamente in $M'A'$ ed in $M'B'$, si dice che γ_{ab} è lo *scorrimento mutuo* delle due direzioni considerate.

Detti α_x, α_y, α_z i coseni di direzione del raggio MA, ed $\alpha_x + \delta\alpha_x$, $\alpha_y + \delta\alpha_y$, $\alpha_z + \delta\alpha_z$ gli analoghi coseni del raggio $M'A'$ in cui esso si trasporta dopo la deformazione, si ha ovviamente

$$\xi = \alpha_x a$$

e

$$\xi' = (\alpha_x + \delta\,\alpha_x)\,a' = (\alpha_x + \delta\,\alpha_x)(1+\varepsilon_a)\,a$$

ond'è che la prima delle (1) si può scrivere

$$(\alpha_x + \delta\,\alpha_x)(1+\varepsilon_a) = \alpha_x + \frac{\partial u}{\partial x}\alpha_x + \frac{\partial u}{\partial y}\alpha_y + \frac{\partial u}{\partial z}\alpha_z.$$

Trascurando a primo membro il prodotto $\varepsilon_a . \delta\alpha_x$ (per essere ε_a dell'ordine di grandezza delle derivate di u), e ripetendo il medesimo ragionamento per le altre delle (1), si hanno, per le variazioni $\delta\alpha_x$, $\delta\alpha_y$, $\delta\alpha_z$ subite dai coseni direttori d'un elemento lineare qualunque per effetto della deformazione, le seguenti semplicissime espressioni:

$$\left.\begin{aligned}
\delta\alpha_x &= -\varepsilon_a\alpha_x + \frac{\partial u}{\partial x}\alpha_x + \frac{\partial u}{\partial y}\alpha_y + \frac{\partial u}{\partial z}\alpha_z \\
\delta\alpha_y &= -\varepsilon_a\alpha_y + \frac{\partial v}{\partial x}\alpha_x + \frac{\partial v}{\partial y}\alpha_y + \frac{\partial v}{\partial z}\alpha_z \\
\delta\alpha_z &= -\varepsilon_a\alpha_z + \frac{\partial w}{\partial x}\alpha_x + \frac{\partial w}{\partial y}\alpha_y + \frac{\partial w}{\partial z}\alpha_z
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Ora tra i coseni di direzione α_x , α_y, α_z del raggio MA, ed i loro corrispondenti β_x, β_y, β_z del raggio MB, sussiste notoriamente la relazione:

$$\cos\theta_{ab} = \alpha_x\beta_x + \alpha_y\beta_y + \alpha_z\beta_z$$

Similmente

$$\cos(\theta_{ab} - \gamma_{ab}) = (\alpha_x + \delta\alpha_x)(\beta_x + \delta\beta_x) + (\alpha_y + \delta\alpha_y)(\beta_y + \delta\beta_y) + \\ + (\alpha_z + \delta\alpha_z)(\beta_z + \delta\beta_z).$$

Trascurando nel secondo membro di quest'ultima i prodotti $\delta\alpha_x \,.\, \delta\beta_x$ ecc., e ponendo

$$\cos\gamma_{ab} = 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\gamma_{ab} = \gamma_{ab}$$

si ottiene

$$\gamma_{ab}\operatorname{sen}\theta_{ab} = \alpha_x \,.\, \delta\beta_x + \beta_x \,.\, \delta\alpha_x + \alpha_y \,.\, \delta\beta_y + \beta_y \,.\, \delta\alpha_y + \alpha_z \,.\, \delta\beta_z + \beta_z \,.\, \delta\alpha_z$$

Tenute presenti le (2) e le loro analoghe relative al raggio MB, questa relazione si può scrivere

$$\left.\begin{aligned} &(\varepsilon_a + \varepsilon_b)\cos\theta_{ab} + \gamma_{ab}\operatorname{sen}\theta_{ab} = 2\,[\varepsilon_x\,\alpha_x\beta_x + \varepsilon_y\,\alpha_y\beta_y + \varepsilon_z\,\alpha_z\beta_z] + \\ &\quad + \gamma_{yz}(\alpha_y\beta_z + \alpha_z\beta_y) + \gamma_{zx}(\alpha_z\beta_x + \alpha_x\beta_z) + \gamma_{xy}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

purchè si ponga

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} && \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} && \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ &\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} && \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} && \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Queste sei combinazioni delle nove derivate parziali delle componenti di spostamento hanno, nella teoria dell'elasticità, un'importanza fondamentale: esse diconsi *componenti della deformazione* nel punto M perchè la loro conoscenza è sufficiente a determinare così il coefficiente di dilatazione lineare di qualsivoglia elemento, come lo scorrimento mutuo di due qualsiansi direzioni lineari uscenti da M, con che è da considerarsi come completamente assegnata la deformazione dell'intorno di M.

Infatti supponiamo dapprima coincidenti le due direzioni MA

ed MB, cioè poniamo nella (3) $\alpha_x = \beta_x$, $\alpha_y = \beta_y$, $\alpha_z = \beta_z$, e conseguentemente $\theta_{ab} = 0$ ed $\varepsilon_b = \varepsilon_a$. Si ha

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x \alpha_x^2 + \varepsilon_y \alpha_y^2 + \varepsilon_z \alpha_z^2 + \gamma_{yz} \alpha_y \alpha_z + \gamma_{zx} \alpha_z \alpha_x + \gamma_{xy} \alpha_x \alpha_y \qquad (5)$$

dunque: *il coefficiente di dilatazione lineare di un elemento uscente da M è una funzione lineare ed omogenea delle sei componenti di deformazione relative ad M, ed una funzione quadratica ed omogenea dei coseni direttori dell'elemento.*

Supponiamo invece le due direzioni MA ed MB fra loro perpendicolari, cioè poniamo $\theta_{ab} = \frac{\pi}{2}$; la medesima formola dà:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{ab} = 2\,[\varepsilon_x \alpha_x \beta_x + \varepsilon_y \alpha_y \beta_y + \varepsilon_z \alpha_z \beta_z] + \\ + \gamma_{yz} (\alpha_y \beta_z + \alpha_z \beta_y) + \gamma_{zx} (\alpha_z \beta_x + \alpha_x \beta_z) + \gamma_{xy} (\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

dimostrando così che: *lo scorrimento mutuo di due rette ortogonali uscenti da M è una funzione lineare delle sei componenti di deformazione relative ad M e bilineare dei coseni direttori dei due elementi.*

In particolare:

per $\alpha_x = 1$, $\alpha_y = \alpha_z = 0$ dalla (5) si ricava $\varepsilon_a = \varepsilon_x$
„ $\alpha_y = 1$, $\alpha_z = \alpha_x = 0$ „ „ „ $\varepsilon_a = \varepsilon_y$
„ $\alpha_z = 1$, $\alpha_x = \alpha_y = 0$ „ „ „ $\varepsilon_a = \varepsilon_z$

dunque ε_x, ε_y, ε_z *sono i coefficienti di dilatazione lineare dei tre elementi paralleli agli assi coordinati.*

Similmente

per $\alpha_y = 1$, $\alpha_z = \alpha_x = 0$
e $\beta_z = 1$, $\beta_x = \beta_y = 0$ dalla (6) si ha $\gamma_{ab} = \gamma_{yz}$
per $\alpha_z = 1$, $\alpha_x = \alpha_y = 0$
e $\beta_x = 1$, $\beta_y = \beta_z = 0$ „ „ $\gamma_{ab} = \gamma_{zx}$
per $\alpha_x = 1$, $\alpha_y = \alpha_z = 0$
e $\beta_y = 1$, $\beta_z = \beta_x = 0$ „ „ $\gamma_{ab} = \gamma_{xy}$

dunque γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy} *sono gli scorrimenti mutui dei medesimi elementi presi a due a due.*

* * *

I teoremi che seguono renderanno anche più completa la giustificazione del nome dato alle sei grandezze $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots \gamma_{xy}$.

Ogni deformazione le cui componenti siano ovunque nulle non differisce da un moto rigido.

È chiaro intanto che se il corpo si muove rigidamente, cioè si sposta nello spazio senza deformarsi, il coefficiente di dilatazione lineare ε_a dev'essere nullo in ogni punto, qualunque sia la direzione $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ che si considera, epperò nella (5) debbono annullarsi identicamente $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots \gamma_{xy}$.

Inversamente dimostreremo che, se per qualsivoglia punto di un corpo, cioè per qualunque valore di x, y, z, sono soddisfatte le sei condizioni

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0 \qquad \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

le funzioni u, v, w hanno necessariamente la forma caratteristica degli spostamenti di un sistema rigido.

Incominciamo coll'osservare che le prime tre delle condizioni imposte hanno un significato ben evidente: la prima ad esempio stabilisce semplicemente che u dev'essere indipendente da x.

La stessa condizione derivata rispetto ad y diviene

$$0=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$

Derivando invece l'ultima rispetto ad y, e tenendo presente la seconda, si trova

$$0=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Derivando infine l'ultima rispetto a z e la penultima rispetto ad y e sommando, si ottiene, in virtù della quarta:

$$0=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=$$

$$=2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}$$

Ora questi risultati si possono riassumere scrivendo

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

e ci dicono in modo ovvio che $\frac{\partial u}{\partial y}$ è costante, cioè che u dipende linearmente da y.

Similmente si dimostra che $\frac{\partial u}{\partial z}$ è costante, cioè che u dipende linearmente da z.

Analoghe conclusioni si potrebbero trarre nei riguardi così di v come di w. Dopo di che riesce facile interpretare direttamente le ultime tre delle condizioni imposte: l'ultima di esse ci dice per esempio che il coefficiente di y nell'espressione di u deve essere eguale e di segno contrario al coefficiente di x nell'espressione di v.

In base a questo, ed agli analoghi risultati che si traggono dalle altre due, si può immediatamente concludere che le espressioni delle tre componenti degli spostamenti debbono essere della forma

$$u = l + qz - ry$$
$$v = m + rx - pz$$
$$w = n + py - qx$$

con l, m, n, p, q, r costanti in tutto il corpo, come si voleva dimostrare.

Come immediata conseguenza di ciò che precede si può dimostrare che *due deformazioni caratterizzate ovunque dagli stessi valori delle sei componenti di deformazione, non differiscono che per un moto rigido del corpo.*

Siano infatti u', v', w' ed u'', v'', w'' i due sistemi di spostamenti pei quali si ha

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial u''}{\partial x}, \quad \frac{\partial v'}{\partial y} = \frac{\partial v''}{\partial y}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{\partial v''}{\partial x} + \frac{\partial u''}{\partial y}$$

e si considerino gli spostamenti

$$u = u' - u'', \quad v = v' - v'', \quad w = w' - w''$$

Si ha evidentemente

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \ldots\ldots, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

epperò

$$\begin{aligned} u' - u'' &= l + qz - ry \\ v' - v'' &= m + rx - pz \\ w' - w'' &= n + py - qx \end{aligned}$$

Si può pertanto passare dal primo al secondo sistema di spostamenti mediante un semplice moto rigido del corpo nello spazio.

Una deformazione è dunque pienamente determinata quando se ne conoscono in ogni punto i valori delle sei componenti ε_x, $\varepsilon_y, \ldots, \gamma_{xy}$.

***

A questo punto si presenta spontaneo il problema: *date ad arbitrio sei funzioni* $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots, \gamma_{xy}$ *delle coordinate, possono queste sempre assumersi come componenti di una deformazione possibile?*

In altri termini: *esistono sempre tre funzioni* u, v, w *dalle quali le funzioni date possano farsi derivare secondo le* (4)?

È facile convincersi che ad un tale quesito devesi, in generale, rispondere negativamente. Nelle (4) stesse sono infatti implicite certe relazioni tra le $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots, \gamma_{xy}$, le quali si possono facilmente ricavare eliminando le u, v, w, per via di derivazione. Si ha infatti

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y\, \partial z^2} \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial z\, \partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^2\, \partial z} + \frac{\partial^3 v}{\partial z^2\, \partial y}$$

dalle quali, direttamente e mediante permutazioni circolari dei simboli, si ricavano le tre relazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\, \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z\, \partial x} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\, \partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Per altra parte si ha

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial y\,\partial x^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial z\,\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y} \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2\,\partial z} + \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$$

onde si deducono in modo analogo le altre tre relazioni

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\,\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) \\ 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z\,\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) \\ 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

che, unitamente alle precedenti, sono *necessarie* per l'esistenza delle u, v, w.

Notiamo però che, ove ci si limiti a considerare l'intorno del punto generico M come isolato ed indipendente dal resto del corpo, nulla ci impedisce di assumere un sistema comunque arbitrario di valori $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots, \gamma_{xy}$ come componenti di una deformazione effettivamente realizzabile della particella considerata. Le sei equazioni testè scritte stanno ad esprimere soltanto le condizioni che debbono essere verificate se si vuole che tutte le deformazioni dei singoli elementi, definite dai valori assunti da sei funzioni $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots, \gamma_{xy}$ delle coordinate, arbitrariamente date, siano conciliabili fra loro, cioè individuino nel loro complesso una deformazione dell'intiero sistema, *continua*, vale a dire realizzabile senza rotture nè sovrapposizioni di materia.

Noi chiameremo pertanto le (7) ed (8) *condizioni di congruenza*, denotando brevemente col nome di *congruente* ogni sistema di componenti di deformazione il quale soddisfi a queste condizioni, cioè rappresenti una deformazione del corpo effettivamente realizzabile se questo, soggetto a forze tutte esplicitamente date, è, o si immagina, del tutto libero nello spazio: si può infatti, in questa ipotesi, dimostrare che le (7) insieme colle (8) sono *sufficienti* per l'esistenza delle u, v, w.

È noto però che i corpi intorno al cui comportamento vertono le nostre ricerche, si possono presentare soggetti a vincoli che ne limitano, più o meno, non soltanto la mobilità, ma anche la deformabilità.

In queste condizioni non ogni sistema di componenti di spostamento rappresenta una deformazione effettivamente realizzabile: può darsi infatti che il sistema di componenti di spostamento u, v, w che corrisponde ad un dato sistema congruente di componenti della deformazione, conduca ad una nuova configurazione del corpo non compatibile coi vincoli ad esso imposti.

Ora noi possiamo dire che una deformazione è effettivamente *possibile* soltanto quando la nuova configurazione a cui essa conduce è compatibile coi vincoli.

Perchè ciò avvenga non basta dunque che le $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots, \gamma_{xy}$ soddisfino alle condizioni di congruenza, ma occorre anche che il corrispondente sistema delle u, v, w soddisfi a certe altre condizioni, dipendenti dalla natura dei vincoli, e che noi chiameremo *equazioni di compatibilità.*

* * *

In linea generale — e senza pregiudizio di quel che diremo quando dovremo occuparci dei singoli problemi concreti che più frequentemente si presentano all'ingegnere nelle applicazioni — i vincoli possono ridursi a tre tipi caratteristici: punti fissi, punti obbligati a muoversi sopra una linea fissa, e punti costretti a muoversi sopra una superficie fissa.

È facile allora precisare la forma delle equazioni di compatibilità. Infatti dire che un dato punto generico del corpo sta su di una superficie fissa data, equivale a dire che le sue coordinate x, y, z verificano l'equazione della superficie

$$f\,(x, y, z) = 0.$$

Se perciò, nel passare dalla posizione di coordinate x, y, z alla posizione vicinissima di coordinate $x+u$, $y+v$, $z+w$, il punto in discorso continua a mantenersi sulla detta superficie, dovrà sussistere, oltre alla precedente, anche l'eguaglianza

$$f\,(x+u,\ y+v,\ z+w) = 0.$$

Se si esclude la possibilità che la superficie data presenti nell'intorno del punto considerato dei punti singolari, si ha, vista la supposta piccolezza della u, v, w, a meno di infinitesimi di ordine superiore,

$$f(x+u, y+v, z+w) = f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w$$

Si trova così l'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w = 0$$

Ciò premesso, immaginiamo che per ogni punto della superficie del corpo siano definite tre funzioni f, g, h, regolari, delle coordinate, tali che se x, y, z sono le coordinate del punto in discorso quando il sistema si trova nella sua configurazione naturale, si abbia

$$f(x, y, z) = 0 \qquad g(x, y, z) = 0 \qquad h(x, y, z) = 0$$

E supponiamo che le componenti u, v, w di un qualunque possibile spostamento di quel tal punto debbano in ogni caso soddisfare alle equazioni di compatibilità

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w = 0 \\ &\frac{\partial g}{\partial x} u + \frac{\partial g}{\partial y} v + \frac{\partial g}{\partial z} w = 0 \\ &\frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial h}{\partial y} v + \frac{\partial h}{\partial z} w = 0 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

È chiaro allora che se il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix}$$

è diverso da zero, le tre equazioni di compatibilità scritte non ammettendo altra soluzione che quella, evidente

$$u = v = w = 0$$

il punto dovrà considerarsi come *fisso*.

Lo stesso punto dovrà invece riguardarsi come *mobile* ogniqualvolta quelle equazioni risultano simultaneamente soddisfatte per infiniti sistemi di valori non tutti nulli delle variabili u, v, w per il che notoriamente occorre e basta che sia nullo il determinante sopra ricordato.

A seconda che tale determinante avrà poi per caratteristica 2, ovvero 1, ovvero 0, il grado di libertà del punto che si considera risulterà eguale ad 1, ovvero a 2, ovvero a 3.

Nel primo caso, geometricamente caratterizzato dall'avere i tre piani tangenti nel punto dato alle tre superficie di equazioni

$$f(x, y, z) = 0 \qquad g(x, y, z) = 0 \qquad h(x, y, z) = 0$$

una retta in comune, il punto si comporta come se fosse vincolato a muoversi sopra una *linea fissa.*

Nel secondo, al quale corrisponde, dal punto di vista geometrico, l'esistenza di un unico piano tangente nel punto dato a tutte e tre le ricordate superficie, il punto si comporta come se fosse vincolato a muoversi sopra una *superficie fissa.*

Nel terzo caso infine, il quale si presenta quando si ha identicamente

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \ldots = \frac{\partial h}{\partial z} = 0$$

le equazioni di compatibilità risultano soddisfatte per qualsiasi sistema di valori delle tre componenti di spostamento u, v, w: il punto è perciò da considerarsi come *libero* da ogni specie di vincolo