

Fondamenti della teoria delle travi inflesse.

È facile convincersi che i quattro casi particolari di deformazione da noi studiati nei precedenti capitoli, insieme coi due altri che dal secondo e dal quarto si deducono mediante scambio degli assi coordinati x ed y , esauriscono completamente il problema di Saint-Venant e ne determinano la soluzione, qualunque sia il complesso di forze esterne che sollecita la base libera del cilindro.

Questo complesso infatti si può sempre decomporre in tre forze \mathcal{N} , \mathcal{T} e \mathcal{T}' aventi per linee d'azione l'asse del cilindro e gli assi principali centrali di inerzia della base libera, ed in tre coppie di momenti \mathcal{M} , \mathcal{M}' e \mathcal{Q} giacenti nei tre piani determinati da quelle stesse tre rette.

E le caratteristiche così dello stato di deformazione come dello stato di tensione prodotto nel cilindro da un tal complesso di forze, si potranno per conseguenza ottenere applicando il principio di sovrapposizione degli stati di equilibrio, in modo non dissimile da quello già adottato da noi nello studio della estensione accompagnata da due flessioni.

In pratica l'analisi dei problemi più complessi non si spinge mai così a fondo come noi abbiamo fatto nei casi più semplici.

Qui infatti noi avevamo il dovere di approfondire il problema in tutti i suoi dettagli nell'intento di farci un'idea, quanto più possibile chiara e precisa, del meccanismo della deformazione, e di determinarne nello stesso tempo colla maggiore esattezza tutte quelle caratteristiche che potevano all'occorrenza prestarsi ad una verifica sperimentale della teoria.

Nel campo delle applicazioni, invece, per ragioni che abbiamo già dichiarate in altra occasione [pagg. 111 e 112], i dettagli

interessano poco: basta tener presenti le linee generali del fenomeno; e a ciò la teoria da noi svolta si presta assai bene conducendo a formole che sono anche molto semplici e quindi molto facilmente traducibili in numeri.

Volendo dare un'idea di questo modo di procedere, senza troppo dilungarci in calcoli che per se stessi hanno un interesse molto relativo, noi ci limiteremo ad un caso pratico: supporremo cioè che il cilindro sia simmetrico rispetto al piano coordinato yz , ed ammetteremo che in questo medesimo piano giaccia la risultante delle forze esterne applicate alla base libera; la quale risultante si potrà perciò sempre caratterizzare mediante i tre soli parametri \mathcal{N} , \mathcal{M} , \mathcal{T} .

Nel far ciò teniamo però ad avvertire che queste limitazioni non sono essenziali per le considerazioni che verremo facendo: i teoremi che avremo occasione di stabilire nei prossimi paragrafi hanno in realtà una portata alquanto maggiore di quella che le nostre dimostrazioni farebbero supporre.

* * *

Consideriamo una qualunque sezione retta di quota z : per le stesse ragioni che, in condizioni analoghe, si sono addotte a pag. 135, si calcoleranno le componenti speciali di tensione in ciascun punto sommando algebricamente i valori che alle stesse componenti spetterebbero ove le varie sollecitazioni elementari che coesistono in quella sezione vi agissero separatamente.

Nelle ipotesi fatte, tali sollecitazioni elementari si riducono ovviamente a tre: uno sforzo normale, un momento flettente ed uno sforzo tagliante, che indicheremo al solito genericamente con

$$\mathcal{N}_z, \mathcal{M}_z, \mathcal{T}_z$$

Perciò la tensione normale deve avere un'espressione della forma

$$\sigma_z = \frac{\mathcal{N}_z}{A} + \frac{\mathcal{M}_z y}{J} \quad (91)$$

mentre le tensioni tangenziali, se si accettano i risultati della teoria approssimata svolta nel capitolo precedente, si possono scrivere

$$\tau_{yz} = \frac{\mathcal{T}_z M}{bJ} \quad \tau_{zx} = 0 \quad (92)$$

Di qui discende un'espressione dell'energia potenziale elastica assai notevole per la sua grande semplicità.

Si ha infatti, come si è già detto a pag. 198,

$$\varphi = \frac{\sigma_z^2}{2E} + \frac{\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}{2G}$$

Sostituendo alle tensioni i valori trovati poc'anzi si ricava immediatamente

$$\varphi = \frac{\mathcal{N}_z^2}{2EA^2} + \frac{\mathcal{N}_z^2 y^2}{2EJ^2} + \frac{\mathcal{N}_z \mathcal{N}_z y}{EAJ} + \frac{\mathcal{T}_z^2 M^2}{2GJ^2 b^2}$$

Ciò posto, si consideri il tronco infinitesimo di cilindro compreso fra la data sezione di quota z ed una sezione ad essa vicinissima di quota $z + dz$. L'energia elastica per un tal tronco sarà

$$d\Phi = dz \int_A \varphi dA$$

Eseguendo l'operazione indicata, e ponendo al solito

$$\int dA = A, \quad \int y dA = 0, \quad \int y^2 dA = J$$

e ricordando l'espressione (90) del fattore di taglio

$$t = \frac{1}{A \varrho^4} \int_A \left(\frac{M}{b} \right)^2 dA$$

si trova

$$d\Phi = \frac{\mathcal{N}_z^2 dz}{2EA} + \frac{\mathcal{N}_z^2 dz}{2EJ} + t \frac{\mathcal{T}_z^2 dz}{2GA} \quad (93)$$

Ma i tre termini che costituiscono il secondo membro altro non sono che i valori che la stessa energia elastica presenterebbe ove il tronco di cilindro fosse cimentato dalle tre sollecitazioni semplici prese separatamente.

Se ne conclude adunque che, quando quelle tre sollecitazioni coesistono insieme, il lavoro di deformazione di un tronco elementare di cilindro compreso fra due sezioni rette vicinissime si può ritenere eguale alla somma dei lavori di deformazione che nello stesso tronco si verificherebbero ove su di esso le varie sollecitazioni semplici agissero separatamente.

* * *

Passiamo ora all'analisi delle deformazioni, e più precisamente alla determinazione dell'equazione della *linea elastica*, cioè della deformata dell'asse geometrico del cilindro.

Combinando fra loro le espressioni delle componenti di spostamento relative alle tre sollecitazioni semplici \mathcal{N} , \mathcal{M} e \mathcal{T} , e facendovi poi

$$x = y = 0$$

si otterranno le espressioni generali delle componenti di spostamento del punto generico dell'asse

$$\left. \begin{aligned} u &= 0 \\ v &= -\frac{\mathcal{N}}{EJ} \frac{z^2}{2} + \frac{\mathcal{T}}{EJ} \left[\frac{z^2}{2} \left(l - \frac{z}{3} \right) + bz \right] \\ w &= \frac{\mathcal{N}}{EA} z \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Se diciamo x' , y' , z' le coordinate del punto stesso dopo la deformazione, sarà

$$x' = 0 \quad y' = v \quad z' = z + w$$

Dalla terza di queste equazioni si ricaverebbe

$$z = \frac{z'}{1 + \frac{\mathcal{N}}{EA}}$$

Sostituendo nella seconda a z questa sua espressione si otterrebbe l'equazione della linea elastica nel piano yz .

Si osservi però che essendo la costante E , per tutti i materiali di cui intendiamo interessarci, assai grande, z' differirà pochissimo da z : potremo perciò sostituire senz'altro z a z' .

Togliendo poi gli accenti alle coordinate del punto generico della linea elastica, si avrà l'equazione

$$y = -\frac{\mathcal{N}}{EJ} \frac{z^2}{2} + \frac{\mathcal{T}}{EJ} \left[\frac{z^2}{2} \left(l - \frac{z}{3} \right) + bz \right] \quad (95)$$

Derivando rispetto a z si ottiene

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{\mathcal{M}}{EJ}z + \frac{\mathcal{T}}{EJ} \left[z \left(l - \frac{z}{2} \right) + b \right] \quad (96)$$

e successivamente

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{\mathcal{M} - \mathcal{T}(l-z)}{EJ} \quad (97)$$

ossia

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{\mathcal{M}_z}{EJ}$$

D'altra parte, detto r_z il raggio di curvatura della linea elastica in corrispondenza del punto generico considerato, si ha dal calcolo

$$\frac{1}{r_z} = \frac{\frac{d^2y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

E poichè, per la già ricordata grandezza di E , la derivata $\frac{dy}{dz}$ è essa pure assai piccola, il suo quadrato può sempre venir trascurato a fronte dell'unità, sicchè si può scrivere, sostituendo alla derivata seconda il suo valore già trovato,

$$\frac{1}{r_z} = -\frac{\mathcal{M}_z}{EJ} \quad (98)$$

Di qui il teorema:

La curvatura della linea elastica è in ciascun punto proporzionale al corrispondente valore del momento flettente.

Come corollario si deduce che se, in corrispondenza di una sezione retta del cilindro, si ha

$$\mathcal{M}_z = 0$$

ivi anche la curvatura della linea elastica deve riescir nulla: il che è quanto dire che *la linea elastica deve presentare un punto di flesso.*

* * *

Sui due teoremi testè stabiliti si fonda tutta la teoria delle travi inflesse: ecco in qual modo.

Le travi, del cui studio statico deve occuparsi l'ingegnere, non soddisfano quasi mai alle condizioni che noi abbiamo dovuto imporre nell'enunciare il problema di Saint-Venant.

Esse vengono infatti quasi sempre sollecitate, non soltanto da forze applicate alle due basi, ma anche da forze distribuite sulla lor superficie laterale o addirittura su tutta la loro massa, sicchè le sei caratteristiche dello stato di tensione relativo ad una sezione retta generica non sono più della forma (56), ma devono considerarsi come funzioni affatto generiche della variabile z .

Inoltre è assai frequente il caso in cui la sezione retta della trave varii con z ; in cui cioè siano da considerarsi come funzioni di questa variabile anche le caratteristiche geometriche come A, J, J', J_0 .

Può infine anche accadere che l'asse stesso della trave non sia rettilineo ma incurvato ad arco.

Può cioè accadere che la trave sia generabile da un'area piana di forma e dimensioni variabili con continuità, che si muova nello spazio mantenendosi sempre normale alla linea descritta dal suo baricentro.

In tutti questi casi nulla impedisce di conservare a questa linea il nome di *asse geometrico della trave*, e di continuare a chiamare *sezioni rette* di questa le successive posizioni assunte nel suo movimento dall'area generatrice.

E, se si assumono come assi di riferimento i due assi principali centrali d'inerzia della sezione generica e la normale a questa pel baricentro, si può anche continuare a caratterizzare il sistema delle tensioni che, attraverso ad essa sezione generica si trasmettono nella trave deformata, con quelle medesime caratteristiche che abbiamo in passato adottate: caratteristiche le quali dovranno però considerarsi come funzioni generiche di un nuovo parametro s , che potrebbe essere, ad esempio, la lunghezza dell'arco di asse compreso fra la sezione considerata ed una sezione fissa scelta ad arbitrio.

Ciò posto, se i raggi di curvatura dell'asse geometrico si mantengono ovunque molto grandi a fronte delle dimensioni dell'area generatrice, si usa, in pratica, ammettere che, date quelle sei caratteristiche per ciascuna sezione, le tensioni interne siano, punto per punto, quelle stesse che si avrebbero se la sezione appartenesse ad un cilindro sollecitato in modo conforme alle ipotesi di Saint-Venant.

Nel caso, particolarmente semplice, a cui abbiamo detto di voler limitare le nostre considerazioni, si è così condotti a calcolare l'energia potenziale elastica con una formola del tipo

$$\Phi = \int_s \frac{\mathcal{N}_s^2 ds}{2EA} + \int_s \frac{\mathcal{M}_s^2 ds}{2EJ} + \int_s^t \frac{\mathcal{T}_s^2 ds}{2GA} \quad (99)$$

quale, nelle ipotesi fatte, discende come immediata conseguenza dalla (93).

* * *

Per ciò che riguarda poi le deformazioni si procede basandosi su di un artificio semplicissimo, che ora indicheremo brevemente riferendoci anche qui al caso (l'unico che interessi in pratica) in cui l'asse geometrico della trave è, tanto prima che dopo la deformazione, contenuto nel solito piano coordinato yz .

Sia r_s^* il raggio iniziale di curvatura dell'asse della trave in corrispondenza di un suo punto generico, ed r_s il raggio che, in corrispondenza dello stesso punto, l'asse presenterà dopo avvenuta la deformazione.

Immaginiamo per un momento che la curvatura iniziale dell'asse possa, vista la sua piccolezza, attribuirsi all'azione di un momento flettente \mathcal{M}_s^* supposto agente su di una trave fittizia ad asse rettilineo per la quale valgano le formole della teoria di Saint-Venant.

La curvatura finale dovrà allora intendersi realizzata per opera di un momento flettente eguale alla somma algebrica del momento fittizio \mathcal{M}_s^* e del momento \mathcal{M}_s effettivamente esistente nella sezione retta che ha il punto considerato per baricentro.

S'intende che noi ammettiamo implicitamente che la doppia flessione possa sulla trave fittizia realizzarsi senza che in nessun punto i limiti di elasticità del materiale siano superati.

In queste condizioni si può immediatamente applicare al caso attuale la (98).

Si ottengono così le due equazioni

$$\frac{1}{r_s^*} = -\frac{\mathcal{M}_s^*}{EJ} \quad \frac{1}{r_s} = -\frac{\mathcal{M}_s^* + \mathcal{M}_s}{EJ}$$

dalle quali, eliminando \mathcal{M}_s^* , si ricava

$$\frac{1}{r_s} - \frac{1}{r_s^*} = -\frac{\mathcal{M}_s}{EJ} \quad (100)$$

Le ipotesi su cui si basa questo modo di procedere non sono, per verità, suscettibili di altra giustificazione che non sia la impossibilità, in cui quasi sempre ci si trova in pratica, di far meglio.

Non sarebbe qui d'altronde il caso di discuterne la portata e le conseguenze.

È piuttosto il caso di avvertire che l'accordo dell'esperienza coi risultati a cui queste ipotesi conducono, si mantiene, il più delle volte, molto soddisfacente.

* * *

Un caso particolare merita di essere qui espressamente segnalato, non soltanto per la sua importanza, ma anche perchè da esso il lettore si farà un'idea adeguata dell'ampiezza delle applicazioni e della portata dei vantaggi che dai procedimenti approssimati per la trattazione delle travi inflesse si possono trarre.

Ritorniamo perciò col pensiero al caso della trave ad asse rettilineo e supponiamo che le forze ad essa applicate — che per semplicità riterremo tutte note, per es. tutte esplicitamente date — siano tutte dirette normalmente all'asse.

Tanto per fissar le idee su di un caso concreto, frequentissimo nella pratica, immagineremo che l'asse geometrico AB della trave (fig. 38) sia disposto orizzontalmente, e che le forze siano tutte verticali.

Che in queste condizioni il problema si semplifichi sensibilmente, è ovvio: lo sforzo normale riesce infatti identicamente

nullo in tutte le sezioni rette della trave: per conseguenza nessuno spostamento di punti dell'asse geometrico sarà da prevedersi nella direzione (orizzontale) dell'asse.

Ciascun punto dell'asse geometrico si sposterà normalmente all'asse stesso (cioè verticalmente), ed il suo spostamento coinciderà colla corrispondente ordinata della linea elastica.

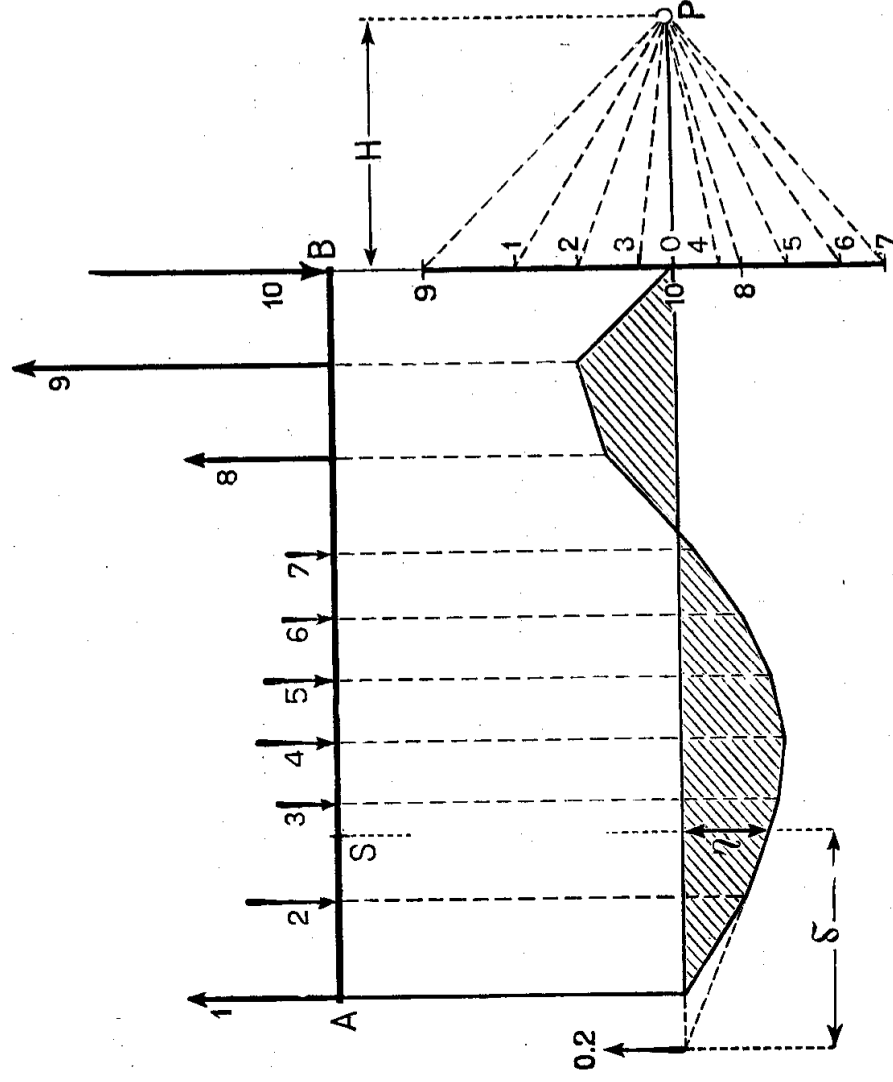


Fig. 88.

Ciò premesso, colleghiamo le forze date con un poligono funicolare. Poichè il sistema considerato deve essere in equilibrio — ed è legittimo supporre che i dati del problema siano stati scelti non a caso, ma in modo che questa condizione fondamentale sia in ogni caso soddisfatta — tanto la retta delle forze come il poligono funicolare risulteranno chiusi ⁽¹⁾.

Scelta pertanto una sezione qualunque S della trave, e condotta per S la verticale, questa intersecherà due lati del poli-

⁽¹⁾ Cfr. *I fondamenti della Statica*, pag. 142.

gono funicolare che possono riguardarsi come i lati estremi di ciascuna delle due parti in cui il poligono stesso risulta diviso.

E poichè queste due parti collegano rispettivamente le forze che agiscono sulla porzione di trave che sta a sinistra della sezione S , e quelle che agiscono sulla porzione di trave che sta a destra di S , quei due lati debbono, col loro punto di incontro, individuare la verticale, linea d'azione delle due risultanti (naturalmente eguali e contrarie) di quei due sistemi parziali di forze.

In figura la risultante indicata è quella delle forze agenti alla sinistra della sezione: la sua grandezza ed il suo senso si rilevano direttamente dalla retta delle forze.

Data la sua particolare direzione (parallela al piano della sezione) questa risultante ci dà senz'altro la misura dello sforzo tagliante. Se poi la si moltiplica per il braccio di leva, vale a dire per la distanza della sua linea d'azione dal baricentro della sezione, si ottiene il momento flettente.

Ma dalla figura appare chiaramente che il segmento $\overline{0,2}$ della retta delle forze che rappresenta quella risultante, sta al segmento η che il poligono funicolare intercetta sulla verticale per S come la distanza polare H sta al braccio di leva δ .

Ciò è quanto dire che invece di assumere come misura del momento flettente il prodotto

$$\overline{0,2} \times \delta$$

si può anche servirsi dell'equivalente prodotto

$$H \times \eta$$

con questo vantaggio che, mentre i due fattori del primo prodotto variano entrambi (in generale) al variare della posizione della sezione, nel secondo prodotto, uno dei fattori, e precisamente la distanza polare H , si mantiene costante, epperò il momento flettente viene a variare proporzionalmente all'altro fattore η .

In altre parole, l'area racchiusa entro il poligono funicolare si potrà considerare come il diagramma del momento flettente, nel senso che l'ordinata di tale diagramma, letta sulla verticale di una sezione generica della trave, misura il momento flettente relativo a tale sezione, ridotto alla base H .

Si noti bene, prima di procedere oltre, che il momento flettente (come un qualunque momento di una qualunque forza) è

una grandezza che risulta dal prodotto di una forza per una lunghezza: e che come tale noi lo abbiamo in un primo tempo definito moltiplicando la forza $0,2$ per la distanza δ .

Le stesse dimensioni dovrà naturalmente avere l'equivalente prodotto della distanza polare H per l'ordinata η : il che vuol dire che, dei due segmenti H ed η del disegno, l'uno andrà sempre considerato come una forza, l'altro come una distanza. Quale dei due sia la forza, e quale la distanza, è, dal punto di vista teorico, perfettamente indifferente.

In pratica noi preferiamo attribuire le dimensioni di una forza ad H , il che vuol dire leggere la distanza polare nella scala delle forze, cioè nella scala adottata per rappresentare sulla retta delle forze i carichi agenti sulla trave; nella scala stessa dunque in cui avremmo letta la risultante $0,2$.

L'ordinata η va allora letta nella scala delle lunghezze, cioè nella scala di cui ci si è serviti per rappresentare in disegno l'asse geometrico AB , ed in cui si sarebbe quindi dovuto leggere il braccio δ .

Ciò posto, immaginiamo isolata, nel diagramma dei momenti flettenti, una striscia infinitesima limitata dalle verticali condotte per due sezioni vicinissime di ascisse z e $z + dz$ (fig. 39).

Sia η l'ordinata del diagramma corrispondente all'ascissa z , e quindi

$$\mathcal{M}_z = H \cdot \eta$$

il corrispondente valore del momento flettente.

Se nell'equazione (97) della linea elastica

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dz}\right)}{dz} = -\frac{\mathcal{M}_z}{EJ}$$

si sostituisce ad \mathcal{M}_z la sua espressione, si ottiene facilmente la relazione

$$d\left(\frac{dy}{dz}\right) = -\frac{\eta \cdot dz}{EJ} \frac{H}{H}$$

la quale stabilisce la proporzionalità tra l'incremento infinitesimo che subisce l'inclinazione $\frac{dy}{dz}$ della tangente alla linea elastica nel passaggio dalla sezione di ascissa z a quella vicinissima di ascissa $z + dz$, e l'area $\eta \cdot dz$ che, a meno di infinitesimi d'ordine superiore, misura la striscia elementare corrispondente del diagramma dei momenti flettenti.

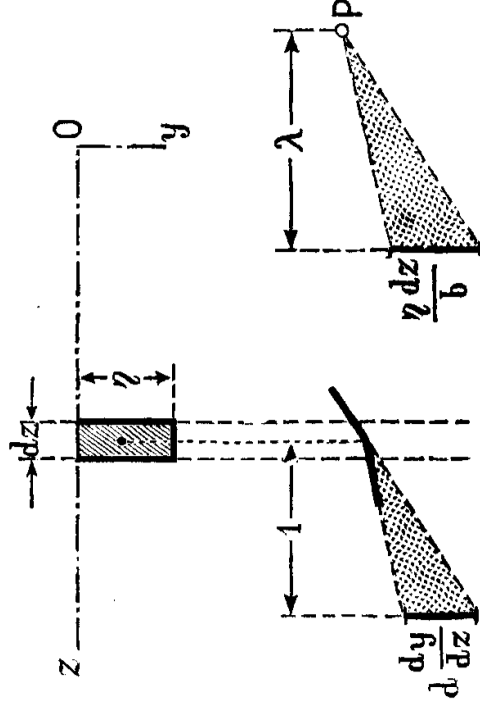


Fig. 39.

Se pertanto si conviene di rappresentare le aree $\eta \cdot dz$ mediante segmenti verticali, previa la necessaria riduzione ad una base b , si potrà sempre dedurre l'inclinazione della tangente alla linea elastica in corrispondenza di una sezione qualunque dalla inclinazione della tangente relativa ad una sezione vicinissima, considerando che esse tangenti debbono riuscire parallele ai due raggi che proiettano gli estremi del segmento

$$\frac{\eta \cdot dz}{b}$$

da un polo convenientemente scelto alla distanza polare

$$\lambda = \frac{EJ}{Hb}$$

Il lettore risconterà facilmente che λ ha le dimensioni di una lunghezza: la distanza polare, calcolata in base alla formola precedente, dovrà dunque essere tracciata in disegno nella scala delle lunghezze, vale a dire — lo ripetiamo ancora una volta a

scanso di equivoci — nella scala stessa in cui è stato eseguito il disegno della trave.

Quanto al segno *meno* che compare nella equazione differenziale della linea elastica, e quindi anche nella relazione di proporzionalità che poc'anzi ne abbiamo dedotta, è facile vedere come esso stia semplicemente ad indicare che il polo dev'essere scelto, per rapporto alla retta su cui son riportati i segmenti da proiettare, da banda tale che, a valori di η (e quindi di \mathcal{M}_z) positivi, vengano a corrispondere incrementi negativi di $\frac{dy}{dz}$.

* * *

Consideriamo ora un tronco finito di trave, compreso fra due sezioni rette qualunque: lungo il quale tronco, modulo di elasticità del materiale e momento d'inerzia della sezione, si mantengano costanti.

La relazione geometrica che noi abbiamo fatta discendere dall'equazione differenziale della linea elastica ci permette allora di stabilire l'identità tra quest'ultima ed una curva funicolare di un carico fittizio di cui il diagramma dei momenti rappresenta la legge di distribuzione.

E quel che si è detto dell'incremento elementare di inclinazione della tangente alla linea elastica per il tronco di lunghezza infinitesima dz , si può ripetere, a proposito dell'incremento finito di inclinazione, che la stessa tangente subirà lungo il tronco di trave considerato, sempre quando per grandezza del carico fittizio si assuma l'area (ridotta alla solita base) della corrispondente striscia finita di diagramma dei momenti flettenti, e per linea d'azione di esso la verticale baricentrica della striscia.

Nè v'è ragione che vieti che un tale procedimento venga esteso, per successivi tronchi, a tutta la lunghezza della trave. S'intende che, se dall'uno all'altro tronco varia il modulo di elasticità E del materiale, ovvero varia il momento d'inerzia J della sezione, o più generalmente variano l'una e l'altra caratteristica, dovrà variarsi in conseguenza anche la distanza polare, come la sua espressione

$$\lambda = \frac{EJ}{Hb}$$

lo esige, e la costruzione assumerà l'andamento chiaramente indicato nella fig. 40.

Naturalmente, invece di una curva funicolare che, con certe cautele di cui discorreremo più innanzi, è interpretabile come linea elastica della trave, si otterrà una poligonale — che noi continueremo a chiamare poligono funicolare, estendendo per

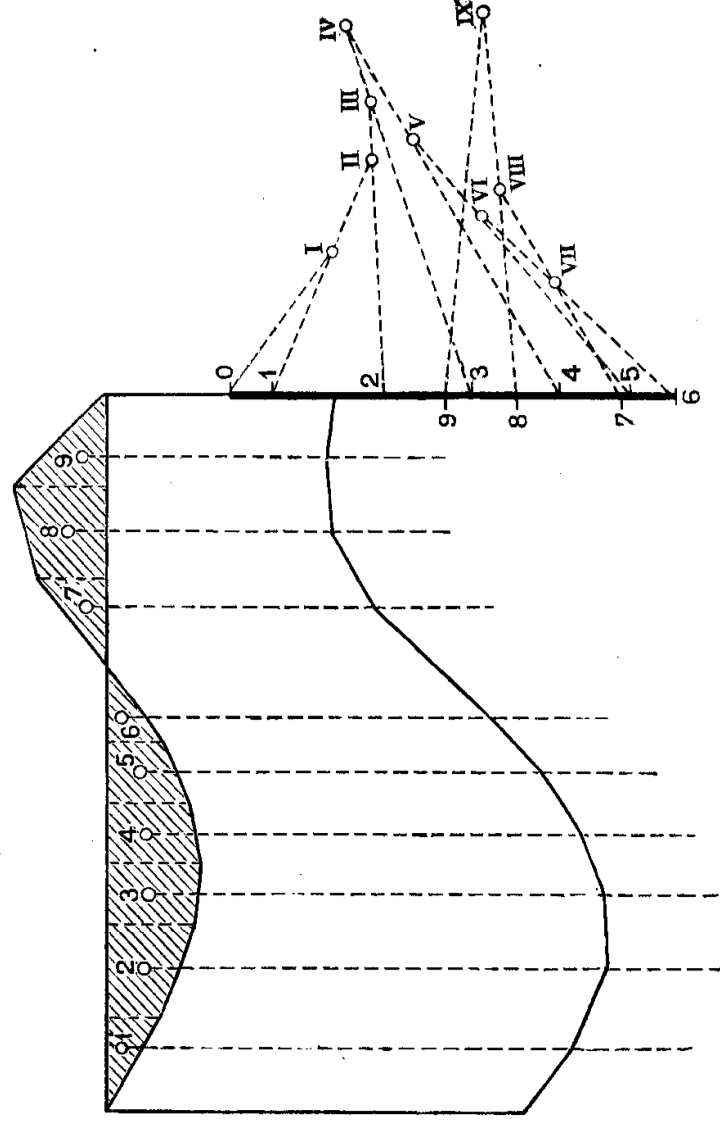


Fig. 40.

l'occasione al caso della distanza polare variabile l'accezione della denominazione che, in statica, viene introdotta limitatamente al caso della distanza polare costante — poligonale i cui lati potranno, colle stesse cautele, interpretarsi come tangenti a quella linea nei punti di essa situati sulle verticali delimitanti i successivi tronchi in cui la trave si è supposta divisa.

* * *

Abbiamo accennato a cautele da adottarsi prima di stabilire la coincidenza tra la linea elastica e la curva funicolare, o tra le tangenti alla prima ed i lati del poligono funicolare che, nei precedenti paragrafi, noi abbiamo imparato a costruire.

La nostra riserva non deve meravigliare alcuno: c'era anzi

da aspettarsela, dato il modo, in un certo senso incompleto, con cui noi abbiamo da principio impostato il nostro problema.

Noi abbiamo ritenuto infatti che una maggior chiarezza e semplicità e generalità di trattazione si potesse conseguire col supporre che tutte le forze agenti sulla trave fossero note, cioè esplicitamente date: ed in realtà noi abbiamo così potuto evitare di parlar di vincoli e di occuparci della determinazione delle relative reazioni.

Ma è ben evidente che, così facendo, noi abbiamo lasciata completamente indeterminata la posizione della trave nello spazio, nel senso che questa può, a deformazione avvenuta, atteggiarsi secondo infinite linee elastiche dall'una all'altra delle quali essa può passare con un semplice moto rigido.

Se si tien conto delle particolari limitazioni imposte pel fatto che gli spostamenti dei singoli punti dell'asse geometrico si possono verificare solo in un'unica direzione (verticale), si giunge facilmente a dimostrare che la possibilità dei moti rigidi conduce ad una duplice infinità di soluzioni del problema.

D'altra parte, dato il diagramma dei momenti flettenti funzionante da diagramma di carico e data la distanza polare (poco importa se costante o variabile, in modo ben determinato, da tronco a tronco della trave) di funicolari costruibili nei modi sopra indicati ve ne sono precisamente ∞^2 .

Ed un'analisi geometrica impostabile senza difficoltà di sorta sulla traccia di quella che si trova in tutti i trattati di statica grafica, e che serve a stabilire i caratteristici rapporti di posizione tra due diversi poligoni funicolari colleganti un medesimo sistema di forze (¹), ci permetterebbe di stabilire facilmente che, nel caso particolare di cui ci stiamo occupando, due funicolari qualunque, tra le ∞^2 possibili,

1° hanno i lati corrispondenti che si incontrano tutti su di una medesima retta *verticale*;

2° hanno ordinate corrispondenti eguali, per rapporto a due qualunque loro corde (o tangenti) omologhe.

Se pertanto, ai dati del problema già contemplati, si aggiungono quelle ulteriori condizioni che sono indispensabili per definire la posizione della trave nello spazio — se, per es., si fissano gli spostamenti verticali di due determinati punti di essa trave,

(¹) Cfr. *I fondamenti della Statica*, pag. 145.

per modo che la posizione di una certa ben determinata corda della linea elastica ne risulti completamente definita — la soluzione, anche dal punto di vista geometrico, diviene unica e ben determinata.

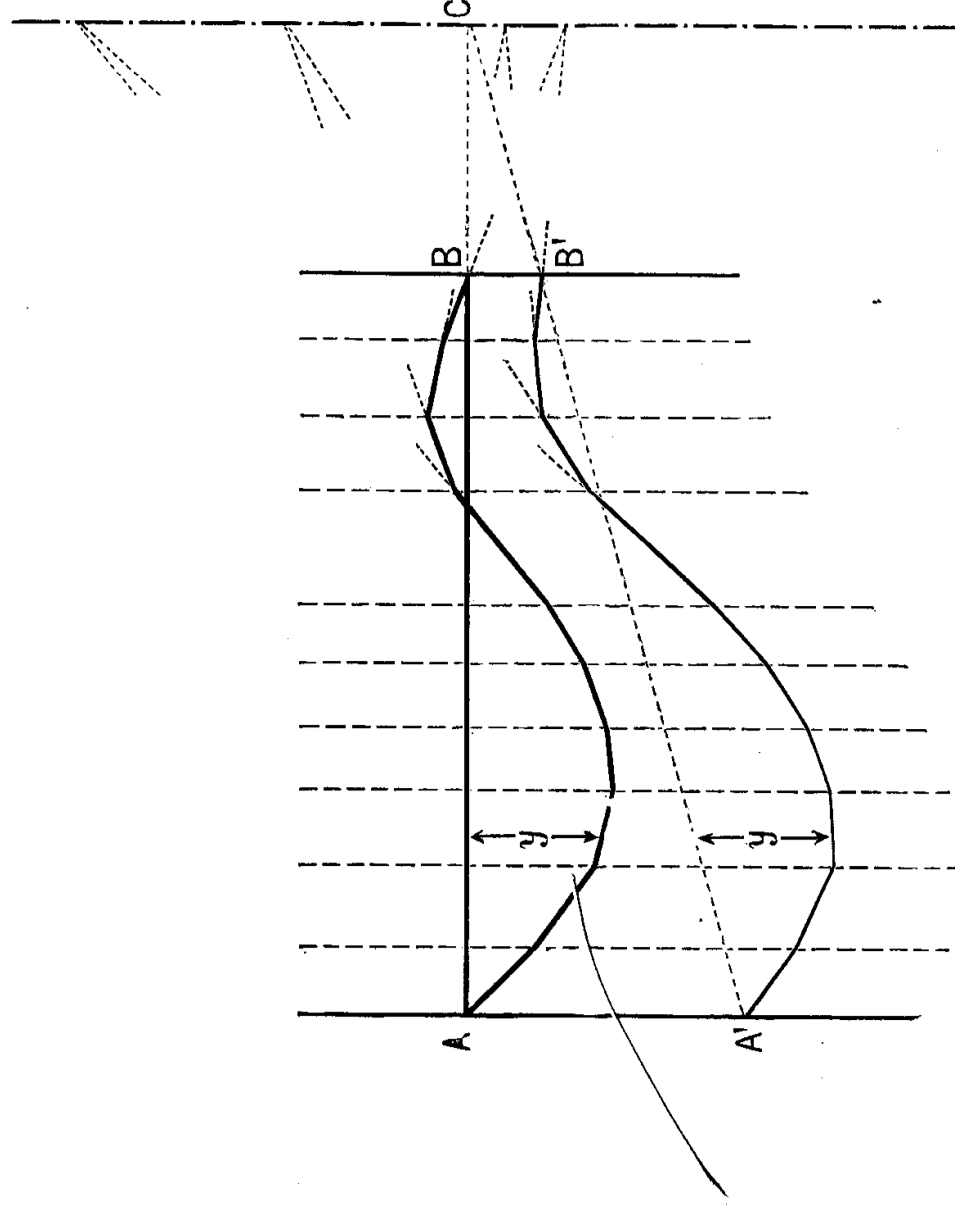


Fig. 41.

E quand'anche non si sappia arrivarvi di primo acchito mediante un'oculata scelta degli elementi arbitrarii della costruzione, si potrà pur sempre arrivarvi in un secondo tempo servendosi, per passare da una funicolare generica a quella che soddisfa le predette condizioni, dell'una o dell'altra delle proprietà sopra enunciate (fig. 41).

In realtà, nei problemi pratici, non succede mai che tutte le forze applicate ad una trave siano date *a priori*. Ve n'è sempre qualcuna che è determinata solo indirettamente attraverso le condizioni di vincolo.

Ora queste condizioni di vincolo devono in un primo tempo venire utilizzate per quella determinazione delle forze incognite

(reazioni) che noi abbiamo di proposito voluto lasciare nell'ombra per non complicare, colla esposizione intempestiva delle svariate contingenze a cui il problema può dar luogo, la discussione del procedimento generale su cui ci premeva fermar l'attenzione del lettore.

Ma poi, in un secondo tempo, quelle condizioni di vincolo devono essere riprese in considerazione in se stesse, vale a dire per le limitazioni che esse impongono alla mobilità del sistema: e, così considerate, esse servono alla determinazione di quelle tra le ∞^2 funicolari del diagramma del momento flettente che coincide colla linea elastica cercata.

* * *

Un'ultima avvertenza dobbiamo ancora formulare.

Le deformazioni di cui noi ci occupiamo, come abbiamo detto e ripetuto più di una volta, sono sempre piccolissime a fronte delle dimensioni del sistema elastico cui esse si riferiscono.

Qualunque sia la scala in cui il sistema stesso è stato rappresentato in disegno, le deformazioni devono per conseguenza apparire nel disegno stesso praticamente invisibili se non si provvede ad ingrandirle opportunamente.

Ora questo indispensabile cambiamento di scala è particolarmente facile a realizzarsi nel caso della trave ad asse rettilineo sollecitata solo da forze normali al suo asse.

Si presenta infatti allora spontanea l'idea di adottare per gli spostamenti (verticali) una scala diversa — per es., ξ volte più grande — di quella usata per rappresentare sull'asse geometrico (orizzontale) della trave le posizioni delle singole sezioni.

Il diagramma degli spostamenti sarà allora una linea affine alla linea elastica, il rapporto di affinità essendo eguale al rapporto ξ tra le due scale.

E si potrà ancora ottenerlo nei modi da noi sopra descritti, cioè come funicolare del diagramma dei momenti flettenti considerato come diagramma di carico, solo che si adottino nella costruzione grafica delle distanze polari ξ volte più piccole di quelle fornite dal calcolo, e si faccia

$$\lambda = \frac{1}{\xi} \frac{EJ}{Hb}$$

Così, per esempio, se una trave è stata rappresentata in disegno in scala 1:50, e si vogliono gli spostamenti dei singoli punti del suo asse geometrico, dovuti ad una data condizione di carico, *in vera grandezza*, basta porre nella formola che precede $\xi = 50$.

APPLICAZIONE — TAVOLA XV.

Tracciamento dei diagrammi delle tensioni principali delle linee isostatiche in una trave a I di metri cinque di lunghezza, incastrata ad un estremo, caricata con un peso di 7^t,5 concentrato all'altro estremo e con un peso pure di 7^t,5 ma ripartito uniformemente su tutta la sua lunghezza.

La sezione della trave è quella stessa di cui noi abbiamo già calcolate le caratteristiche geometriche nella Tavola IX.

La sollecitazione muta, di metro in metro, secondo la seguente tabella:

Sezione I	$\mathcal{T} = 7^t,5$	$\mathcal{N} = 0$
II	9 ^t	8 tm ,25
III	10 ^t ,5	18 tm
IV	12 ^t	29 tm ,25
V	13 ^t ,5	42 tm
VI	15 ^t	56 tm ,25

I diagrammi delle corrispondenti tensioni interne, sia normali che tangenziali, sono stati disegnati supponendo le sezioni ingrandite quattro volte per rapporto alla scala generale del disegno ed adottando per le σ e per le τ la scala indicata sulla Tavola sotto il nome di scala delle tensioni interne.

Se ne sono poi dedotti, colle regole solite, i diagrammi delle tensioni principali: la costruzione è schematicamente indicata per una particolare corda della sezione, in corrispondenza della

quale si presenta una interessante discontinuità, non soltanto nelle grandezze ma anche nelle direzioni delle tensioni principali.

Le nostre figure fanno vedere come discontinuità di questo genere si verificchino ovunque muti bruscamente la lunghezza della corda, e come ad esse necessariamente vengano a corrispondere dei punti angolari delle linee isostatiche.

Queste sono state tracciate nella figura superiore d'assieme: si è omessa soltanto — per evitare confusione del disegno — quella parte di ciascuna di esse che si sviluppa in corrispondenza delle piattabande con un andamento quasi parallelo alle faccie superiore ed inferiore della trave.

Confrontando i diversi diagrammi delle tensioni principali il lettore rileverà come i massimi valori di esse possano, a seconda dei casi, presentarsi in differenti punti della sezione: e se cercherà di rendersi conto del perchè ciò avvenga, non tarderà a riconoscere come la diversa posizione dei massimi dipenda dal prevalere, nella sollecitazione relativa alla sezione, dello sforzo tagliante ovvero del momento flettente.

**

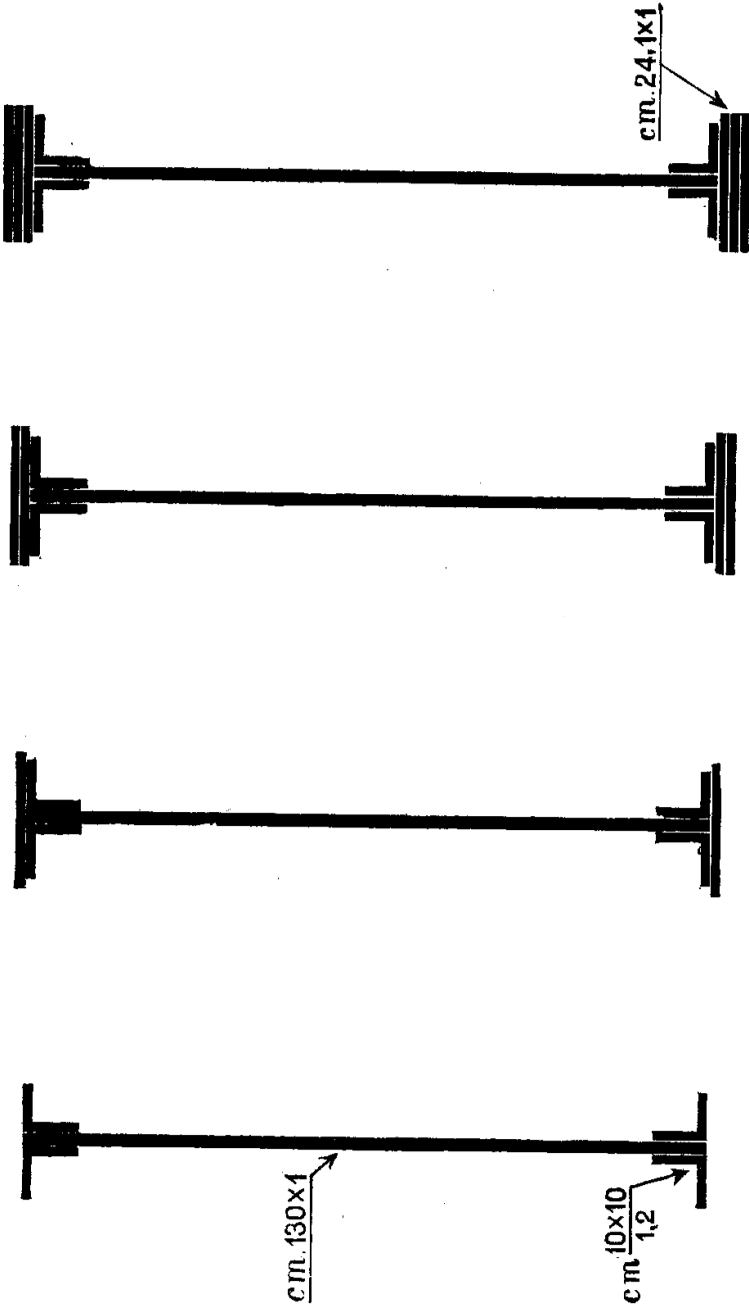
APPLICAZIONE — TAVOLA XVI.

Costruzione grafica della linea elastica di una trave ad asse rettilineo orizzontale, semplicemente appoggiata agli estremi e soggetta ad un certo numero di carichi verticali concentrati.

La trave ha una sezione a **I** composta di un'anima verticale, quattro cantonali, ed un numero di coppie di piattabande variabile da zero a tre, secondo gli schemi e colle caratteristiche qui contro indicate.

La lunghezza utile della trave (distanza fra le verticali degli appoggi) è di m. 20: le piattabande mancano completamente nei due metri attigui a ciascun estremo, son limitate ad una coppia nei due metri successivi, a due coppie negli altri due metri successivi: la terza coppia di piattabande occupa dunque gli 8 metri centrali.

I carichi sono tre: uno di 10^t in mezzeria, preceduto a sinistra, a tre metri di distanza, da uno di 3^t, e seguito a destra, a due metri di distanza, da uno di 2^t.



area della sezione in cm ² :	220	269	318	367
momento d'inerzia, rispetto all'asse orizzontale baricentrico in cm ⁴ :	531.500	741.700	958.400	1.181.700
fattore di taglio:	1,82	2,06	2,38	2,67

La trave è stata rappresentata in disegno nella scala 1 : 200; per la rappresentazione delle forze si è assunto $1^{\text{cm}} = 5^{\text{t}}$.

Disegnato il diagramma dei momenti flettenti colla distanza polare

$$H = 10^{\text{t}}$$

supposto suddiviso in striscie dalle verticali condotte in corrispondenza dei carichi ed in corrispondenza delle variazioni di sezione, ed adottata, per la riduzione delle aree delle singole striscie, la base

$$b = 600^{\text{cm}}$$

si è costruita la linea elastica con ordinate pari a *quattro volte il vero*, cioè con rapporto di affinità

$$\xi = 4 \times 200 = 800$$

A tal fine, supposto

$$E = 2000^{\text{t/cm}^2}$$

si sono adottate le distanze polari

$$\lambda_1 = \frac{1}{\xi} \frac{EJ_1}{bH} = \frac{1}{800} \cdot \frac{2000 \times 531.500}{600 \times 10} = 221^{\text{cm}}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\xi} \frac{EJ_2}{bH} = \frac{1}{800} \cdot \frac{2000 \times 741.700}{600 \times 10} = 309^{\text{cm}}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{\xi} \frac{EJ_3}{bH} = \frac{1}{800} \cdot \frac{2000 \times 958.400}{600 \times 10} = 399^{\text{cm}}$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{\xi} \frac{EJ_4}{bH} = \frac{1}{800} \cdot \frac{2000 \times 1.181.700}{600 \times 10} = 492^{\text{cm}}$$

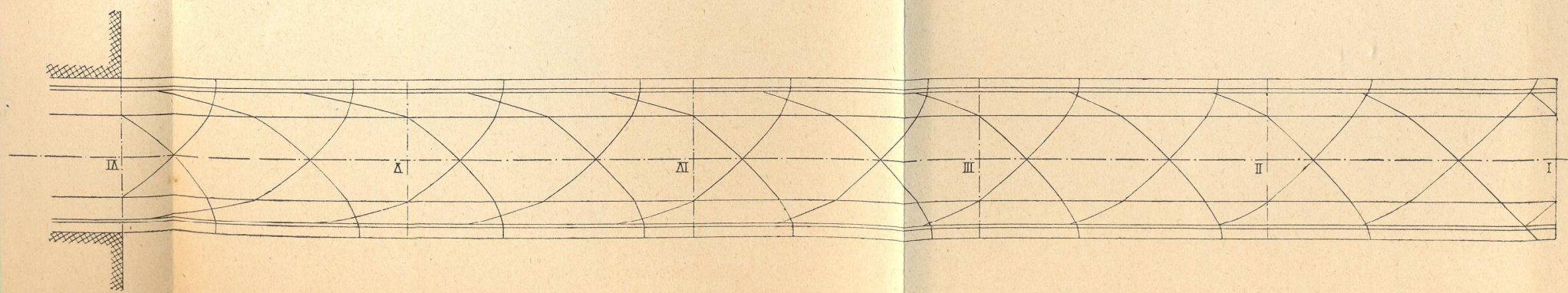
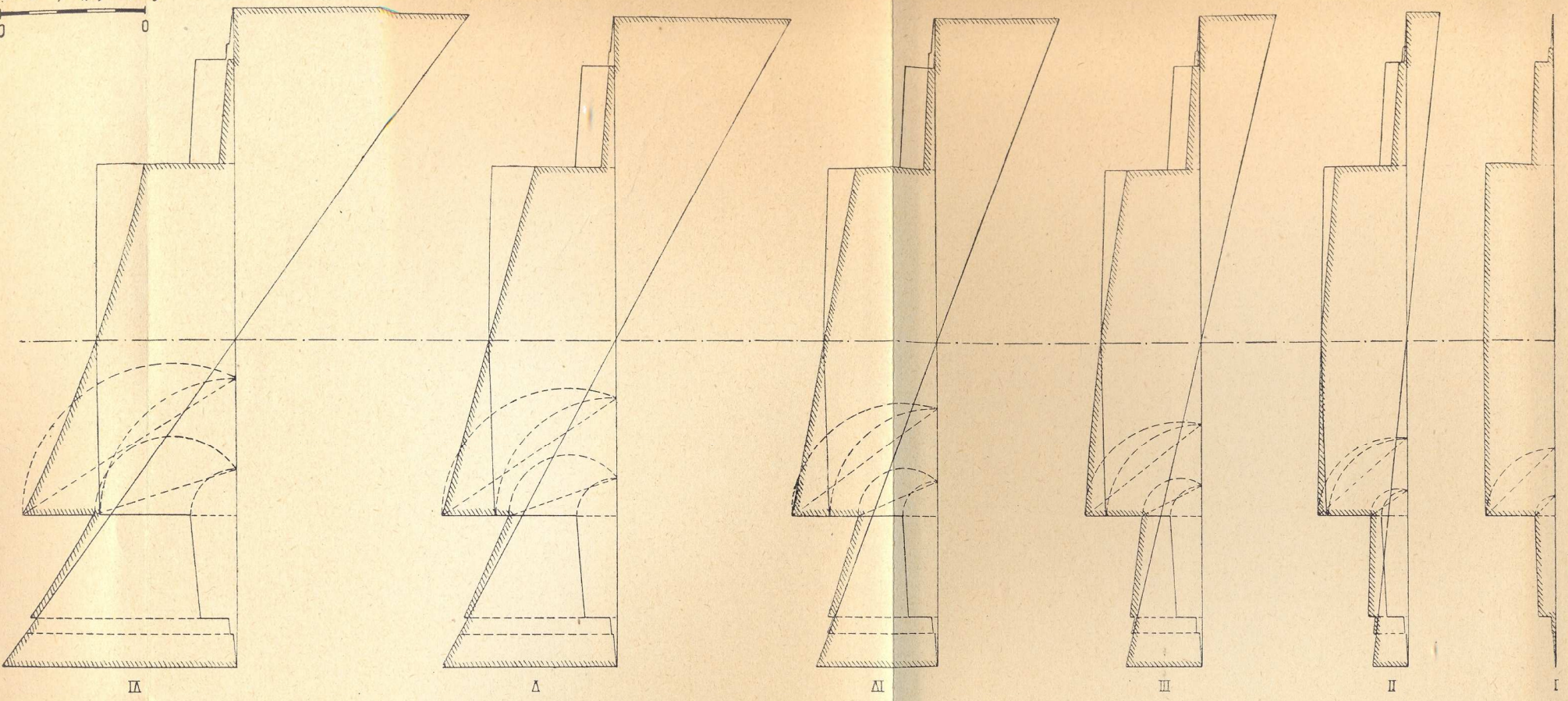
La freccia in mezzeria risulta dal disegno eguale a cm. 1,09.

TAVOLA XV

(pag. 238).

Tracciamento dei diagrammi delle tensioni principali e delle linee isostatiche in una trave a I di metri cinque di lunghezza, incastrata ad un estremo, caricata con un peso di $7^t,5$ concentrato all'altro estremo e con un peso pure di $7^t,5$ ma ripartito uniformemente su tutta la sua lunghezza.

scala del disegno 1:20

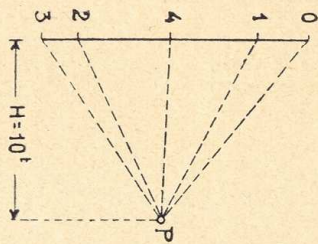
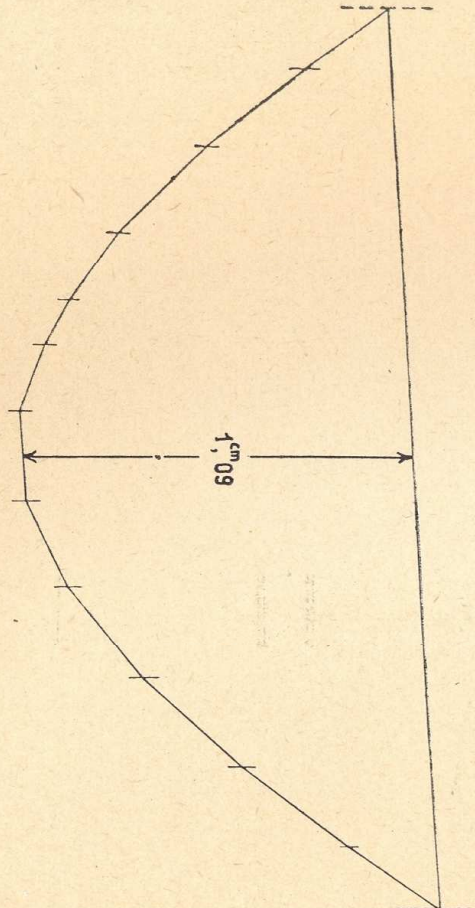
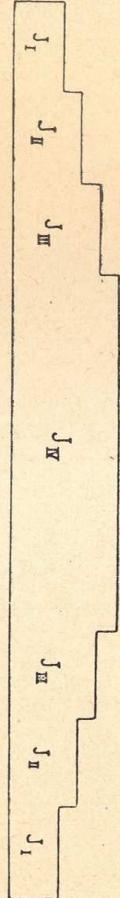
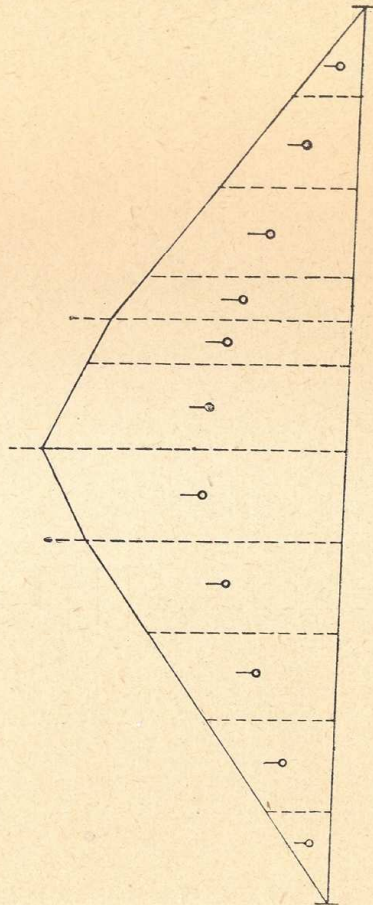
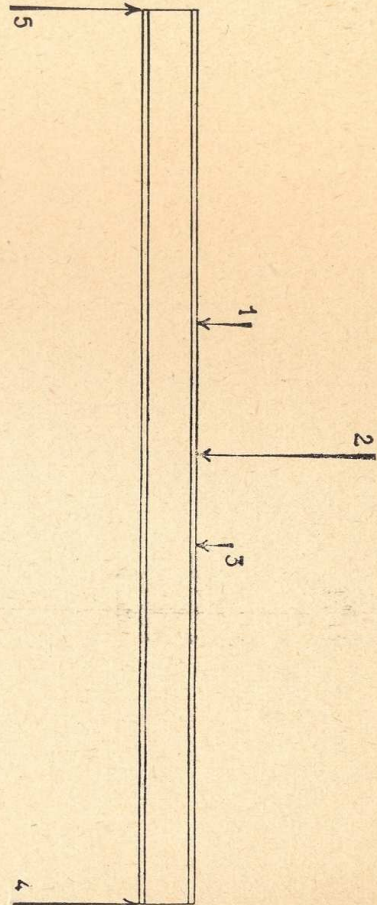


scala delle larghezze in te
0 0.5

TAVOLA XVI

(pag. 238).

Costruzione grafica della linea elastica di una trave ad asse rettilineo orizzontale, semplicemente appoggiata agli estremi, e soggetta ad un certo numero di carichi verticali concentrati (*Trattazione approssimata in cui si trascura l'influenza dello sforzo tagliante*).



$b = 600 \text{ cm}$

