

## PARTE PRIMA

---

Premesse - Analisi della deformazione - La dilatazione cubica -  
L'energia potenziale elastica - Le equazioni dell'equilibrio elastico - Il principio di sovrapposizione degli stati di equilibrio  
- Le tensioni interne e le reazioni di vincolo.

---

## I.

### Premesse.

In natura non esistono corpi perfettamente indeformabili, cioè dotati di forma e dimensioni assolutamente invariabili: tutti i corpi naturali, sotto l'azione di forze esterne anche piccole, subiscono delle deformazioni, più o meno piccole a seconda dei casi, a volte anche così piccole da sfuggire ad un esame superficiale, ma suscettibili sempre di essere misurate quando si disponga di metodi di misura opportunamente sensibili.

In un primo studio approssimato dei problemi dell'equilibrio di quei corpi naturali le cui deformazioni ci appaiono piccolissime a fronte delle loro dimensioni, si presenta spontanea l'idea di trascurare tali deformazioni e di far dipendere la soluzione di quei problemi dalla teoria dell'equilibrio di corpi ideali supposti dotati di una perfetta indeformabilità.

Di qui l'applicazione della *statica dei sistemi rigidi* allo studio dell'equilibrio dei solidi naturali: le leggi che l'ipotesi della rigidità conduce a formulare debbono anzi logicamente determinare una soluzione, per lo meno approssimata, del problema reale tutte le volte che le deformazioni effettive del corpo dato alterano (in ragione della lor piccolezza) di pochissimo le sue condizioni statiche.

Senonchè non è affatto detto che debba essere sempre così: nulla ci autorizza infatti ad escludere la possibilità che quelle deformazioni, per quanto piccolissime, abbiano un'influenza non trascurabile sulle condizioni statiche del corpo.

Anzi la stessa statica dei sistemi rigidi ci rivela non sempre lecita l'ipotesi della perfetta indeformabilità, presentandoci come indeterminati o come impossibili numerosi casi di equilibrio che, in natura, sono ovviamente possibili e perfettamente determinati.

\* \* \*

Ecco un esempio atto a chiarire in qual modo ciò può accadere.

Consideriamo un punto materiale vincolato da tre aste rettilinee (articolate ad entrambi gli estremi mediante cerniere senza attrito) facenti capo a tre punti fissi arbitrariamente scelti nello spazio.

È chiaro che se tali tre aste si trovano in posizione generica, se cioè i quattro punti che esse collegano non appartengono ad un medesimo piano, le tre reazioni di vincolo che in esse si sviluppano sotto l'azione di una qualsiasi forza esterna applicata nel loro punto di concorso, sono perfettamente determinate e possono calcolarsi decomponendo secondo le loro tre linee di azione quella forza mutata di segno.

È bensì vero che, se le aste sono state costruite con un materiale deformabile, sotto l'azione degli sforzi che attraverso ad esse si trasmettono, le loro lunghezze si alterano ed il punto materiale che esse vincolano si sposta. Ma, se le deformazioni in questione sono sufficientemente piccole a fronte delle dimensioni del sistema, le direzioni delle aste varieranno di pochissimo, e lo stesso potrà dirsi delle grandezze delle reazioni.

Le quali pertanto potranno, in via di approssimazione (tanto più grande quanto più le deformazioni son piccole), venire calcolate supponendo che il punto materiale non si sia mosso dalla sua posizione iniziale, il che è quanto dire supponendo che il sistema sia perfettamente rigido.

Si supponga invece che i quattro punti dati, e con essi le tre aste che li collegano, giacciono in un piano, pur escludendo che tre qualunque di essi possano appartenere ad una medesima retta. Allora il problema, dal punto di vista della statica dei sistemi rigidi, presenterà infinite ovvero nessuna soluzione a seconda che la forza esterna sta essa pure ovvero non sta in quel piano.

Nel primo caso infatti si può sempre scegliere ad arbitrio lo sforzo relativo ad una qualunque delle tre aste di vincolo e determinare poi gli sforzi nelle altre due per modo che riescano soddisfatte le due equazioni dell'equilibrio del punto dato nel dato piano.

Ma l'indeterminazione subito scompare quando si suppone che le lunghezze delle singole aste varino, sia pure di pochissimo, sotto l'azione delle tensioni che in esse si sviluppano. Date infatti le lunghezze di due delle aste riesce completa-mente determinata la posizione del punto nel piano, ed in conseguenza anche la lunghezza della terza asta che collega tale punto al terzo punto fisso. Ciò vuol dire che tra le tre lunghezze delle tre aste di vincolo deve sempre sussistere una relazione di carattere geometrico, la quale, data in modo qualunque la legge di dipendenza delle lunghezze delle singole aste dagli sforzi che in esse si sviluppano, potrà immediatamente trasformarsi in una equazione tra le tre reazioni incognite. Questa equazione, insieme colle due precedentemente ricordate, rende la soluzione del problema unica e determinata.

Nel secondo caso invece, si vede subito che la teoria dell'equilibrio dei sistemi rigidi non conduce ad alcuna soluzione. Qualunque siano infatti gli sforzi che si immaginano nelle tre aste, la loro risultante sarà necessariamente in quel medesimo piano che contiene le aste, epperò non potrà mai far equilibrio alla forza esterna che per ipotesi non giace in quel piano.

L'apparente impossibilità del problema scompare però immediatamente se anche qui noi teniamo conto della deformabilità, sia pure piccolissima, dei materiali.

Basta infatti che le lunghezze delle aste varino in modo generico anche di poco perchè il punto che esse vincolano possa escire dal piano dei tre punti fissi: la determinazione delle tre reazioni ridiviene così senz'altro possibile ed in un unico modo.

Notiamo, prima di lasciare l'argomento, che gli sforzi, che in questo caso si ottengono, risultano tanto più grandi quanto più piccoli si sono supposti gli allungamenti delle aste. Al limite, se si cerca di far tendere a zero questi allungamenti, si ricade naturalmente nell'assurdo: gli sforzi nelle aste crescono all'infinito. Questo fatto è dal punto di vista meccanico privo di senso perchè non esistono in natura forze infinitamente grandi: esso deve essere interpretato nel senso che il punto materiale dato non può in nessun modo mantenersi nel piano che contiene i tre punti fissi.

E l'esperienza conferma nel modo più evidente questa conclusione, qualunque siano le cure e le precauzioni che noi possiamo adottare per assicurarci della maggior possibile rigidità dei vincoli.

\* \* \*

L'apparizione di palesi contraddizioni tra la statica dei corpi rigidi e l'esperienza ci avverte dunque se, nel sostituire al sistema reale lo schema ideale da sottoporsi al calcolo, non abbiamo trascurato qualche cosa che non era lecito trascurare: lo sparire della contraddizione al semplice introdursi dell'ipotesi di una deformazione, anche piccolissima, del sistema, ci addita senz'altro la nuova via da seguire.

Non è da credersi però che, per studiare il problema dell'equilibrio dei corpi naturali senza prescindere dalla loro naturale deformabilità, occorra proprio conoscere in tutti i suoi dettagli il fenomeno della deformazione.

Noi non dobbiamo infatti dimenticare che le deformazioni in questione sono, il più delle volte, piccolissime, e che perciò, pur non volendo più trascurarle, si può, anzi in un certo senso si deve (a scanso di inutili complicazioni) accontentarsi di apprezzarle soltanto in modo approssimativo.

In altri termini noi dobbiamo soltanto sostituire alla prima interpretazione, quando questa vien riconosciuta insufficiente, una seconda interpretazione la quale deve determinare la soluzione, ma che non ha, nè può avere, alcuna pretesa di rappresentare il fenomeno reale con assoluto rigore.

D'altronde i cambiamenti di stato che si verificano nei corpi naturali sotto l'azione delle forze esterne si rivelano talmente complessi che il volerli studiare nella loro interezza sarebbe praticamente impossibile.

In ciò che abitualmente si chiama deformazione di un solido si possono infatti non di rado ravvisare le caratteristiche di un vero e proprio cambiamento dello stato e delle proprietà fisiche del corpo.

Però l'esperienza ci dice che, quando le forze esterne cessano di agire sul corpo, questo tende più o meno a restituirsì nello stato primitivo: questa proprietà è comune in diverso grado a tutti i corpi e chiamasi *elasticità*.

Come non esiste in natura nessun corpo perfettamente anelastico, così non ne esiste alcuno perfettamente elastico.

Ogni deformazione può quindi essere idealmente divisa in due parti: una che svanisce al cessare dell'azione delle forze

esterne e che chiamasi *deformazione elastica*; l'altra la quale persiste anche dopo cessata l'azione suddetta: questa prende il nome di *deformazione permanente*.

L'esperienza ci mostra anche che, per certi materiali, finchè la sollecitazione non oltrepassa un certo limite, la deformazione permanente si mantiene inapprezzabile cioè inferiore a quegli errori, praticamente inevitabili, che sono proprii dei nostri mezzi sperimentali.

Ora questi materiali sono precisamente quelli che meglio si prestano ad essere applicati nelle costruzioni: il limite a cui abbiamo accennato, e che è noto sotto il nome di *limite di elasticità*, coincide, nella maggior parte dei casi, con quello che ragioni ovvie di sicurezza consigliano in pratica di non oltrepassare.

Si presenta adunque spontanea l'idea di prendere in considerazione, nello studio dell'equilibrio dei corpi, le sole deformazioni elastiche.

Partendo da questo concetto noi assumeremo come oggetto delle nostre ricerche un nuovo tipo di corpo (non meno ideale del corpo rigido della statica classica) che denomineremo *solido elastico* senza perciò volerci per ora pronunciare sulla maggiore o minore sua affinità con quei corpi naturali che ricevono, nel linguaggio comune, lo stesso nome: solido elastico sarà per noi nè più nè meno che un sistema continuo capace di subire, sotto l'azione delle forze esterne, dei cambiamenti piccolissimi di stato che scompaiono al cessare delle cause che li hanno prodotti.

\* \* \*

Noi definiremo nel modo più preciso e completo questi cambiamenti di stato per poter poi procedere, coi mezzi dell'analisi, allo studio delle leggi che li governano.

Ma è d'uopo tener ben presente fin d'ora il carattere di fondamentale arbitrarietà che è insito nelle ipotesi su cui stiamo per fondare le nostre ricerche.

I principii primi saranno infatti dei puri e semplici postulati vincolati dalla sola condizione che l'enunciato di ciascuno di essi non sia contraddittorio in sè stesso, nè contraddica in modo alcuno ad alcuno degli altri. A parte queste semplici limitazioni di ordine logico, noi non potremo sperare di fondare la nostra

teoria nè su di una specie di necessità matematica, nè su dati direttamente stabiliti per via sperimentale.

Se infatti per una parte è da ritenersi che nessuna teoria fisica sia suscettibile di essere giustificata mediante pure e semplici deduzioni matematiche, per altra parte il controllo sperimentale non può mai riguardarsi come una guida sicura e costante capace di fornire dei dati ad un tempo certi e generali.

Tale controllo dovrà in generale aver luogo solo a proposito delle ultime conseguenze della teoria: esso non potrà quasi mai riferirsi al gruppo dei principii primi, e tanto meno a ciascuno di quei principii preso separatamente, perchè ogni esperienza per semplice che sia, implica sempre un fenomeno più o meno complesso, realizzato in un caso essenzialmente particolare.

Inoltre l'esperienza non è mai, per sua natura, assolutamente precisa. Essa può soltanto suggerire la forma probabile della legge atta a spiegare o meglio ad interpretare i fenomeni osservati; ma il formulare questa legge implica sempre un processo di astrazione che l'esperienza per sè stessa non giustifica affatto.

La storia della scienza è, a questo proposito, estremamente istruttiva: i primi principii che sono stati formulati nella scienza, spesso fallace, che essi potessero condurre ad una rappresentazione generale di un qualsiasi complesso di fenomeni naturali, si sono ben presto trovati in contraddizione grossolana con l'esperienza; l'esame delle contraddizioni suggerì allora altri principii che, sostituiti ai primi, hanno condotto ad una teoria che l'esperienza, almeno parzialmente, confermava. Questi vennero ancora più e più volte modificati e corretti in modo che ad ogni cambiamento seguisse un accordo sempre più completo fra i loro corollarii ed i fatti.

Le ipotesi fondamentali che noi porremo a base della teoria dell'elasticità non ci consentiranno dunque nè una dimostrazione matematica, nè una immediata giustificazione sperimentale; esse sarebbero suscettibili invece di una interessantissima giustificazione storica: si potrebbe cioè, prima di enunciarli, enumerare gli svariati tentativi attraverso ai quali si è arrivati a dar loro la lor forma attuale. Ma per quanto schematica e sommaria, una tale esposizione eccederebbe assolutamente i limiti imposti a questa breve trattazione.

Noi ci accontenteremo perciò di accennare, man mano che ci se ne presenterà l'occasione, alle varie esperienze che meglio

si prestano alla verifica della teoria, e più precisamente alla determinazione dei limiti entro i quali la teoria rappresenta in modo soddisfacente i fatti naturali.

Ci sembra invero del più alto interesse che chi si accinge allo studio della teoria dell'elasticità nell'intento di appoggiarsi ad essa nell'analisi dei problemi tanto numerosi e svariati che la pratica tecnica sottopone quotidianamente al nostro esame, acquisti una cognizione chiara e sicura dei limiti di applicabilità, non soltanto per poter trarre dalla teoria tutto ciò che essa può dare, ma soprattutto per imparare a non chiederle ciò che essa non può dire.

\* \* \*

S'intende che di alcune limitazioni nell'applicabilità della teoria noi non avremo bisogno di trovare nell'esperienza la conferma: esse discendono infatti immediatamente dalle ipotesi stesse che abbiamo già enunciate.

Così, per esempio, riterremo per inteso una volta per tutte che la teoria dell'elasticità non può essere in alcun modo applicata in quei casi in cui si verifica una deformazione permanente apprezzabile.

Vi sono in natura dei corpi per quali ciò avviene anche se le forze esterne si mantengono molto piccole, per quali cioè il limite di elasticità è inferiore a tutte le quantità osservabili; son quelli che vengono detti comunemente *non elastici*; essi non trovano che ben difficilmente applicazione come organi resistenti delle costruzioni: comunque non dobbiamo dimenticare che, nei loro riguardi, non è lecito annettere alla teoria dell'elasticità valore alcuno.

Tutti gli altri corpi, per quali il limite di elasticità è superiore alle più piccole grandezze osservabili, possono, al di sotto di tal limite, almeno in via di approssimazione, essere paragonati al corpo ideale che noi abbiamo testè definito.

La teoria che noi stiamo per svolgere potrà servire a studiare di questi corpi le deformazioni piccolissime.

Insistiamo fin d'ora di proposito sulla supposta piccolezza delle deformazioni, riservandoci di farne a suo tempo vedere l'importanza essenziale dal punto di vista analitico.

Fra i corpi elastici naturali ve ne sono di quelli che, anche



sotto l'azione di forze assai moderate, subiscono deformazioni molto appariscenti. Sono quelli che volgarmente si dicono *molto elastici* (caoutchouc e simili); in tali condizioni essi vanno alla loro volta esclusi da ogni possibile applicazione della teoria: va da sè infatti che una variazione di dimensioni che può raggiungere o anche superare notevolmente le dimensioni primitive, non ha nulla a vedere colle considerazioni che noi verremo svolgendo ed in cui le deformazioni saranno trattate come infinitesime.

Per verità si potrebbe a rigore obbiettare che nessuna delle deformazioni che ci si presentano in natura può dirsi infinitesima: il fatto stesso che noi riesciamo a sottoporla a misura basta a provare che si tratta di una grandezza finita.

Si può però prevedere fin d'ora che l'errore che si viene a commettere trattando come infinitesime delle deformazioni che non son tali in realtà, riuscirà tanto minore quanto più le deformazioni in questione saranno piccole.

Più precisamente si può congetturare che esisterà un limite al di sotto del quale gli errori a cui la teoria conduce si manterranno inferiori a quegli errori di osservazione che noi non riesciamo ad evitare.

Al di sotto di quel limite noi ci troveremo nell'impossibilità materiale di mettere in evidenza le divergenze tra la realtà dei fatti ed i risultati della teoria: diremo allora che questa è praticamente verificata.