

## PARTE SECONDA

---

I corpi isotropi - Il problema di Saint-Venant - Estensione semplice - Flessione semplice - Estensione e flessione - Torsione semplice - Analogie - Flessione composta - Trattazione approssimata del problema del taglio - Fondamenti della teoria delle travi inflesse.

## I.

### I corpi isotropi.

L'integrazione delle equazioni dell'equilibrio elastico si sa eseguire solo in un numero assai limitato di casi speciali, di alcuni dei quali vogliamo occuparci, nei capitoli che seguono, un po' dettagliatamente in vista dell'importanza che essi hanno nelle applicazioni della teoria dell'elasticità alla scienza delle costruzioni.

A tal fine è indispensabile che noi, abbandonando la via che, per amore di generalità, abbiamo sin qui seguita, fissiamo le nostre idee precisando una volta per tutte la natura del corpo elastico che sarà oggetto del nostro studio.

Faremo perciò due ipotesi: in primo luogo supporremo che il corpo elastico sia *omogeneo ed isotropo*, vale a dire ugualmente costituito in tutti i suoi punti ed in tutte le direzioni uscenti da ogni suo punto. Ammetteremo in secondo luogo che, nello stato naturale del corpo, tutti gli elementi che lo compongono si trovino alla lor volta nello stato non deformato, di guisa che ogni sua porzione, anche supposta isolata e sottratta all'azione del resto, tenda a conservare invariato il proprio stato.

Abbiamo già detto a suo luogo che questa seconda ipotesi si traduce nell'annullarsi identicamente delle sei componenti  $(\varepsilon_x)_0, (\varepsilon_y)_0, \dots, (\gamma_{xy})_0$  della deformazione iniziale, o, ciò che è lo stesso, dell'energia vincolata

$$\Phi_0 = \int_V \varphi_0 dV$$

La prima ipotesi invece equivale alla condizione che i 21 coefficienti

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y}, \dots, \dots, \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma_{xy}^2}$$

che compaiono nell'espressione generale dell'energia potenziale elastica elementare si mantengano costanti per tutti i punti del corpo e *comunque si orientino gli assi coordinati*.

Si ottengono così le più caratteristiche semplificazioni in tutta la teoria ed in particolare nelle relazioni che legano le componenti speciali di tensione alle componenti della deformazione.

Immaginiamo infatti per un momento di aver mutato il verso positivo dell'asse delle  $x$  lasciando invariati gli altri due assi. Le componenti della deformazione relative alla nuova terna di assi coordinati così definita si otterranno dalle (14), o meglio dalle (4) con cui quelle vengono a coincidere per

$$(\varepsilon_x)_0 = (\varepsilon_y)_0 = \dots = (\gamma_{xy})_0 = 0$$

cambiando di segno gli elementi relativi all'asse  $x$ , vale a dire sostituendo ad  $x$  e ad  $u$  rispettivamente  $-x$  e  $-u$ ; osservando che una derivata cambia di segno se cambia il segno della funzione ovvero quello della variabile, si vede subito che  $\gamma_{zx}$  e  $\gamma_{xy}$  cambiano di segno, mentre  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  e  $\gamma_{yz}$  non mutano affatto.

E poichè, pel suo stesso significato, la funzione  $\varphi$  deve conservarsi immutata, e immutati devono, per le ipotesi fatte, conservarsi i suoi 21 coefficienti, occorre ammettere che sian nulli quelli tra i coefficienti che moltiplicano  $\gamma_{zx}$  ovvero  $\gamma_{xy}$ .

Similmente, mutando idealmente di segno uno degli altri due assi, per esempio quello delle  $y$ , si troverebbe che devono anche esser nulli altri coefficienti, e precisamente quelli che moltiplicano  $\gamma_{xy}$  ovvero  $\gamma_{yz}$ .

In conclusione si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{yz}} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{yz}} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{yz}} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{zx}} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{zx}} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{zx}} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{xy}} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{xy}} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{xy}} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma_{yz} \partial \gamma_{zx}} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma_{zx} \partial \gamma_{xy}} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma_{xy} \partial \gamma_{yz}} = 0 \end{aligned}$$

Annullati dei 21 coefficienti questi 12, i quali sono noti sotto il nome di *parametri delle elasticità dissimetriche*, l'espressione dell'energia potenziale elastica elementare resta ridotta alla forma

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x^2} \varepsilon_x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_y^2} \varepsilon_y^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_z^2} \varepsilon_z^2 + \\ & + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_y \partial \varepsilon_x} \varepsilon_y \varepsilon_x + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_z \partial \varepsilon_x} \varepsilon_z \varepsilon_x + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y} \varepsilon_x \varepsilon_y + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma_{yz}^2} \gamma_{yz}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma_{zx}^2} \gamma_{zx}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma_{xy}^2} \gamma_{xy}^2 \end{aligned}$$

che, anche prima di essere ulteriormente semplificata, si presta ad alcune considerazioni del maggiore interesse.

Ed inverso le (29) si possono ora scrivere

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x^2} \varepsilon_x + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y} \varepsilon_y + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_z} \varepsilon_z \\ \sigma_y = & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y} \varepsilon_x + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_y^2} \varepsilon_y + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_y \partial \varepsilon_z} \varepsilon_z \\ \sigma_z = & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_z} \varepsilon_x + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_y \partial \varepsilon_z} \varepsilon_y + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_z^2} \varepsilon_z \\ \tau_{yz} = & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma_{yz}^2} \gamma_{yz} \\ \tau_{zx} = & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma_{zx}^2} \gamma_{zx} \\ \tau_{xy} = & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma_{xy}^2} \gamma_{xy} \end{aligned}$$

\* \* \*

Dalle espressioni delle componenti normali di tensione in funzione dei coefficienti di dilatazione lineare relativi ai tre elementi paralleli agli assi coordinati, si possono immediatamente ricavare questi tre coefficienti espressi in funzione di quelle tre componenti.

Osservando che la  $\varepsilon$  relativa ad un asse, per esempio la  $\varepsilon_x$ , deve, per la solita ipotesi dell'isotropia, conservarsi immutata se si immaginano fra loro scambiati gli altri due assi  $y$  e  $z$ , e che inoltre essa deve trasformarsi identicamente nella  $\varepsilon_y$  ovvero nella  $\varepsilon_z$  quando si scambi l'asse  $x$  rispettivamente coll'asse  $y$  ovvero coll'asse  $z$ , si conclude che la nuova terna di equazioni non può contenere più di due costanti indipendenti.

Noi la scriveremo pertanto sotto la forma

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left( \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left( \sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m} \right) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left( \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right) \end{aligned} \right\} (37)$$

e chiameremo:

$E$  *modulo di elasticità normale* o modulo di Young,

$\frac{1}{m}$  *rapporto di contrazione laterale* o coefficiente di Poisson.

È facile dimostrare che queste due costanti bastano da sole a definire completamente, almeno in ordine alle proprietà elastiche, il materiale.

Consideriamo infatti due segmenti uscenti da un punto generico del corpo e paralleli agli assi  $y$  e  $z$ , i cui coefficienti di dilatazione lineare abbiamo indicati con  $\varepsilon_y$  ed  $\varepsilon_z$  rispettivamente.

Due altri segmenti uscenti dallo stesso punto, giacenti nello stesso piano dei precedenti e diretti secondo le bisettrici, che indicheremo con  $n'$  ed  $n''$ , degli angoli formati dalle direzioni di quelli, avranno per coseni di direzione rispettivamente

$$0, \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad 0, -\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Per la (5), i loro coefficienti di dilatazione lineare saranno pertanto

$$\varepsilon' = \frac{1}{2} \varepsilon_y + \frac{1}{2} \varepsilon_z + \frac{1}{2} \gamma_{yz}$$

ed

$$\varepsilon'' = \frac{1}{2} \varepsilon_y + \frac{1}{2} \varepsilon_z - \frac{1}{2} \gamma_{yz}$$

Di qui si deduce, sottraendo membro a membro

$$\gamma_{yz} = \varepsilon' - \varepsilon''$$

Resta così assodata la possibilità di esprimere gli scorrimenti per mezzo degli allungamenti. Ciò premesso osserviamo che, sottraendo membro a membro la terza delle (37) dalla seconda, si ottiene

$$\varepsilon_y - \varepsilon_z = \frac{m+1}{mE} (\sigma_y - \sigma_z)$$

Ora  $\varepsilon_y$  ed  $\varepsilon_z$  sono gli allungamenti relativi a due direzioni ortogonali, ma del resto qualunque, e  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  sono le tensioni che agiscono sugli elementi normali a queste direzioni parallelamente alle direzioni stesse.

Se pertanto, considerando nel punto generico dato gli elementi normali alle due direzioni  $n'$  ed  $n''$ , si indicano con  $\sigma'$  e  $\sigma''$  le componenti, secondo queste stesse direzioni, delle tensioni che agiscono su questi elementi, si dovrà avere in modo perfettamente analogo

$$\varepsilon' - \varepsilon'' = \frac{m+1}{mE} (\sigma' - \sigma'')$$

D'altra parte, applicando la (30) si trova

$$\sigma' = \frac{1}{2} \sigma_y + \frac{1}{2} \sigma_z + \tau_{yz}$$

e

$$\sigma'' = \frac{1}{2} \sigma_y + \frac{1}{2} \sigma_z - \tau_{yz}$$

da cui

$$\sigma' - \sigma'' = 2\tau_{yz}$$

In conclusione si ha

$$\gamma_{yz} = 2 \frac{m+1}{mE} \tau_{yz}$$

Tenuto conto che in quanto precede si possono permutare circolarmente gli indici, scriveremo

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (38)$$

Queste relazioni si sarebbero per verità potute ricavare direttamente dalle formole generali stabilite alla fine del precedente paragrafo, previe le solite considerazioni sulla intercambiabilità degli assi coordinati. Procedendo nel modo da noi seguito resta però anche dimostrato che la nuova costante  $G$  detta *modulo di elasticità tangenziale* non è indipendente dal modulo di elasticità normale e dal rapporto di contrazione laterale, ma deve ritenersi ad essi legata dalla relazione

$$G = \frac{1}{2} \frac{mE}{m+1} \quad (39)$$

\*\*\*

Sommando membro a membro le (37) si trova

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -\frac{m-2}{mE} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

Il primo membro di questa eguaglianza non è altro che il coefficiente di dilatazione cubica; resta dunque dimostrato che *in un solido elastico omogeneo ed isotropo la dilatazione cubica è in ogni punto proporzionale alla somma delle tre componenti normali di tensione.*

Risolvendo invece le stesse equazioni rispetto a  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  si otterranno le espressioni definitive delle tre componenti normali di tensione in funzione delle componenti della deformazione.

A tal fine moltiplichiamo la prima delle (37) per  $m-1$  e sommiamola poi membro a membro colle altre due. I termini che contengono  $\sigma_y$  o  $\sigma_z$  spariscono, e rimane

$$(m-1) \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{m^2 - m - 2}{mE} \sigma_x$$

Risolvendo rispetto a  $\sigma_x$  ed operando in modo analogo per  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  si ricavano le espressioni cercate:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{mE}{m^2 - m - 2} [(m-1)\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z] \\ \sigma_y &= \frac{mE}{m^2 - m - 2} [\varepsilon_x + (m-1)\varepsilon_y + \varepsilon_z] \\ \sigma_z &= \frac{mE}{m^2 - m - 2} [\varepsilon_x + \varepsilon_y + (m-1)\varepsilon_z] \end{aligned} \right\} (40)$$

Quanto alle tensioni tangenziali, si ha evidentemente dalle (38)

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (41)$$

In funzione di queste sei componenti speciali di tensione si può poi esprimere l'energia elastica elementare.

Dalla

$$2\varphi = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \dots + \tau_{xy} \gamma_{xy}$$

già stabilita a pag 74, si ricava infatti subito, sol che si tengano presenti le (37) e (38),

$$\varphi = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{1}{mE} (\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y) + \left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{2G} (\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) \end{aligned} \right\} (42)$$

\*\*\*

La condizione che questa forma sia essenzialmente positiva porta con sé, come abbiamo già detto a suo tempo, alcune limitazioni a cui le costanti elastiche debbono soddisfare.

Conviene che noi precisiamo queste limitazioni almeno nel caso speciale dell'isotropia.



Prenderemo perciò in considerazione il discriminante

$$\frac{1}{64} \begin{vmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{1}{mE} & -\frac{1}{mE} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{mE} & \frac{1}{E} & -\frac{1}{mE} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{mE} & -\frac{1}{mE} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(m+1)}{mE} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(m+1)}{mE} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(m+1)}{mE} \end{vmatrix}$$

ed imporremo che siano identicamente verificate le disequazioni

$$\frac{1}{E} > 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{1}{mE} \\ -\frac{1}{mE} & \frac{1}{E} \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{1}{mE} & 1 \\ -\frac{1}{mE} & \frac{1}{E} & -\frac{1}{mE} \\ -\frac{1}{mE} & -\frac{1}{mE} & \frac{1}{E} \end{vmatrix} > 0$$

$$\frac{2(m+1)}{mE} > 0$$

Dalla prima si ricava subito

$$E > 0 \quad (43)$$

e dall'ultima

$$\frac{1}{m} > -1 \quad (44)$$

Sviluppando invece la terza e riducendo, si giunge alla condizione

$$\frac{1}{m} < \frac{1}{2} \quad (45)$$

La seconda diseuguaglianza resta soddisfatta in conseguenza.

\* \* \*

A parte queste limitazioni la teoria non ci dice nulla sui valori delle due costanti  $E$  ed  $m$  le quali pertanto dovranno per ciascun corpo isotropo, o ritenuto tale, essere determinate sperimentalmente.

Per verità è doveroso avvertire che si è creduto per molto tempo e da molti autori che  $m$  avesse per tutti i corpi isotropi il valore fisso 4.

A questo risultato infatti era pervenuto Navier partendo dall'ipotesi che ogni corpo fosse formato da punti materiali tra due qualunque dei quali nascesse una forza attrattiva o repulsiva quando, deformandosi il corpo, la loro distanza venisse ad alterarsi. Navier ammetteva che questa forza fosse diretta secondo la congiungente dei due punti e che la sua grandezza fosse funzione soltanto della loro distanza; su queste basi egli impostava il calcolo diretto delle forze che si sviluppano in ciascun elemento di volume del corpo deformato, calcolava di queste forze la funzione potenziale e, applicando il metodo di Lagrange, ne deduceva le equazioni dell'equilibrio.

La memoria di Navier, letta all'Académie des Sciences il 14 maggio del 1821, è la prima in cui sia trattato il problema dei corpi elastici a tre dimensioni. In essa non si parla che di corpi isotropi. Ma già fin dal 1814 Poisson occupandosi dello

studio delle superfici elastiche aveva introdotto in modo generale il concetto della elasticità variabile da direzione a direzione.

La concezione che della struttura molecolare dei corpi aveva Poisson, sostanzialmente diversa da quella di Navier in quanto escludeva esplicitamente ogni qualsiasi legame o vincolo interno limitante la mobilità relativa dei singoli punti materiali, faceva però capo essa pure all'ipotesi delle forze intermolecolari centrali e funzioni delle sole distanze.

Nello studio dei corpi elastici a tre dimensioni, questa concezione fu adottata da Fresnel che se ne servì largamente nei suoi lavori sulla doppia rifrazione pubblicati fra il 1821 ed il 1827.

La medesima concezione fu ben presto accettata anche da Cauchy. Questi aveva, verso il 1822, sviluppata in tutte le sue parti essenziali la teoria geometrica delle deformazioni piccolissime che noi abbiamo esposta al principio di questo volume: aveva poi ricavate le equazioni generali dell'equilibrio partendo dal concetto che, se le tensioni applicate alla superficie che limita una qualunque porzione del corpo devono fare equilibrio alle forze esterne su di essa porzione agenti, esse devono a maggior ragione far loro equilibrio quando questa porzione sia supposta rigida (cfr. pag. 75 e seg.).

Quando si trovò nella necessità di esprimere le componenti di tensione in funzione delle componenti della deformazione, Cauchy, dopo qualche tentativo poco fortunato, aveva bensì pensato di limitarsi a considerare semplicemente le componenti di tensione come sei funzioni lineari e del resto generiche delle sei componenti della deformazione.

Ma ben presto, partendo da un concetto di analogia tra le formole di elasticità e quelle che regolano l'equilibrio di un punto soggetto ad azioni emananti da centri fissi, egli ridusse i 36 coefficienti dapprima introdotti a soli 21 indipendenti. E immediatamente appresso, sotto l'influenza delle idee di Poisson, egli credette di poter stabilire tra essi altre sei relazioni, note ancor oggi sotto il nome di *relazioni di Cauchy*, le quali avrebbero ridotti i coefficienti a soli 15 indipendenti (1828).

Pei corpi isotropi le relazioni di Cauchy conducono alla condizione  $m = 4$ ; le 15 costanti elastiche si riducono ad una sola.

Non occorre dire che nel frattempo non si era mancato di chiedere all'esperienza la conferma delle teorie di Navier e di Poisson. E questa conferma aveva creduto di trovarla Cagniard

de Latour (1827) in un'esperienza assai imperfettamente eseguita della quale avremo presto occasione di riparlare.

Così le idee di Poisson dominarono a lungo e ancora nel 1883 Barré de Saint-Venant dedicava alla loro giustificazione una lunga nota nella sua traduzione del classico trattato di Clebsch.

\* \* \*

Esperienze meno imperfette di quella di Cagniard de Latour non tardarono però a mostrare quanto quelle teorie fossero lontane dalla realtà: si constatò che  $m$  coincide sensibilmente con 4 solo per pochissimi corpi.

Per la maggior parte dei metalli d'uso comune Wertheim dichiarava già nel 1848 di aver trovati per  $m$  valori più prossimi a 3 che a 4. In una delle tabelle che fanno seguito a questo capitolo il lettore troverà raccolti alcuni fra i dati sperimentali più attendibili, e noterà le variazioni tutt'altro che trascurabili che il coefficiente di Poisson subisce da corpo a corpo.

È il caso di dire però che queste variazioni hanno sempre impressionato solo mediocrementemente i sostenitori delle teorie molecolari: essi obbiettavano volentieri che per ottenere sperimentalmente dei risultati concludenti e decisivi sarebbe occorso operare su corpi veramente isotropi ciò che in pratica era naturalmente quasi impossibile, non solo per la difficoltà di trovarne, ma anche pel fatto che le sollecitazioni stesse che ad essi dovevano venir applicate durante l'esperienza potevano essere sufficienti a distruggerne l'isotropia se pure questa fosse inizialmente esistita.

Bisogna pertanto giungere fino a Lamé (1859) per trovare chi cerchi di conciliare le ipotesi molecolari coll'esistenza nei corpi isotropi di due costanti elastiche indipendenti.

La questione era stata però a quell'epoca già nettamente decisa da Green (1837-39) il quale aveva dedotte le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio col metodo di Lagrange, come aveva già fatto a suo tempo Navier, con questa capitale differenza però che, invece di calcolare la funzione potenziale deducendone la forma dalle ipotesi molecolari, Green si limitava a dedurne l'esistenza dalla impossibilità naturale del moto perpetuo.

È noto che da questo medesimo concetto sorse più tardi, per opera principalmente di Sadi Carnot, la termodinamica; il procedimento di Green venne allora ripreso da Sir W. Thomson (1855) e riuscì finalmente a trionfare di tutti i dubbi e di tutte le discussioni a cui le teorie molecolari avevano dato origine.

Del resto anche dal punto di vista sperimentale la questione ha cessato ormai di essere controversa: le belle esperienze del Voigt (1887-88) sulla elasticità dei corpi anisotropi non possono in modo alcuno conciliarsi colle relazioni di Cauchy.

L'ipotesi delle forze centrali funzioni soltanto delle distanze è dunque da considerarsi come definitivamente rigettata: il che non vuol dire che non si possano conciliare i risultati delle esperienze sull'elasticità dei corpi naturali colla teoria molecolare, la quale in altri campi della fisica è stata così feconda di buoni risultati: vuol dire soltanto che bisogna tener conto di qualche fattore da cui l'ipotesi di Navier e di Poisson prescinde.

Si può infatti giungere ai risultati da noi ottenuti anche partendo dalla teoria molecolare, sia supponendo col Voigt che ogni corpo sia costituito da un aggregato di cristalli le cui azioni reciproche possano ridursi ad una forza e ad una coppia, sia ancora ammettendo, come ha proposto il Poincaré, che la grandezza delle azioni mutue di due punti materiali sia influenzata dalla presenza degli altri punti vicinissimi del sistema.

In conclusione tutto ciò che si può dire è che il meccanismo dei fenomeni intermolecolari non è in realtà così semplice come da principio si era potuto supporre.

\* \* \*

Le due costanti elastiche variano da corpo a corpo entro limiti relativamente estesissimi: il modulo di elasticità normale che raggiunge per l'iridio i 52500 Kg./mm.<sup>2</sup> (sperimentatore: Grüneisen), ed i 52000 Kg./mm.<sup>2</sup> per il corindone (sperimentatore: Auerbach), si mantiene per il cautchouch al di sotto di 1 Kg./mm.<sup>2</sup>; il rapporto di contrazione laterale che per quest'ultimo corpo si aggira attorno a 0,47 (sperimentatore: Ver-schaffelt) e che per la lega di Wood raggiunge 0,49 (sperimentatore: Schaefer), discende fino a 0,08 per la pietra focaia ed a 0,06 per l'opale (vedi: Wied. Ann. 44-1891).

Nell'intento di dare un'idea dell'ordine di grandezza che hanno queste costanti nei casi pratici, si sono radunati nelle tabelle che seguono alcuni dati sperimentali scelti fra i più interessanti ed attendibili.

Il primo quadro contiene i metalli più noti classificati ordinatamente, a cominciare da quelli a cui corrispondono i più alti moduli di elasticità normale, fino a quelli il cui modulo è più basso.

Nel secondo quadro invece si è adottato l'ordine dei rapporti di contrazione laterale crescenti.

Fanno seguito altre due tabelle: l'una è relativa alle esperienze di Angenheister sulle leghe di argento e rame e mette in rilievo l'influenza che la composizione della lega ha sulle sue proprietà elastiche: a questa influenza si è voluto accennare perchè si presenta in condizioni analoghe assai frequentemente.

L'ultima tabella invece contiene i risultati ottenuti da Straubel sperimentando su 17 diversi tipi di cristalli di Jena, risultati che sono particolarmente istruttivi in quanto il vetro è notoriamente uno dei materiali in cui lo stato di omogeneità e di isotropia si può più facilmente realizzare in modo quasi perfetto, e in ogni caso controllare in modo assolutamente sicuro a mezzo delle sue proprietà ottiche.

Tabella dei moduli di elasticità normale.

Metallo	Sperimentatore	Valore di $E$ in Kg/mm <sup>2</sup>
Nickel	Searle	23950
	Schaefer	23544
	Cantone	22790
	Meyer	21680
		22991
Acciaio	Gray	21700
	Tomlinson	21360
	Pscheidl	21136
	Pscheidl	21112
	Mercadier	20910
	Mercadier	20705
		20600
		21074
Ferro	Wertheim	20869
	Wertheim	20794
	Baumeister	20500
	Slotte	19385
	Katzenels	19024
		20114
Acciaio al nickel 5 1/2 %	Mercadier	19900
Platino	Wertheim	17044
	Winkelmann	16926
	Meyer	16020
	Slotte	15989
		16495

Metallo	Sperimentatore	Valore di $E$ in Kg/mm <sup>2</sup>
Rame	Slotte	12550
	Searle	12400
	Benedicks	12300
	Angenheister	12240
	Amagat	12145
	Kohlrausch	12140
Ghisa	{ Voigt	12800
	{ Pscheidl	11713
Bronzo fosforoso	Searle	12010
Metallo Delta	Amagat	11697
Ottone	Amagat	10851
	Weston	10640
	Gray	10450
	Searle	10200
	Baumeister	9930
	Kohlrausch	9810
Bronzo	{ Voigt	10600
	{ Pscheidl	9194
Zinco	{ Voigt	10300
	{ Wertheim	8734
Oro	{ Meyer	8630
	{ Wertheim	8131
		12296
		10313
		9897
		9517
		8380



Metallo	Sperimentatore	Valore di $E$ in Kg/mm <sup>2</sup>
Argento	Voigt	7790
	Angenheister	7597
	Wertheim	7357
	Wertheim	7140
		7471
Alluminio	Meyer	7462
	Slotte	7200
	Angenheister	7074
	Angenheister	6716
		7113
Stagno	Voigt	5410
	Kiewiet	4768
	Wertheim	4148
	Hess	4100
		4606
Piombo	Wertheim	1803
	Wertheim	1727
	Amagat	1556
	Schaefer	1493
		1645

Tabella dei rapporti di contrazione laterale.

Metallo	Sperimentatore	Valore di $1/m$
Platino	Schaefer	0.215
Rame elettr.	Voigt	0.250
Ferro	Morrow	0.263
	Katzenels	0.272
	Benton	0.288
	Baumeister	0.304
	Everett	0.310
	Cardani	0.321
Acciaio	Amagat	0.269
	Morrow	0.276
	Benton	0.276
	Stromeyer	0.283
	Stromeyer	0.290
	Kirchhoff	0.294
	Okatow	0.294
	Schneebeli	0.296
	Okatow	0.304
	Goetz	0.333
Nickel	Benton	0.325
Acciaio al nickel 5 $\frac{1}{2}$ %	Mercadier	0.330

Metallo	Sperimentatore	Valore di $1/m$
Metallo Delta	Benton	0.333
Münzmetall	{ Stromeyer Morrow }	{ 0.332 0.341 }
Rame	{ Stromeyer Morrow Amagat Benton Mallock Cardani Everett Angenheister }	{ 0.322 0.327 0.329 0.341 0.348 0.374 0.378 0.382 }
Alluminio	{ Schaefer Cardani }	{ 0.359 0.363 }
Ottone	{ Wertheim Amagat Benton Kirchhoff Baumeister Katzenels }	{ 0.315 0.331 0.331 0.387 0.420 0.420 }
Argento	{ Schaefer Angenheister }	{ 0.363 0.396 }
Piombo	{ Amagat Schaefer }	{ 0.428 0.431 }

**Esperienze di Angenheister sull'elasticità delle leghe  
di Argento e Rame.**

Valore del rapporto Cu : Ag	Modulo di elasticità normale $E$ in Kg/mm <sup>2</sup>	Rapporto di contrazione laterale $1/m$
0	7597	0.396
0.01	7292	0.410
0.1	8190	0.414
1	8563	0.439
10	11448	0.391
∞	12240	0.382

**Esperienze di Straubel sull'elasticità dei cristalli di Iena.**

Marca	Modulo di elasticità normale $E$ in Kg/mm <sup>2</sup>	Rapporto di contrazione laterale $1/m$
1450	7300	0.197
278 III	6640	0.208
627	7970	0.213
714	6570	0.221
2154	6100	0.222
709	6630	0.226
16 III	7400	0.228
S 219	6780	0.235
500	5490	0.239
658	5470	0.250
1973	7420	0.252
270	6330	0.253
370	5850	0.261
S 208	5090	0.261
1299	7970	0.271
S 196	4700	0.274
665	8170	0.319