

## TRAVATURE RETICOLARI SPAZIALI

**VIII.1 - Grado di iperstaticità.** Come per i sistemi reticolari piani, per le travature reticolari spaziali si ammette che le aste siano vincolate alle estremità mediante articolazioni capaci di trasmettere solo forze passanti per un punto, ma comunque dirette. I nodi della travatura sono dunque costituiti da *cerniere sferiche*. Il corpo vincolato mediante due cerniere sferiche non è del tutto privo di libertà di movimento, restando ancora libero di girare attorno alla retta che passa per i centri delle due cerniere; si ammetterà però che manchi ogni azione esterna che dia momento rispetto alla retta anzidetta, che si suppone coincidente con l'asse dell'asta. Le forze si ritengono applicate in corrispondenza dei nodi; quindi le aste lavorano come tali, ossia esclusivamente a trazione o compressione, come tiranti o puntoni.

Si consideri anzitutto la travatura isolata. Poiché per ognuno degli  $n$  nodi si scrivono tre equazioni di equilibrio, poiché ciascuna delle  $a$  aste comporta una incognita, il suo sforzo assiale  $N$ , e poiché le forze nel loro complesso debbono soddisfare a 6 condizioni di equilibrio globale, non indipendenti dalle equazioni di equilibrio prima menzionate, il grado di iperstaticità risulta dato da

$$h = a - 3n + 6 \quad [146]$$

Per confrontare questa espressione con la [138], enumeriamo come s'è fatto a proposito della [31] i gradi di vincolo. Se nei nodi  $1, 2, \dots, n$  concorrono rispettivamente  $a_1, a_2, \dots, a_n$  aste, considerato che ciascuna cerniera costituisce un vincolo triplo e che ogni nodo è da considerare equivalente a tante cerniere quanti sono i corpi (aste) che vi concorrono meno uno, il numero totale di vincoli risulta

$$v = 3(a_1 - 1) + 3(a_2 - 1) + \dots + 3(a_n - 1) = 3a - 3n$$

Si è qui tenuto conto, come per la [31], che  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2a$ . Sostituendo nella [138] questo valore di  $v$  e po-

nendovi  $m = a$  si ottiene  $h = 6 - 3n$ . La discordanza con la [146] deriva dalla osservata liberta che le aste mantengono alla rotazione intorno al proprio asse. Se esistessero azioni capaci di provocare tale rotazione si dovrebbe introdurre un vincolo addizionale per ciascuna asta e quindi si troverebbe per  $h$  il valore dato dalla [146].

Se la travatura e' vincolata al terreno da  $v_1$  vincoli semplici, questo numero si aggiunge al secondo membro della [146] mentre vanno aggiunte alle equazioni disponibili le 6 condizioni d'equilibrio globale. Si ha cosi' la relazione corrispondente alla [32], per la travatura vincolata al terreno

$$h = v_1 + a - 3n \quad [147]$$

Se oltre agli  $n$  nodi *spaziali*, dove convergono aste non complanari, vi sono  $n_p$  nodi piani, dove concorrono aste complanari, prescindendo dalla considerazione della mobilita' di questi nodi in direzione normale al loro piano si deve aggiungere al secondo membro delle [146] e [147] il termine  $-2n_p$  che corrisponde alle equazioni di equilibrio introdotte da questi nodi.

**VIII.2 - Condizioni di equilibrio per un nodo.** Per la scrittura delle equazioni di equilibrio si puo' procedere in analogia con quanto e' detto nel § III.2. Indicando anche qui con  $S_i$  il rapporto fra lo sforzo assiale  $N_i$  dell'asta  $i$  generica e la sua lunghezza  $l_i$ , le equazioni di equilibrio del nodo  $K$  si possono scrivere mediante le [35] e [36], con l'aggiunta dell'analogia equazione di proiezione secondo  $\bar{z}$ :

$$\sum S_i (\bar{z}_i - \bar{z}^K) + F_z = 0 \quad [148]$$

essendo la somma estesa a tutte le aste concorrenti nel nodo ed essendo  $F_z$  la componente su  $\bar{z}$  della forza applicata in  $K$ .

Per la risoluzione dei nodi si possono anche usare procedimenti grafici.

**a) Costruzione del poligono delle forze.** Se in un punto, insieme a forze note, concorrono forze delle quali si conosca la direzione ma non la grandezza, qualora queste siano in numero di tre e non complanari, la loro determinazione puo' essere effettuata con vari procedimenti grafici.

Sia  $K$  il nodo,  $R$  la risultante delle forze note,  $a, b, c$  gli assi delle tre aste delle quali si vogliono determinare gli sforzi (fig. 121). A facilitare le costruzioni si fa uso del piano ausiliario  $\pi$ , parallelo al piano di rappresentazione

della fig. 121b e normale a quello della fig. 121a, dove ne è segnata la traccia;  $(r)$ ,  $(a)$ ,  $(b)$ ,  $(c)$  sono le intersezioni della retta d'azione di  $R$  e delle rette  $a, b, c$  col piano  $\pi$ . È opportuno che  $\pi$  sia scelto in modo che queste intersezioni cadano nei limiti del disegno o possano ritenersi a distanza infinita.

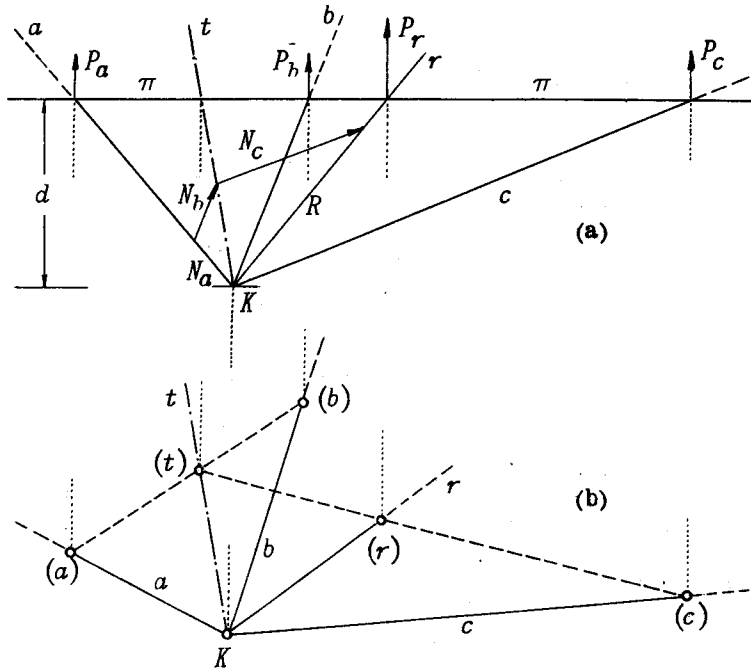


Fig. 121 - Scomposizione delle forze in un nodo mediante il piano ausiliario  $\pi$ .

Il punto  $(t)$  di intersezione della retta  $(r)(c)$  con la retta  $(a)(b)$  individua la retta  $t$  per  $K$  che appartiene sia al piano contenente  $R$  e  $c$ , sia al piano per gli assi  $a, b$ . Nella proiezione della fig. 121a si può effettuare la scomposizione della  $R$  in una forza parallela a  $c$  e una parallela a  $t$ ; quest'ultima viene scomposta poi nelle direzioni di  $a$  e  $b$ . Il poligono che così si viene a costruire è la proiezione sul piano della figura del poligono delle forze nello spazio; dalle proiezioni, indicate nella figura coi nomi delle forze stesse, si passa facilmente alle loro vere grandezze: ad es., determinata la proiezione  $P_a$  di  $N_a$  secondo la normale a  $\pi$ , se  $p_a$  è la proiezione, sulla stessa direzione, della lunghezza dell'asta  $a$ , risulta  $S_a = P_a/p_a$ .

b) **Riduzione a forze parallele.** Per le operazioni relative al sistema di forze parallele possono adoperarsi i concetti del § VII.5. In particolare, con riferimento alla fig. 116, se gli assi di alcune aste e il carico applicato in  $K$  sono paralleli al piano  $\pi$ , le relative azioni intervengono come coppie il cui vettore e' normale alla direzione dell'asta o del carico e il cui valore e' dato dal prodotto della forza corrispondente per la distanza del nodo  $K$  dal piano  $\pi$ .

**VIII.3 - Risoluzione dei sistemi reticolari in casi speciali.** Per una travatura generica, la determinazione degli sforzi richiede la risoluzione delle  $3n$  equazioni di equilibrio [35], [36], [148],  $n$  essendo il numero dei nodi. Il calcolo e' certo assai laborioso, quando non si tratti di una struttura estremamente semplice. Accenniamo ad alcuni accorgimenti mediante i quali, in particolari situazioni, il calcolo puo' essere semplificato.

I) Talvolta e' possibile ordinare i nodi in una successione tale che ciascuno risulti collegato da tre aste ai nodi che lo precedono nell'ordine; in altri termini, la travatura si presenta come generata da successive terne di aste, ciascuna terna ancorando un nodo a quelli che precedono nella successione. Allora, procedendo nella risoluzione dei nodi nell'ordine inverso a quello di generazione, si hanno da trattare di volta in volta nodi con tre soli sforzi incogniti. Il procedimento analitico si riduce alla risoluzione di  $n$  sistemi di 3 equazioni ciascuno, operazione notevolmente piu' semplice che la risoluzione simultanea del sistema di  $3n$  equazioni. Si possono utilmente adoperare i procedimenti della fig. 121 o quello del § VII.5. In quest'ultimo caso, molti degli elementi occorrenti alla risoluzione di un nodo sono forniti dalle operazioni effettuate per trattare i nodi che lo precedono. Con artifici particolari, come ad es. quello della sostituzione di aste (§ III.5), si possono talvolta ridurre a queste semplificazioni strutture che non rientrano direttamente nella categoria in questione.

II) In certi casi troncando sei aste si viene a staccare una parte di struttura soggetta a forze note. In analogia con quanto si fa con le sezioni di Ritter per le travature piane, per i sistemi reticolari nello spazio si possono determinare gli sforzi in quelle sei aste indipendentemente da ogni altra scomposizione. Bastano per questo le sei condizioni di equilibrio a cui deve soddisfare una delle parti di struttura, isolata per effetto delle troncature. Anche per questo calcolo

conviene far uso di un piano ausiliario, nel quale si fissano gli assi  $\bar{x}, \bar{y}$ , l'asse  $\bar{z}$  essendo perpendicolare al piano. Per scrivere le equazioni di equilibrio, indichiamo con  $R_x, R_y, R_z$  le componenti sui tre assi della risultante delle forze esterne applicate alla parte considerata, con  $C_x, C_y, C_z$  i momenti risultanti rispetto ai tre assi, delle medesime forze, positivi nel senso ciclico  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ , con  $N_i = S_i l_i$  lo sforzo nell'asta tagliata  $i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ), con  $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$  le coordinate del nodo di quest'asta nella parte considerata di struttura, con  $\bar{x}'_i, \bar{y}'_i, \bar{z}'_i$  le coordinate dell'altro nodo della medesima asta. Si hanno così le equazioni di equilibrio (\*)

$$R_x + \sum S_i (\bar{x}_i - \bar{x}'_i) = R_y + \sum S_i (\bar{y}_i - \bar{y}'_i) = R_z + \sum S_i (\bar{z}_i - \bar{z}'_i) = 0 \quad [149]$$

$$\begin{aligned} C_x + \sum S_i (\bar{y}_i \bar{z}'_i - \bar{y}'_i \bar{z}_i) &= C_y + \sum S_i (\bar{z}_i \bar{x}'_i - \bar{z}'_i \bar{x}_i) = & [150] \\ &= C_z + \sum S_i (\bar{x}_i \bar{y}'_i - \bar{x}'_i \bar{y}_i) = 0 \end{aligned}$$

le somme essendo estese alle sei aste. Da queste equazioni si calcolano le quantità  $S$  e quindi gli sforzi nelle sei aste.

III) Particolari semplificazioni si rendono possibili nella determinazione degli sforzi in una travatura reticolare che presenti un piano di simmetria. In tal caso conviene scindere le azioni esterne in un complesso simmetrico ed uno antisimmetrico di carichi. Per quanto riguarda il primo sistema, ciascuna asta e la sua simmetrica risultano soggette a sforzi uguali e dello stesso segno; quindi le risultanti delle forze nelle coppie di aste simmetriche, giacendo tutte nel piano di simmetria, sovente possono essere determinate coi procedimenti validi per le travature piane. In particolare, se tagliando tre coppie di aste simmetriche si stacca una parte di struttura soggetta a forze note, il problema è ricondotto alla determinazione di tre forze nel piano, delle quali si conosca retta d'azione e risultante. Le sollecitazioni nelle aste simmetriche sono ottenute poi, dalle risultanti relative a ciascun paio di aste, mediante scomposizioni nei piani contenenti le coppie di aste.

Per le condizioni di carico antisimmetriche, ogni asta sarà soggetta ad uno sforzo uguale ed opposto a quello che sopporta la sua simmetrica. Le risultanti degli sforzi nelle coppie di aste simmetriche sono quindi normali al piano di simmetria

---

(\*) È facile mettere in relazione le [149], [150] con le [2], [3]. Ad es., la prima delle [150] si giustifica con le eguaglianze

$$a_x = 1, \quad a_y = a_z = 0, \quad b_y = \bar{y}_i, \quad b_z = \bar{z}_i, \quad f_y = \bar{y}'_i - \bar{y}_i, \quad f_z = \bar{z}'_i - \bar{z}_i, \quad F/f = S_i$$

o formano coppie con assi giacenti in quel piano. I medesimi procedimenti di scomposizione indicati nel § VIII.2b possono utilmente essere impiegati in questo caso. Conviene per questo assumere come piano ausiliario il piano di simmetria, nel quale coincidono i punti di intersezione relativi a ciascun paio di aste simmetriche.

IV) Certe strutture reticolari sono formate da un aggregato di travature piane, situate sulle facce di un poliedro. Per il calcolo di tali travature, che possiamo chiamare "poliedriche", risulta in generale conveniente, ove si tratti di sistemi isostatici, l'adozione di un procedimento che si riallaccia al concetto di sostituzione delle aste: la travatura situata su una faccia può essere calcolata come travatura piana, in particolari condizioni di carico, quando si ritengano nulle le azioni trasmesse dalle altre facce e al tempo stesso si introducano opportuni vincoli addizionali. Sovrapponendo vari sistemi piani di sforzi, si può fare equilibrio a tutti i carichi esterni ed elidere al tempo stesso le reazioni dei vincoli fittizi aggiunti.

Si consideri, ad es., la struttura schematizzata nella fig. 122a. Sulle facce  $P_1P_2Q_2Q_1$ ,  $P_2P_3Q_3Q_2$ ,  $P_3P_4Q_4Q_3$ ,  $P_4P_1Q_1Q_4$  siano disposte quattro travature reticolari piane, aventi a due a due un corrente in comune; la struttura è chiusa da due diaframmi (ordinate)  $P_1P_2P_3P_4$ ,  $Q_1Q_2Q_3Q_4$  i quali sono controventati (sia pure solo da un'asta diagonale, ad es.  $Q_1Q_3$ ). Se il sistema è fornito dei vincoli strettamente necessari (ad es., i sei vincoli di cui nella fig. 122b sono marcate le direzioni di reazione) e se le facce sono rivestite da travature staticamente determinate, il sistema nel complesso è isostatico (\*). Supporremo che i diaframmi rettangolari  $P_1P_2P_3P_4$ ,  $Q_1Q_2Q_3Q_4$  siano disposti in piani paralleli; la loro distanza è indicata con  $L$ .

(\*) Il corrente  $P_1Q_1$  contenga  $n_1$  nodi e quindi  $n_1 - 1$  aste; similmente siano  $n_2, n_3, n_4$  i nodi dei correnti  $P_2Q_2, P_3Q_3, P_4Q_4$ . Posto che la travatura superiore abbia tutti i suoi nodi (spaziali) sui correnti  $P_2Q_2, P_3Q_3$ , il numero  $a_s$  di aste che la compongono sarà  $a_s = 2(n_2 + n_3) - 3$ , per la [31] con  $h = 0$ . Similmente, per la travatura inferiore è  $a_i = 2(n_1 + n_4) - 3$ , e per quelle laterali  $a' = 2(n_1 + n_2) - 3$ ,  $a'' = 2(n_3 + n_4) - 3$ . Il numero totale effettivo di aste che compongono le quattro travature è  $a_s + a_i + a' + a'' - (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - 4)$  poiché le aste di ciascun corrente sono state conteggiate due volte. Imponendo che il numero globale di aste secondo la [145], con  $h = 0$ , sia uguale a  $3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) - 6$  si conclude che a completare la struttura mancano due sole aste: le diagonali dei diaframmi terminali.

Consideriamo anzitutto la struttura soggetta ai carichi  $H_s, H_i$  paralleli allo spigolo  $P_1P_4$ . Queste azioni possono

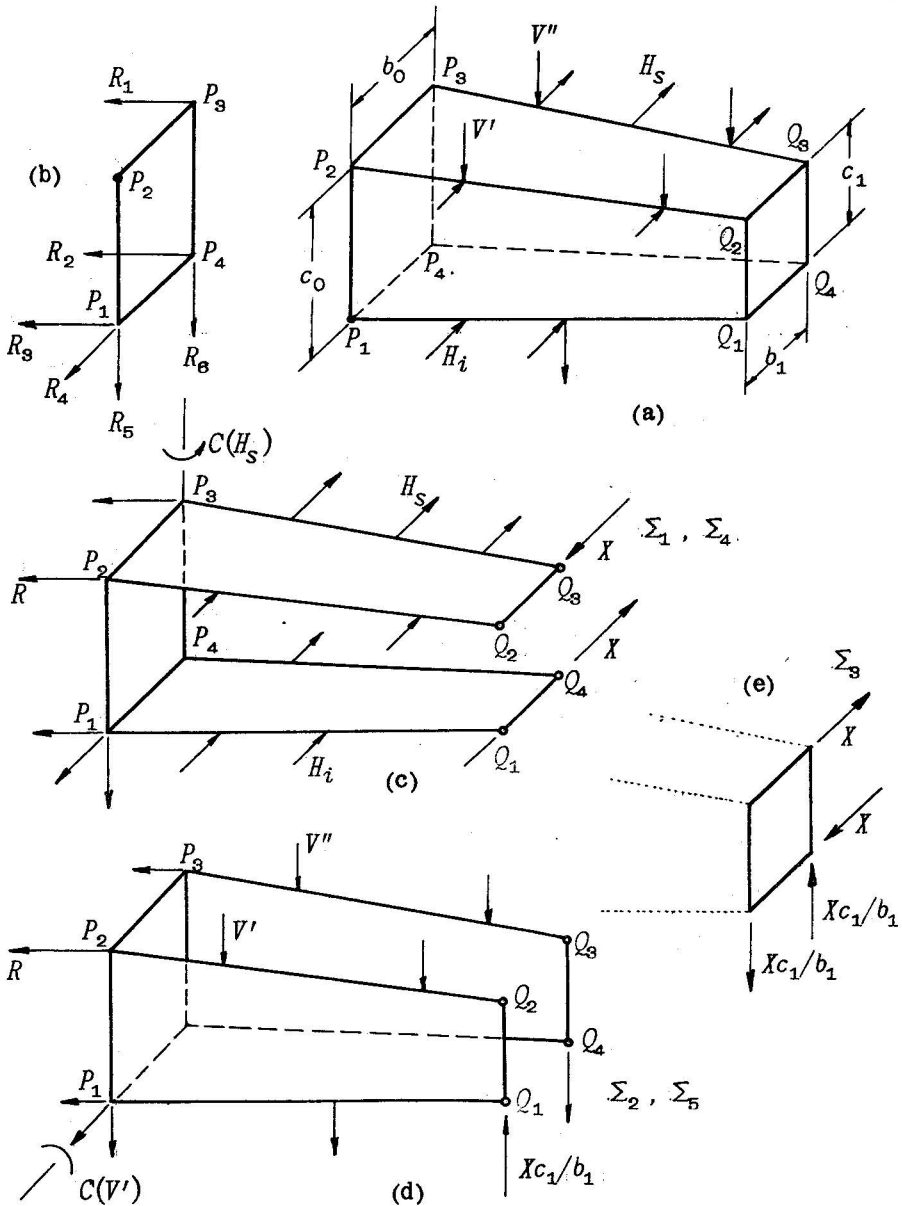


Fig. 122 - Travatura poliedrica a 6 facce.

essere sopportate dalle due travature superiore e inferiore, staccate dal resto, purché si aggiunga un vincolo indicato con la sua reazione  $R$  nella fig.122c. Si potranno allora calco-

lare le due travature come sistemi piani, ottenendo gli sforzi che indichiamo con  $\Sigma_1$  e trovando una reazione  $R = C(H_S)/b_0$  essendo  $C(H_S)$  il momento delle forze  $H_S$  rispetto allo spigolo  $P_3P_4$ .

Isoliamo adesso le due travi di fiancata collegate dall'ordinata posteriore ed applichiamo ad esse i carichi  $V$ , aggiungendo sempre la reazione  $R$  (fig.122d). Con le operazioni proprie delle travature piane otteniamo un sistema di sforzi  $\Sigma_2$  e la reazione  $R = C(V')/c_0$  essendo  $C(V')$  il momento delle forze  $V'$  rispetto allo spigolo  $P_1P_4$ .

Consideriamo adesso la condizione di carico della figura 122e; per questa solo le aste del diaframma anteriore vengono a lavorare. Indichiamo con  $\Sigma_3$  il sistema degli sforzi corrispondenti.

Le forze orizzontali della fig.122e vengono ora riportate, invertite, sulle travature della fig.122c dove danno luogo ad un sistema  $\Sigma_4$  di sforzi ed alla reazione  $R = -LX/b_0$ ; invece le forze verticali sono riportate, invertite, sulle travi di fiancata, fig.122d, dove producono il sistema  $\Sigma_5$  di sforzi e la reazione  $R = -LXc_1/b_1c_0$ .

Perche' dalla sovrapposizione dei cinque sistemi di sforzi cosi' definiti si ottenga la sollecitazione che nella struttura completa producono i carichi  $H$  e  $V$  occorre e basta che la reazione  $R$  risultante sia nulla: ossia deve essere

$$C(H_S)/b_0 + C(V')/c_0 - LX/b_0 - LXc_1/b_1c_0 = 0 \quad [151]$$

Con questa equazione si calcola la forza  $X$  e cosi' gli sforzi sono completamente definiti.

Come esempio di applicazione dei risultati sopra indicati, consideriamo la condizione creata da una coppia di forze orizzontali  $M/c_1$ , di momento  $M$  applicata ai nodi  $Q_1, Q_2$ . Si trova allora

$$\begin{aligned} C(H_S) &= ML/c_1 & C(V') &= 0 \\ X &= Mb_1c_0/(b_1c_0 + b_0c_1)c_1 \end{aligned} \quad [152]$$

Le travi di fiancata risultano allora soggette alla forza  $Mc_0/(b_1c_0 + b_0c_1)$  agente secondo  $Q_1Q_2$  e ad una uguale lungo il lato  $Q_3Q_4$ ; invece sulle travature della fig.122c agisce la forza  $M/c_1 - X = Mb_0/(b_1c_0 + b_0c_1)$  lungo  $Q_2Q_3$  e una uguale lungo  $Q_4Q_1$ .

In base ai medesimi concetti si puo' risolvere la travatura anche nel caso in cui i correnti non siano rettilinei. In questo caso le travi che coprono le pareti della struttura non sono piane, ma presentano piegature su alcune traverse che supponiamo parallele ai diaframmi di estremita'. Se, in una cer-



ta condizione di carico, la travatura superiore, della quale si vede nella fig.123 una parte del profilo, lavora senza intervento di sforzi nelle travi di fiancata, in corrispondenza della traversa  $t$  dovranno intervenire apposite reazioni fittizie. Applicando queste forze parallelamente al diaframma terminale  $Q_1Q_2$ , se  $N_1$  e'

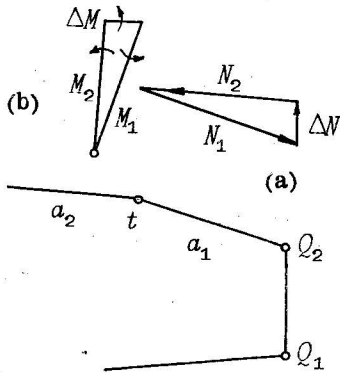


Fig. 123 - Forze addizionali presso una piegatura.

è lo sforzo compressivo normale alla traversa nella faccia  $a_1$  e se  $N_2$  è lo sforzo corrispondente alla faccia  $a_2$ , con questi la reazione  $\Delta N$  aggiunta sulla traversa deve dare il triangolo della fig.123a. Analogamente per le coppie: il momento  $M_1$  rispetto ad un punto di  $t$  (poniamo, il punto di mezzo) per la trave  $a_1$ , il momento  $M_2$  per la trave  $a_2$  ed il momento  $\Delta M$  delle reazioni aggiunte sulla traversa debbono dare

i tre vettori della fig.123b. Dunque, con l'introduzione di queste forze addizionali la travatura superiore realizza le condizioni di equilibrio senza l'intervento delle fiancate. Poi le forze addizionali debbono essere compensate: per questo le si considera agenti con versi opposti sulle travi verticali. Cosicché in definitiva il calcolo della travatura spaziale viene ricondotto alla risoluzione di travature piane.